M1. Sejam $(a_n)_n$ sequência e u, v limites de $(a_n)_n$.

-- ALVO: $u = v$

Basta demonstrar que $(\forall \varepsilon > 0)[d(u,v) < \varepsilon]$.

Seja $\varepsilon > 0$. -- ALVO: $d(u,v) < \varepsilon$

Logo sejam N_u, N_v tais que $\overset{hu:}{(\forall i \geq N_u)}[d(a_i, u) < \varepsilon/2]$ e $\overset{hv}{(\forall i \geq N_v)}[d(a_i, v) < \varepsilon/2]$.

Tome $i := N_u \vee N_v$.

Como $i \geq N_u$ e $i \geq N_v$ (pela escolha de i), aplique i em hu e hv para obter que $d(a_i, u) < \varepsilon/2$ e $d(a_i, v) < \varepsilon/2$.

Logo $d(a_i, u) + d(a_i, v) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$.

Logo $d(u,v) < \varepsilon$. [desigualdade triangular]

Logo $u = v$.

■

U1. Seja X subconjunto aberto de A.

Esqueceu a outra parte: A° aberto.

-- ALVO: $X \subseteq A^\circ \iff (\forall x \in X)[x \in A^\circ]$

Seja $x \in X$.

$x \in A^\circ \iff (\exists \varepsilon > 0)[B_\varepsilon(x) \subseteq A]$

-- ALVO: $x \in A^\circ$

Logo seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq X$. [X aberto]

Escolho ε.

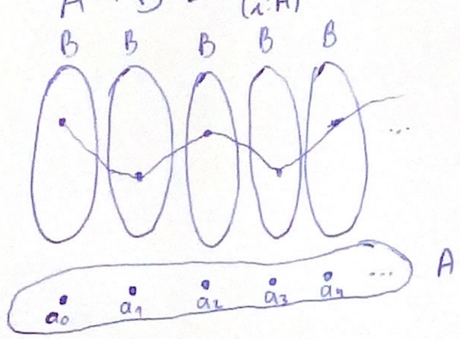
-- ALVO: $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Como $B_\varepsilon(x) \subseteq X$ e $X \subseteq A$, então $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. [$(\subseteq)$-trans]

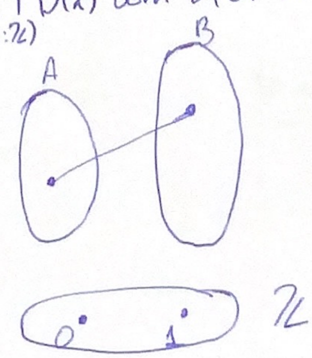
■

R4. Sejam ~~(A,B:Type)~~ A, B, I:Type e $D(i:I)$ família de tipos indexada pelo I tais que $\prod_{(i:I)} D(i)$: Type. Podemos definir $A \to B$ como $\prod_{(i:A)} B$ com $I := A$ e $D(i) := B$, ou seja, D família constante indexada pelo A. Também podemos definir $A \times B$ como $\prod_{(i:\mathbb{Z})} D(i)$ em que $I := \mathbb{Z}$, $D(0) = A$ e ~~D(1)~~ $D(1) = B$, ou seja, D família indexada pelo $\mathbb{Z}$. Temos os seguintes esquemas.

$A \to B \overset{\text{def}}{=} \prod_{(i:A)} B$



$A \times B \overset{\text{def}}{=} \prod_{(i:\mathbb{Z})} D(i)$ com $D(0) = A$ e $D(1) = B$



R1. Escolho $(\times)$.

$$\frac{A\ \mathsf{type} \qquad B\ \mathsf{type}}{A\times B\ \mathsf{type}}\,(\times)\text{-F} \qquad \frac{a:A \qquad b:B}{\langle a,b\rangle : A\times B}\,(\times)\text{-I} \qquad \frac{w:A\times B}{w.l : A}\,(\times)\text{-E}_1$$

$$\left.\begin{aligned}\langle a,b\rangle.l &= a\\ \langle a,b\rangle.r &= b\end{aligned}\right\}(\beta) \qquad \langle w.l, w.r\rangle = w\ (\eta) \qquad \frac{w:A\times B}{w.r : B}\,(\times)\text{-E}_2$$

C1. Seja $\mathbb{C}[\mathrm{Type}]$ a categoria em que os objetos são os tipos e as setas são funções entre tipos. Vou demonstrar que $(\mathrm{outl}, A\times B, \mathrm{outr})$ é um produto na $\mathbb{C}[\mathrm{Type}]$, sejam $A, B : \mathrm{Type}$ e $(\times)$ o produto binário definido na R1.

$$\begin{tikzcd}
A & A\times B \arrow[l, "\mathrm{outl}"'] \arrow[r, "\mathrm{outr}"] & B \\
 & C \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[u, dashed, "\exists!\langle f,g\rangle"] \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja $\langle f,g\rangle$ a pairing das $f : C\to A$ e $g : C \to B$.
Temos que $f = \mathrm{outl}\circ\langle f,g\rangle$ e $g = \mathrm{outr}\circ\langle f,g\rangle$.

