Programação Funcional, 2024.2 — **Prova 2**

(Turma T12 do Thanos) — (points: 118; bonus: $0^\flat$; time: 84')

Nome: Θάνος

2025-01-08

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FUN})\big)$.

VI. Escreva em forma facilmente legível.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

X. **Responda em até 2 dos problemas.**[2]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Provas violando esta regra não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(22) # G

(10) **G1.** Complete as equações seguintes **com algo interessante:**[3]

```
map f (flatten t) = flatten (fmap f t)
sum (replicate n x) = n · x
sum (map (+ k) ns) = sum ns + k · length ns
sum (map (· k) ns) = sum ns · k
sorted (map (+ k) ns) = sorted ns
```

(12) **G2.** Escolha **uma** das equações de **G1** para demonstrar. Precisas definir (corretamente!) todas as funções envolvidas, exceto se foram definidas em outras questões desta prova.
Definições.

Demonstração de _____ .

[3] Definição. Chamamos algo de *interessante* sse Thanos acha tal algo interessante.

(70) # F

Para qualquer α : Type, definimos

```
data Tree a                              data Dir        type Path = List Dir
  Tip  : a → Tree a                        L : Dir
  Fork : Tree a → Tree a → Tree a          R : Dir
```

(12) **F1.** Defina as funções:

```
depth   : Tree a → Nat          flatten : Tree a → List a
ntips   : Tree a → Nat          mirror  : Tree a → Tree a
nforks  : Tree a → Nat          fetch   : Tree a → Path → Maybe a
```

Definições.

```
depth (T _) = 0
depth (F l r) = S (max (depth l) (depth r))

ntips (T _) = 1
ntips (F l r) = ntips l + ntips r

nforks (T _) = 0
nforks (F l r) = S (nforks l + nforks r)

flatten (T x) = [x]
flatten (F l r) = flatten l ++ flatten r

mirror (T x) = T x
mirror (F l r) = F (mirror l) (mirror r)

fetch (Tip x) []     = J x
fetch (F l _) (L:ds) = fetch l ds
fetch (F _ r) (R:ds) = fetch r ds
fetch _       _      = N
```

(12) **F2.** Defina uma versão eficiente de *flatten* usando uma função auxiliar *flatten′*.

Dica: *Use indução.*

Definição.

```
flatten t = flatten' t []

flatten' : Tree α → List α → List α
flatten' (T x) xs = x :: xs
flatten' (F l r) xs = flatten' l (flatten' r xs)
```

(4) **F3.** Enuncie uma equação interessante sobre *flatten* e *mirror*.
Resposta.

```
flatten ∘ mirror = reverse ∘ flatten
```

(16) **F4.** Enuncie e demonstre uma equação interessante sobre *ntips* e *nforks*.
RESPOSTA.

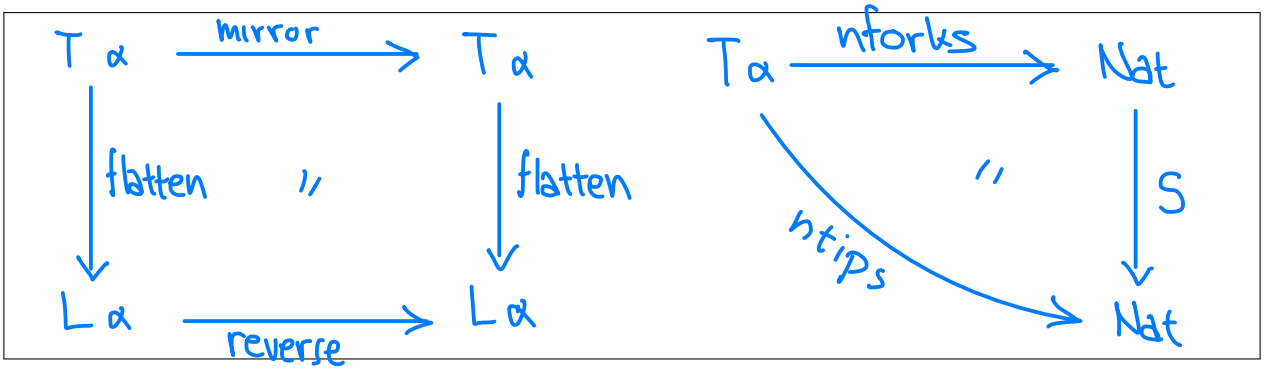
Θ. ntips t = S (nforks t)

Por indução no t.

CASO (Tip x):
ntips (T x)
= S 0
= S (nforks (T x))

CASO (fork l r):
ntips (F l r)
= ntips l + ntips r
= S (nforks l) + S (nforks r) [H.I.]
= S (S (nforks l + nforks r))
= S (nforks (F l r))

(10) **F5.** Desenhe os diagramas comutativos que correspondem aos teoremas **F3** e **F4**.
RESPOSTA.