Seja $c : C$.

Calc.: $(\mathrm{outl}\circ\langle f,g\rangle)c$
$= \mathrm{outl}(\langle f,g\rangle c)$
$= \mathrm{outl}\,\langle fc, gc\rangle$
$= fc$.

Calc.: $(\mathrm{outr}\circ\langle f,g\rangle)c$
$= \mathrm{outr}(\langle f,g\rangle c)$
$= \mathrm{outr}\,\langle fc, gc\rangle$
$= gc$.

Como $\langle f,g\rangle$ é a única função que faz o diagrama comutar, então o $(\times)$ merece o nome produto binário.

mas quem disse?

Tu usou as β para defender a parte de comuta. É a η que fornece a parte da unicidade. (Como?)

T3. Seja (K, t) compacto. ✓

União de abertos é aberto.

Seja $F \subseteq K$ fechado ✓ $(F^c \in t)$ ✓

Seja $\{G_i\}_{i \in I}$ open cover de F. ✓

temos $F \subseteq \bigcup_i G_i$ e $G_i \in t$ para todo i. ✓

Como $F^c \in t$ e $\bigcup t$ aberto, logo $\{G_i\}_i \cup \{\underbrace{\bigcup t}_{K}\}$

é um open cover de K. nome ruim!

Logo seja $K' \subseteq_{fin} \{G_i\}_i \cup \{\bigcup t\}$ tq K' subcover finito de K.

Como $K \subseteq \bigcup K'$ e $F \subseteq K$, logo $F \subseteq \bigcup K'$

e logo K' cover finito de F. ...?

tem um perigo aqui: se foi envolvido (escolhido) o K para formar esse cover finito, não vai ser um subcover do $\{G_i\}_i$.

T2. Sejam (X, t), (Y, t') espaços topologicos

$f : X \to Y$ contínua.

Suponha X conexo.

Vou mostrar $f[X]$ conexo.

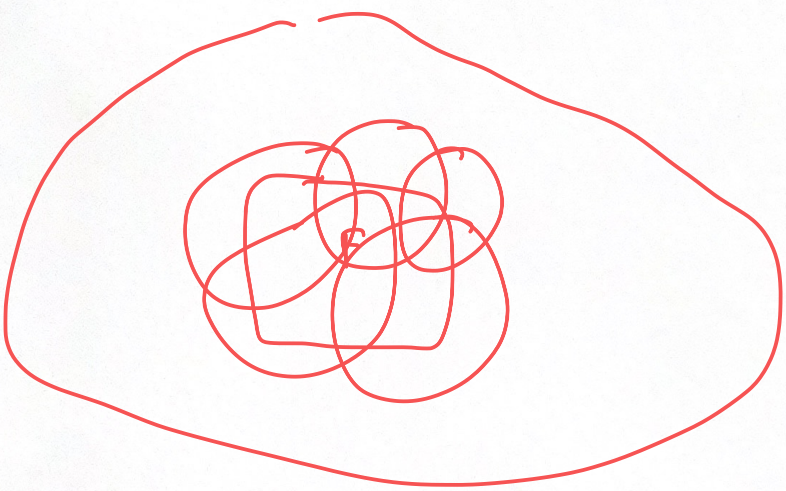
Vou mostrar ... logo sejam ... $f[X]$.

Suponha $f[X]$ não conexo. Logo A, B abertos em $f[X]$.

A, B disconexões em $f[X]$. Logo ... em X.

Logo $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ abertos em ... disjuntos e habitados.

Quero $f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] = X$, $f^{-1}[A], f^{-1}[B]$??



R1.

$$\frac{A \text{ type} \qquad B \text{ type}}{A \times B \text{ type}} \; (\times)\text{-F} \qquad\qquad \frac{a : A \qquad b : B}{\langle a, b \rangle : A \times B} \; (\times)\text{-I}$$

$$\frac{w : A \times B}{w.l : A} \; (\times)\text{-E}_1 \qquad\qquad \frac{w : A \times B}{w.r : B} \; (\times)\text{-E}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle a, b \rangle . l = a \\ \langle a, b \rangle . r = b \end{array}\right) \beta \qquad\qquad \langle w.l, w.r \rangle = w \quad \eta$$

U1. Seja A espaço métrico.
Vou mostrar que $A^\circ \subseteq A$ e $(\forall B \subseteq A)[B \text{ aberto} \Rightarrow B \subseteq A^\circ]$ & A° aberto!
Seja $B \subseteq A$ tq B aberto, ou seja, $(\forall b \in B)(\exists \varepsilon > 0)[B_\varepsilon(b) \subseteq B]$
Seja $b \in B$, basta mostrar $b \in A^\circ$.
Como B aberto, seja ε tq $B_\varepsilon(b) \subseteq B$, com $B \subseteq A$, logo $B_\varepsilon(b) \subseteq A$. Logo tomando ε como testemunha tenho $b \in A^\circ$.
Para $A^\circ \subseteq A$ é imediato.

M1. Seja $(a_n)_n$ sequência e sejam u, v limites de $(a_n)_n$.
Quero $u = v$, logo basta que $d(u,v) = 0$.
Para mostrar que $d(u,v) = 0$, é suficiente mostrar $(\forall \varepsilon > 0)[d(u,v) < \varepsilon]$.
Seja $\varepsilon > 0$. Tome $\varepsilon_u = \varepsilon/2$ e $\varepsilon_v = \varepsilon/2$ para os limites u, v.
De u e v limites sejam M, N tq $(\forall m \geq M)[d(a_m, u) < \varepsilon_u]$ e $(\forall n \geq N)[d(a_n, v) < \varepsilon_v]$.
Tome $n' = \max\{M, N\}$.
?➤ Temos $d(a_{n'}, u) < \varepsilon_u$ e $d(a_{n'}, v) < \varepsilon_v$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(u,v) &\leq d(u, a_{n'}) + d(a_{n'}, v) && [\text{triangular}] \\
&= d(a_{n'}, u) + d(a_{n'}, v) && [\text{sim}] \\
&< \varepsilon_u + \varepsilon_v \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

R1) definições para (×)

$$\frac{A\ \text{TYPE} \qquad B\ \text{TYPE}}{A \times B\ \text{TYPE}}\ \text{-F}$$

$$\frac{a : A \qquad b : B}{\langle a, b \rangle : A \times B}\ \text{-I}$$

$$\frac{w : A \times B}{l w : A}\ \text{-E}_L$$

$$\frac{w : A \times B}{r w : B}\ \text{-E}_R$$

$$\boxed{\begin{array}{l} l\langle a, b\rangle = a \\ r\langle a, b\rangle = b \end{array} \quad (\beta)}$$

$$\boxed{w = \langle l w, r w \rangle}$$

C1) Seja o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a : A & \langle a ; b \rangle : A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & b : B \\
& w : C \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[u, dashed, "\exists! p"'] \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

o ponto de diagramas externos é não ver os pontos! :)

isso significa algo?

ONDE: OS OBJETOS SÃO OS TIPOS $A, B, A \times B, C$ TAIS QUE $a : A$, $b : B$, $\langle a, b \rangle : A \times B$, $w : C$. Temos $l\langle a, b\rangle = a$, $r\langle a, b \rangle = b$ (β) e $w = \langle l w, r w \rangle$ (η).

SEJAM AS SETAS: p, igualdade $(=)$; π_1 eliminação (E_L) em $\langle a ; b \rangle$; π_2 eliminação (E_R) em $\langle a, b \rangle$; f eliminação (E_L) em w; g eliminação (E_R) em w. Logo, HÁ UM ÚNICO $\langle a, b \rangle = w$ E, $p \circ \pi_1 = f$ E, $p \circ \pi_2 = g$ POIS, $\langle a, b \rangle = \langle l w, r w \rangle$.

não dá para compilar/entender

U3) Seja ε_{MAX} a maior distância em $A \cup B$. Seja um $a \in A$. Logo, $a \in A \cup B$, $B_{\varepsilon_{MAX}}(a) \subseteq (A \cup B)^\circ$. E, para algum $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) \in A^\circ$.

quem disse que existe?

qual é teu alvo?

Logo, $\varepsilon < \varepsilon_{MAX}$, do contrário ε_{MAX} não é a maior distância (existiria algum $x \in A \subseteq A \cup B$ tal que $\varepsilon_{MAX} < d(x,a) < \varepsilon$)

bugou...

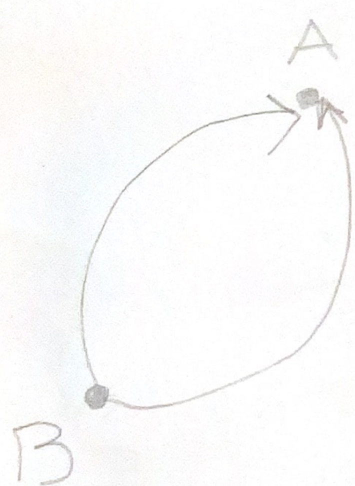
Analogamente, de um $b \in B$ qualquer $B_\varepsilon(b) \in B^\circ$ e $B_\varepsilon(b) \in (A \cup B)^\circ$.

Portanto, $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

H1)

? ?

$h: f[0,1] \to f A \to B$



h é continua

$\pi(X; x_0)$

Tem base

...

X

T1) $\mathbb{C}$: categoria dos espaços topológicos

$Obj[\mathbb{C}]$:= espaços topológicos ✓

$Arr[\mathbb{C}]$:= funções contínuas de um espaço topológico para outro, refletindo os abertos. ✓

identidade = função constante ✓

× $\boxed{\text{Associatividade}}$ = a composição de funções contínuas em que o source da primeira corresponde com o target da segunda são contínuas. (escreveu demais)

isso não é associatividade

2). Functor covariante

F_1: _ × B

Eu, nada!

Se você tem uma função $g: M \to N$ e um functor F_1: _ × B, é garantida uma função $F_1 g: M \times B \to N \times B$. Respeita src e trgt

Basta utilizar a $\langle g, id_B \rangle$.