(8) **F6.** Modifique o Tree para representar arvores que carregam informações não apenas nas folhas, mas nos nós também, mantendo a natureza binária.
RESPOSTA.

```
data Tr α β
    Tip : α → Tr α β
    fork : β → Tr α β → Tr α β → Tr α β
```

(8) **F7.** Qual seria um tipo razoável para a *flatten* desse tipo de arvores?
Defina tal *flatten* (não se preocupe com eficiência).
RESPOSTA.

```
flatten : Tr α β → L (α + β)
flatten (T a) = [Left a]
flatten (F b l r) = flatten l ++ [Right b] ++ flatten r
```

(48) # E

Considere o tipo de expressões aritméticas envolvendo apenas números e divisões inteiras:

```
data Expr
  Val : Int → Expr
  Div : Expr → Expr → Expr
```

(4) **E1.** Dada a função *div* que retorna o quociente explique qual o problema da função seguinte:

```
eval : Expr → Int
eval (Val n) = n
eval (Div u v) = div (eval u) (eval v)
```

RESPOSTA.

eval (Div (Val 1) (Val 0)) = div 1 0 = ⊥

(8) **E2.** Defina uma versão segura (total) de *div* (chame de *safediv*).
DEFINIÇÃO.

```
safediv : Int → Int → M Int
safediv _ 0 = N
safediv x y = J (div x y)
```

(24) **E3.** Usando tua função *safediv* defina uma melhor *eval* : Expr → ?.
DEFINIÇÃO.

```
eval : Expr → M Int
eval (Val n) = J n
eval (Div u v) = case eval u of
                   N ↝ N
                   J x ↝ case eval v of
                           N ↝ N
                           J y ↝ safediv x y
```

(12) **E4.** Um aluno—talvez não o melhor da turma—respondeu na **E3** assim:

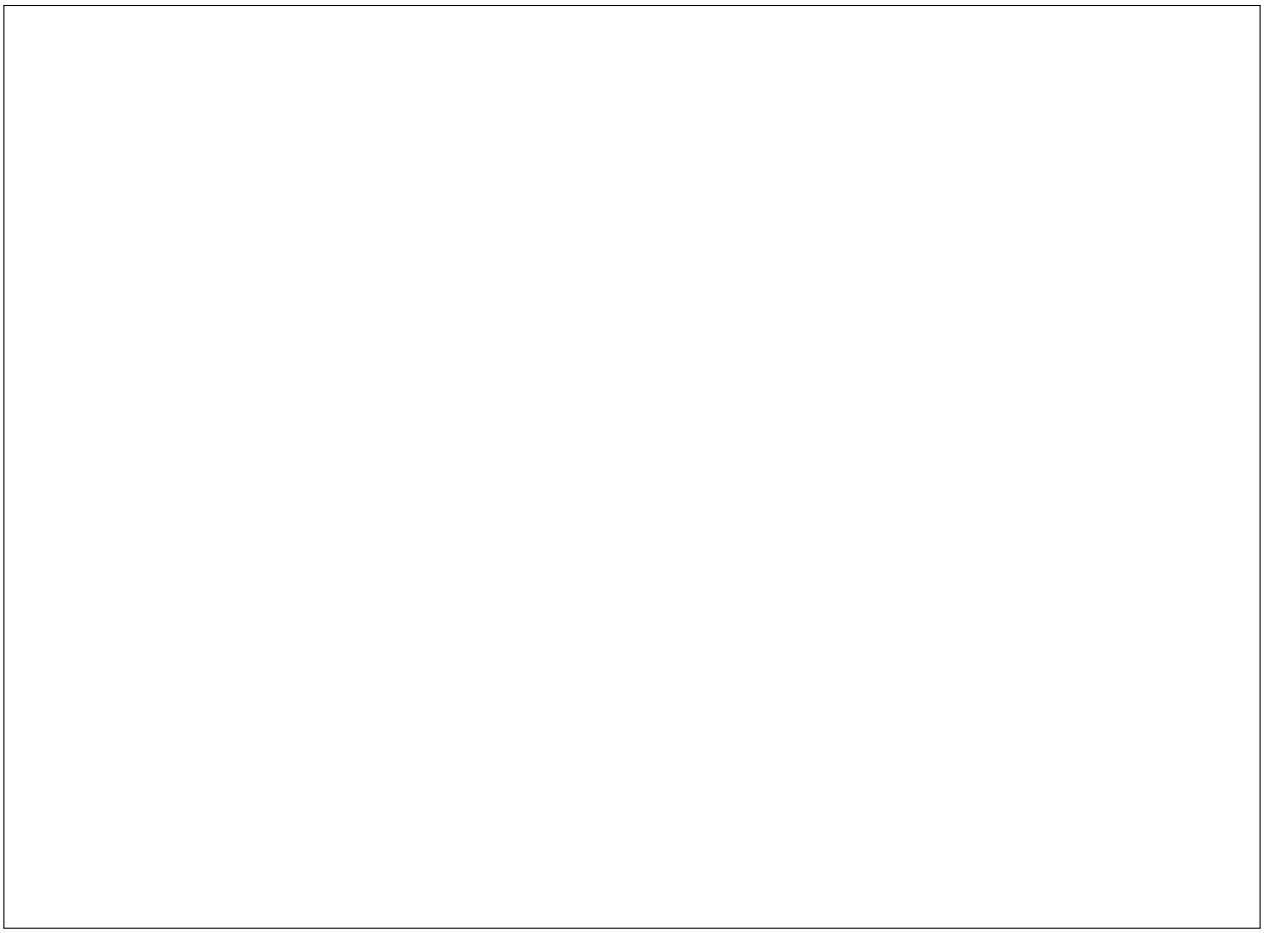
```
eval : Expr → Maybe Int
eval (Val n)   = pure n
eval (Div u v) = pure safediv <*> eval u <*> eval v
```

Compila? Se não, explique o porquê. Se sim, explique porque seria melhor evitar esta definição.
RESPOSTA.

NÃO compila. (TYPE ERROR)
safediv deveria ter tipo Int → Int → Int
mas tem Int → Int → M Int

Só isso mesmo.

Lemmata (até 2)



Rascunho