$g \times id_B$

Functor contravariante

F_2: _ → B

Se você tem um functor que transforma coisas em funções que retornam Bs e uma função de M para N, é garantida uma função que recebendo N→B, retornam-se funções de M→B. inverte src e trgt

não faz sentido

→ são duas coisas diferentes!

H1. Em um espaço topológico (X, t),

$\boxed{\text{Caminho / homotopia}}$ é definido como uma função que mapeia uma função contínua a outra função contínua tal que $f: [0,1] \xrightarrow{C,T,S} (A \to B)$

e $f_0 = g(x)$ Já o grupo fundamental
$f_1 = h(x)$. $\pi(X; X_0)$ é definido pelas coclasses dos loops de X_0, que será o carrier set.

É necessário garantir a identidade, o inverso e a operação. A identidade é a coclasse dos loops que não fazem nada, ou seja, nunca sai do X_0. A operação é definida por $[loop_1] \cdot [loop_2]$ tal que seja solicitado um loop qualquer de ambas as coclasses e eles sejam compostos.

U3. Contraexemplo: Escolha $A = [0,1]$ e $B = [1,2]$. Assim, $A^o = (0,1)$ e $B^o = (1,2)$ e $A^o \cup B^o = (0,1) \cup (1,2)$. Todavia, $A \cup B$ é igual a $[0,2]$ e $(A \cup B)^o = (0,2)$. Logo, $(A \cup B)^o \subseteq A^o \cup B^o$ não é sempre verdade. ✓

Demonstração: $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$ -- $(\forall x \in A^o \cup B^o)[x \in (A \cup B)^o]$

Seja x, t.q. $x \in A^o$ e $x \in B^o$ -- alvo: encontrar epsilon t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq (A \cup B)^o$

Logo, solicite ε_1 e ε_2 tal que $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$.

Escolha $\varepsilon := \dfrac{\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{42}$

quem disse que existem?

isso não tem como compilar!

M4) conv $\Rightarrow$ acuto conv.

Suponha $(a_n)_n$ é conv.

ε — quem é?

Seja $\varepsilon = 4$. Solicite l e N_1 t.q. $(\forall n \geq N_1)\,[d(a_n, l) < \frac{\varepsilon}{4}]$

-- alvo $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n, m \geq N)\, d(a_n, a_m) < \varepsilon]$

Seja $\varepsilon > 0$. Escolha $N = N_1$. Sejam $n, m \geq N_1$.

Temos que $d(a_n, l) < \frac{\varepsilon}{4}$ e $d(a_m, l) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Basta provar de $d(a_n, d_m) < \varepsilon$.

-- desigualdade triangular $d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,z)$

Temos que $d(a_m, l) = d(l, a_m)$.

Logo, $d(a_n, l) + d(l, a_m) \geq d(a_n, a_m)$

Logo $d(a_n, a_m) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$

Logo $d(a_n, a_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Logo $d(a_n, a_m) < \varepsilon$

R2. Vou definir o Π:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B(x) \text{ type}} (F) \qquad \frac{\Gamma, x:A \vdash e : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \prod_{(x:A)} B(x)} (I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma, x:A \vdash f(x) : B(x)}$$

β, η rules:

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash b : B(x)}{\Gamma, x:A \vdash (\lambda x.b)(x) \doteq b : B(x)} (\beta) \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma, x:A \vdash (\lambda x.f(x)) \doteq f : \prod_{(x:A)} B(x)} (\eta)$$

//

C1. Dizer que (x) merece o nome produto significa dizer que existe única seta que faz esse diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "outl"'] \arrow[r, "outr"] & B \\
& P \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[u, dashed, "!"] \arrow[ur, bend right, "g"'] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] &
\end{tikzcd}$$

A pairing $\langle , \rangle$ faz o diagrama comutar pois:

- $(outl \circ \langle f,g \rangle)\, x = outl(\langle f,g \rangle\, x)$
  $= outl\,(f x, g x)$
  $= f x$ [β]

ou seja, $outl \circ \langle f,g \rangle \doteq f$ e analogamente, $outr \circ \langle f,g \rangle = g$.

A unicidade é gratuita praticamente ~ não é! (η)

- Pós minuto 17:56:
  - A categoria tem como objeto os tipos e as setas funções. (cat dos tipos)
  - O nome produto é dado à tupla $(outl, A \times B, outr)$.

M4. Seja $(a_n)_n$: Seq α convergente[1].

Seja $\ell : \alpha$ seu limite[1].

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja $N : \mathbb{N}$ t.q. $(\forall i \geq N)[d(a_i, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}]$.

Vou demonstrar que N serve.

Sejam $i, j \geq N$.

Temos que $d(a_i, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$ e que $d(a_j, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Temos que $d(a_j, \ell) = d(\ell, a_j)$. ($\alpha$ espaço métrico)

Logo $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, \ell) + d(\ell, a_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

✓

T1. • Respeita a Id: Respeita pois acaba voltando para τ da topologia que aberto.

• É associativo: ???

Sei lá, entendi errado e quando entendi faltava 2 min. :c

isto é 120000 ms!

R2.

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \Pi_{x:A} B(x) \text{ type}} \ \Pi\text{-F}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x. b(x) : \Pi_{x:A} B(x)} \ \Pi\text{-I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi_{x:A} B(x)}{\Gamma, x : A \vdash f \llcorner x : B(x)} \ \Pi\text{-E}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma, x : A \vdash (\lambda y. b(y)) x \doteq b(x) : B(x)} \ \Pi\text{-}\beta$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi_{x:A} B(x)}{\Gamma \vdash (\lambda x. f x) \doteq f : \Pi_{x:A} B(x)} \ \Pi\text{-}\eta$$

M1. Tome $(a_n)_n$ uma sequência em X espaço métrico.
Suponha $(a_n)_n \to u$ e $(a_n)_n \to v$.
Vou mostrar que $u = v$. Basta que $(\forall \varepsilon > 0)\, d(u,v) < \varepsilon$
Logo, seja $\varepsilon > 0$. Note que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.
Daí, como u é limite e $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, seja N_u tq
$(a_n)_{n \geq N_u} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u)$.
Similarmente, seja N_v com $(a_n)_{n \geq N_v} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v)$.
Fixe $N := \max\{N_u, N_v\}$. Logo, $d(a_N, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ (I)
e $d(a_N, v) < \frac{\varepsilon}{2}$ (II)

Calculamos

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq d(u, a_N) + d(a_N, v) && [\text{triangular}] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && [\text{(I) e (II)}] \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Logo $d(u,v) < \varepsilon$, como queríamos.

U1. Por "melhor subconjunto aberto" entendemos que é o maior aberto com respeito a $(\subseteq)$.

Portanto, seja $G \subseteq A$ aberto. Vamos mostrar $G \subseteq A^\circ$.

Tome $g \in G$. Por G aberto, seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(g) \subseteq G$.

Como $G \subseteq A$, ~~...~~ temos $B_\varepsilon(g) \subseteq A$.

Por definição de A°, temos $g \in A^\circ$, como queríamos.

A° aberto?

R_1 - Escolho o $(+)$

$$\frac{\Gamma \vdash A\ \text{type} \quad B\ \text{type}}{\Gamma \vdash A + B\ \text{type}}\ (+)\text{-F} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash l.a : A + B}\ (+)\text{-}I_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash r.b : A + B}\ (+)\text{-}I_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash c : A + B \quad f : A \to C \quad g : B \to C}{\Gamma \vdash \begin{pmatrix} \text{case } c \text{ of} \\ \quad l.a \to f\,a \\ \quad r.b \to g\,b \end{pmatrix} : C}\ (+)\text{-E}$$

U_3 - Seja x qualquer t.q $x \in A^{\circ} \cup B^{\circ}$

Caso $x \in A^{\circ}$:

Seja $\epsilon_1 > 0$, t.q $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq A$

Como $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq A$

Logo $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq A \cup B$

Logo $x \in (A \cup B)^{\circ}$ onde $\epsilon = \epsilon_1$

Caso $x \in B^{\circ}$:

Similar,

Logo $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$

C_1.

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "fst"'] \arrow[dr, "snd"] \arrow[dd] & \\
A \arrow[d] & & B \arrow[d] \\
C & C \times D & D
\end{tikzcd}$$

!! ! !! ..?

M_3. Seja U o conjunto dos abertos de X, mostremos (X, U) formam uma topologia.

I) $\emptyset, X \in U$ por definição

II) $\bigcup_{i \in I} U_i \in U$, já que a união de abertos é aberto

III) $\bigcap_{i \in I} U_i \in U$, já que a interseção de abertos é aberto

esses três são teus alvos.

Logo, (X, U) formam uma topologia

!!!

R1. $\dfrac{A \text{ type} \qquad B \text{ type}}{A \times B \text{ type}}$ (x)-F ✓

$\dfrac{a : A \qquad b : B}{(a,b) : A \times B}$ (x)-I ✓

$\dfrac{w : A \times B}{w.l : A}$ (x)-E-l ✓ $\qquad \dfrac{w : A \times B}{w.r : B}$ (x)-E-r ✓

$\dfrac{w : A \times B}{(w.l, w.r) = w}$ (x)-η ✓

$\dfrac{(a,b) : A \times B}{(a,b).l = a}$ (x)-β-l ✓ $\qquad \dfrac{(a,b) : A \times B}{(a,b).r = b}$ (x)-β-r

C1.
$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\overset{.l}{\pi.1}"'] \arrow[r, "\overset{.r}{\pi.2}"] & B \\
& C \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[u, "h!"] \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\langle f, g \rangle$ faz o diagrama comutar:

  Lado esquerdo:
  Basta que $\boxed{\pi.1} \circ \langle f, g \rangle = f$. — por quê inventou essa?
  Seja $c \in C$.
  Calc:
  $(\pi.1 \circ \langle f, g \rangle) c = \pi.1\,(fc, gc)$
  $= fc$

  Lado direito:
  Similar.

- $\langle f, g \rangle$ é a única que faz comutar:
  Seja $h : C \to A \times B$ t.q. $\pi.1 \circ h = f$ e $\pi.2 \circ h = g$.
  Logo, $(\pi.1 \circ h, \pi.2 \circ h) = \langle f, g \rangle$.
  ...?

M4. Sequência convergente $\Rightarrow$ autoconvergente

Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente t.q. $(a_n)_n \to l$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja N t.q. $(\forall n \geq N)[d(a_n, l) < \varepsilon]$.
Sejam $n, m \geq N$ ✓
Logo, $d(a_n, l) < \varepsilon$ e $d(a_m, l) < \varepsilon$ ✓
Pela desigualdade triangular eventualmente você chega numa resposta :)
... e você? :(

$\boxed{M1}$ Sejam u, v limites de $(a_n)_n$.

Sejam n_u, n_v t.q. $(a_n)_{n \geq n_u} \subseteq B_{\frac{1}{2}}(u)$

✓ & $(a_n)_{n \geq n_v} \subseteq B_{\frac{1}{2}}(v)$,

logo seja $n > \max(n_u, n_v)$ e logo:

$d(a_n, u) < \frac{1}{2} > d(a_n, v) = d(v, a_n)$.

Segue que $d(u,v) = d(v,u) \leq d(u, a_n) + d(a_n, v)$

$= 1$.

nunca!!

Seila Buguei muito, mb.

Pois é: $d\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) < 1$. Portanto $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$?

$\boxed{T3}$ Seja $A \subseteq X$ compacto, fechado.

Como os universos são abertos e cobrem o espaço, sempre há covers. Nesse sentido, solicito um subcover de X p/ um cover arbitrário. ?!?

Seja $\{C_i\}_{i \in I}$ cover de A.

quero a $\bigcap \{C_i \cap X_j \mid i \in I, j \in J\}$.

o coveiramento de X é trivial.

Resta mostrar a finitude e o sub.

p/ sub, seja $R \in \mathcal{R}$.

Mudei de ideia :P. ← Ainda bem :)

quero um subcover de um cover de X arbitrário unido com meu cover de A. Repito o processo :P.

sendo subcover, agora consigo o subconjuntamento. Parte que é finito ficou tristo.

:(

(a outra parte mais ainda)

$\boxed{R_2}$ ⇝

$$\frac{A : \mathrm{Type} \qquad \Gamma, a : A \vdash B(a) : \mathrm{Type}}{\prod_{(a:A)} B(a) : \mathrm{Type}}\ F$$

F ?

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash b(a) : B(a)}{\lambda(a:A).\, b(a) : \prod_{(a:A)} B(a)}\ I$$

$$\frac{f : \prod_{a:A} B(a) \qquad a : A}{f\,a : B(a)}\ E$$

$$\sim$$

$$(\lambda(x:A).\, b(x))\,a = b\,a$$

$$[\lambda(a:A).\, b(a)]\,x = [\lambda(a':A).\, b(a')]\,x$$

? ?

$\boxed{C1}$ (Rápida) ⇝ temos $\Big[\langle a,b\rangle.l = a$ (i) $\langle fc, gc\rangle.l = fc$

$, \langle a,b\rangle.r = b$ (ii) $\langle fc, gc\rangle.r = gc$

$, w = \langle w.l, w.r\rangle$ (iii)

$\Big]$. ?

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, ".l"'] \arrow[dr, ".r"] & \\
A \arrow[r, phantom, "(i)"] & & B \arrow[l, phantom, "(ii)"] \\
 & \forall C \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dotted, "\langle f,g\rangle", "(iii)"'] &
\end{tikzcd}$$

✓

$$\langle f,g\rangle\, x \overset{\text{def}}{=} \langle f x, g x\rangle$$

As setas são as funções
os objetos são os tipos

M1 ⇝ ~~$\forall \varepsilon > 0$, eventualmente $\{a_n\}_n \subseteq B_\varepsilon(l)$. nessa altura?~~

~~Sejam u, v limites de $(a_n)_n$.~~

~~let $\varepsilon := 1$ e logo sejam meus. meu eventualmente~~

~~N_u, N_v t.q. $(a_n)_{n \geq N_u} \subseteq B_{\varepsilon/2} \supseteq (a_n)_{n \geq N_v}$.~~

~~ou seja, dis~~

Por diferença Δ, temos $d(n$

vire

M4. Sequências convergentes são autoconvergentes (Cauchy)

DEMONS:

Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente. ✓

Seja ℓ t.q. $(a_n)_n \to \ell$. ✓

Seja $\varepsilon > 0$. ✓

Seja N t.q. $(\forall n \geq N)[d(a_n, \ell) < \varepsilon_1]$ $[\varepsilon_1 := \varepsilon/2]$ onde ✓

Sejam u, v t.q. $u \geq N$ & $v \geq N$. ✓

Logo, $d(a_u, \ell) < \varepsilon_1$ (hu) e $d(a_v, \ell) < \varepsilon_1$. (hv)

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
& d(a_u, a_v) \\
& \leq d(a_u, \ell) + d(\ell, a_v) && [\text{Desi}\,\Delta] \\
& = d(a_u, \ell) + d(a_v, \ell) && [d\text{-com}] \\
& < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 && [hu; hv] \\
& = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

✓

∎

---

13. Subconjuntos fechados de compactos são compactos.

DEMONS:

Sejam K compacto e $F \subseteq K$ fechado. ✓

Seja $\{G_i\}_i$ open cover. de F. ✓

C2. Vou mostrar que $(A \to)$ é functor covariante:

$\text{def fmap} : (\alpha \to \beta) \to ((A \to \alpha) \to (A \to \beta))$

$\quad | \ f, g \Rightarrow f \circ g$

Respeita id:

Seja $f : A \to \alpha$.

Calculamos:

$\text{fmap id } f$

$= (\text{id} \circ f)$ [fmap.1]

$= f.$ [id.compL]

$\text{id } f$

$= f.$ [id.1]

Respeita $(\circ)$:

Sejam $\alpha \xrightarrow{g} \beta \xrightarrow{f} \gamma$.

Seja $h : A \to \alpha$.

Calculamos:

$\text{fmap } (f \circ g)\ h$

$= (f \circ g) \circ h.$ [fmap.1]

$(\text{fmap } f \circ \text{fmap } g)\ h$

$= \text{fmap } f\ (\text{fmap } g\ h)$ [(∘).1]

$= \text{fmap } f\ (g \circ h)$ [fmap.1]

$= f \circ (g \circ h)$ [fmap.1]

$= (f \circ g) \circ h.$ [(∘)-ass]

Vou mostrar que $(\to B)$ é functor contravariante.

$\text{def fmap} : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to B) \to (\alpha \to B)$

$\quad | \ f, g \Rightarrow g \circ f$

Respeita id:

Seja $f : \alpha \to B$.

Calculamos:

$\text{fmap id } f$

$= f \circ \text{id}$ [fmap.1]

$= f.$ [id.compR]

$\text{id } f$

$= f.$ [id.1]

Respeita $(\circ)$:

Sejam $\alpha \xrightarrow{g} \beta \xrightarrow{f} \gamma$

Seja $h : \gamma \to B$.

Calculamos:

$\text{fmap } (f \circ g)\ h$

$= h \circ (f \circ g).$ [fmap.1]

$(\text{fmap } g \circ \text{fmap } f)\ h$

$= \text{fmap } g\ (\text{fmap } f\ h)$ [(∘).1]

$= \text{fmap } g\ (h \circ f)$ [fmap.1]

$= (h \circ f) \circ g$ [fmap.1]

$= h \circ (f \circ g).$ [(∘)-ass]

C2.

$(A \to \_)$ é functor covariante com a $fmap := (\circ)$

$$(\circ)\, id_B = id_{A \to B}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ h &= g \circ (f \circ h) \\ &= (g \circ \_) \circ (f \circ h) \\ &= ((g \circ \_) \circ (f \circ \_))\, \underset{X \to A}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} B \to C \arrow[r, "(\circ)"] \arrow[d, "src"'] \arrow[dr, phantom, "="] & (A \to B) \to (A \to C) \arrow[d, "src"] \\ B \arrow[r, "(A \to \_)"'] & A \to B \end{tikzcd}$$

$(\_ \to A)$ é functor contravariante com a $fmap := (;)$

$$(;)\, id_A = id_{B \to A}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f) ; h &= (f ; g) ; h \\ &= ((f ; \_) \circ (g ; \_))\, \underset{C \to D}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} B \to C \arrow[r, "(;)"] \arrow[d, "Src"'] \arrow[dr, phantom, "="] & (C \to A) \to (B \to A) \arrow[d, "tgt"] \\ B \arrow[r, "(\_ \to A)"'] & B \to A \end{tikzcd}$$

R2. (Π)

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash B \ Type}{\Gamma \vdash \prod_{(a:A)} B(a) \ Type}\ (\Pi\text{-}F)$$

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash b(a) : B(a)}{\Gamma, a : A \vdash (\lambda x. b(x))\, a \doteq b(a) : B(a)}\ (\Pi\text{-}\beta)$$

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash b(a) : B(a)}{\Gamma \vdash \lambda(a : A)\, b(a) : \prod_{(a:A)} B(a)}\ (\Pi\text{-}I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(a:A)} B(a)}{\Gamma \vdash \lambda a. f a \doteq f : \prod_{(a:A)} B(a)}\ (\Pi\text{-}\eta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(a:A)} B(a)}{\Gamma, a : A \vdash f a : B(a)}\ (\Pi\text{-}E)$$

U_3.

($\subseteq$) Seja $x \in A^\circ \cup B^\circ$

Caso $x \in A^\circ$

logo, seja $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \subseteq A$

logo $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cup B$

logo $x \in (A \cup B)^\circ$

Similar para o caso $x \in B^\circ$

($\supseteq$) Tome os $[0,1]$, $[1,2]$ nos $\mathbb{R}$ como contraexemplo

$$([0,1] \cup [1,2])^\circ = [0,2]^\circ = (0,2)$$

$$[0,1]^\circ \cup [1,2]^\circ = (0,1) \cup (1,2)$$

T_1

-- id é contínua

$id^{-1}[A] = A$.

logo, se A aberto então $id^{-1}[A]$ aberto

-- composição de cont. é cont.

Sejam $A \xrightarrow[\text{cts}]{f} B \xrightarrow[\text{cts}]{g} C$

Seja $x \subseteq C$ aberto

logo $g^{-1}[x]$ aberto [g cont]

logo $f^{-1}[g^{-1}[x]]$ aberto [f cont]

logo $(g \circ f)^{-1}[x]$ aberto [?]

R1:

$$\frac{\Gamma \vdash A \ \text{type} \qquad \Gamma \vdash B \ \text{type}}{\Gamma \vdash A \times B \ \text{type}} \ (\times)\text{-F}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\langle a, b \rangle : A \times B} \ (\times)\text{-Intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash w : A \times B}{\Gamma \vdash w.l : A} \ (\times)\text{-Elim.}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash w : A \times B}{\Gamma \vdash w.r : B} \ (\times)\text{-Elim.}_2$$

$$\beta \begin{cases} \langle a, b \rangle . r = b \\ \langle a, b \rangle . l = a \end{cases} \qquad \eta \{ \langle w.l, w.r \rangle = w$$

U1: $\boxed{\text{basta}}$ demonstrar $(\forall B \subseteq A)\,[B \text{ aberto} \Rightarrow A^\circ \supseteq B]$ não.

Seja $B \subseteq A$ t.q. B aberto.

Seja $b \in B$.

Logo seja $\varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(b) \subseteq B$. [B aberto]

Como $B_\varepsilon(b) \subseteq B$ & $B \subseteq A$, então $B_\varepsilon(b) \subseteq A$.

Vou demonstrar que $b \in A^\circ$:

escolho ε.

Imediato. $[B_\varepsilon(b) \subseteq A]$

[redacted]

C1 - $\xleftarrow{.l} A \times B \xrightarrow{.r}$ merece o nome de produto binário, visto que para todo C, D:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\forall f"'] & A \times B \arrow[l, ".l"'] \arrow[r, ".r"] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[l, phantom, "=", shift right=8] & B \arrow[d, "\forall g"] \\
C & C \times D \arrow[l, ".l"] \arrow[r, ".r"'] & D
\end{tikzcd}
$$

confundio o diag da $\_\times\_$ com o da $\langle \_ , \_ \rangle$.

~~existe única função~~

~~da~~

Existe única seta de $A \times B$ para $C \times D$ t.q. faz o diagrama comutar. A pairing das f, g.

T1: Obj := τ

Arr := funções contínuas

id := a função identidade. $(\lambda x . x)$

$(\circ)$:= $(\circ)$ de funções contínuas

~~Assoc. da $(\circ)$: $(\circ)$ de funções é assoc~~

leis: Assoc da $(\circ)$: a assoc. da $(\circ)$ de funções contínuas

R1:

(+):

$$\frac{A\ ty \quad B\ ty}{A+B\ ty}\ (F)$$

$$\frac{a : A}{l.a : A+B}\ (I_1)$$

$$\frac{b : B}{r.b : A+B}\ (I_2)$$

$$\frac{s : A+B \quad \Gamma, a:A \vdash e_1 : C \quad \Gamma, b:B \vdash e_2 : C}{(\text{Case } s \text{ of} \mid s.l \to e_1, s.r \to e_2) : C}\ (E)$$

$\Gamma \vdash$

((Case $l.a$ of | $\lambda x.$

1

dos

(×):

$$\frac{A\ ty \quad B\ ty}{A \times B\ ty}\ (F)$$

$$\frac{a : A \quad b : B}{\langle a, b\rangle : A \times B}\ (I)$$

$$\frac{w : A\times B}{w.l : A}\ (E_1)\ ; \quad \frac{w : A \times B}{w.r : B}\ (E_2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle a,b\rangle.l = a \\ \langle a,b\rangle.r = b\end{array}\right\}(\beta)$$

$$\langle \langle a,b\rangle.l, \langle a,b\rangle.r\rangle = \langle a,b\rangle \quad (\eta)$$

(→):

um

$$\frac{A\ ty \quad B\ ty}{A \to B\ ty}\ (F)$$

$$\frac{t : A \to B \quad a : A}{\lambda a.t\, a : B}\ (E)$$

$$\frac{a : A \quad b : B}{\lambda a.b : A \to B}\ (I)$$

C1:

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, ".l"'] \arrow[r, ".r"] & B \\ & C \arrow[ul, "g"] \arrow[u, dashed, "h"'] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sim, pois as composições de f, g, h formam nossas equações do tipo (x).

Como?

T1: seja X o espaço topológico (qual?)

Obj: X

($\rightarrow$): funções contínuas

o: composição das funções

id: $\lambda x . x$

funções respeitam as regras da id e comp.

é isso que precisa demonstrar aqui!