(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

$k, k' \in \ker\varphi$

$k \cdot_A k' \in \ker\varphi$

demonstrou o existencial usado aqui?

H2.

?

Considere, $a := e_M$ e algum $c \in M$ t.q $f(c) * f(e_M) = f(c)$.
Como f é injetiva, e pela propriedade da operação, conclui-se
como?!
que $f(e_M)$ é o elemenbro neutro e_N.
o quê é isso?

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**. **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfismos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfismos de monóides:
funções in*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO. H2.

Seja $\mathcal{M}$ monóide t.q $\mathcal{M} := (M, \cdot, e_M)$.
Seja $\mathcal{N}$ monóide t.q $\mathcal{N} := (N, *, e_N)$.
~~Seja $f: M \to N$ t.q $(\forall a, b \in M)[f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ & $f(e_M) = f(e_N)]$~~
Seja $f: M \to N$ t.q f respeita a operação binária & f é injetiva.
Basta mostrar que $f(e_M) = e_N$.

X

Sejam $a, b \in M$.
Sabemos que $a \cdot e_M = a$.
Logo $f(a \cdot e_M) = f(a) * f(e_M)$.
Mas pelo lado esquerdo: $f(a \cdot e_M) = f(a)$.
Logo $(\forall a \in M)[f(a) = f(a) * f(e_M)]$.

tudo isso e estamos onde estavamos então?

Agora basta provar que $f(e_M)$ é o elemento neutro de N.
ou seja: $(\forall y \in N)[y * f(e_M) = y]$
como f é injetiva, $(\forall a, b \in M)[fa = fb \Rightarrow a = b]$.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.
DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

?

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.
(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.
RESOLUÇÃO.

Criterio: φ respeita id $\&$ $\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b)^{-1}$
Parte φ - respeita id:
Imediato ✗
Parte φ - respeita a op:
sejam $a, b \in G$.
Cal

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.
DEMONSTRAÇÃO DE (i).

Parte Ker φ hab:
Trivial ✗

Parte $ab^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi$:
Sejam $a, b \in \operatorname{Ker} \varphi$.
Basta demonstrar $\varphi(ab^{-1}) = e$.
Calc: $\varphi(ab^{-1})$
$= (\varphi a)(\varphi b^{-1})$ ~~[φ group]~~ [φ homo]
$= e \boxed{e}$ pulou! [$a, b \in \ker \varphi$]
$= e$
Logo $ab^{-1} \in \ker \varphi$. [pela def de Ker φ]

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável e refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \cancel{\mathcal{G}}$. $\mathcal{H}$

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A.

Parte $\ker \varphi \leq \mathcal{G}$:
Feita na N1.

quem é?

Parte $(\forall k \in \ker \varphi)[gkg^{-1} \in \ker \varphi]$:
Sejam $g \in \mathcal{G}$ e $k \in \ker \varphi$.
Basta demonstrar que $\varphi(gkg^{-1}) = e$.
resp op
Calc: $\varphi(gkg^{-1}) = (\varphi g)(\varphi k)(\varphi g^{-1})$ [φ homo]
$= (\varphi g)\, e\, (\varphi g^{-1})$ [k ∈ Ker φ]
$= (\varphi g)(\varphi g^{-1})$ resp op
$= \varphi(gg^{-1})$ [φ homo]
$= \varphi(e)$ [g group]
$= e$ [φ homo]
resp id
Logo, $gkg^{-1} \in \ker \varphi$, pela def de Ker φ.
Logo, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$.

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA ____.

Contra-exemplo:
$\mathcal{G} = S_3 \leq S_4$?
$(1\,4)(2\,3)(2\,4)$

não dá para entender

Só isso mesmo.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiro preciso demonstrar que há uma seta (homomorfismo) de $A \to A \times B$ e outra $B \to A \times B$

Logo seja $f : A \to A \times B$ tq $fa = \langle a, e_B \rangle$

Logo seja $g : B \to A \times B$ tq $gb = \langle e_a, b \rangle$

Vou demonstrar que g é um homomorfismo similar

Vou demonstrar f é um homomorfismo

Parte f respeita a op -- só isso basta

~~Apenas~~ sejam $a, a' \in A$

Calculamos

$f(aa') = \langle aa', e_b \rangle$

Calculamos

$f(a) *_{Pw} f(a') = \langle a, e_b \rangle \circ_{Pw} \langle a', e_b \rangle$

$= \langle aa', e_b e_b \rangle$

$= \langle aa', e_b \rangle$

Vou demonstrar que

~~$\forall C [\exists f', g']$~~

$(\forall C : obj(C))[(\exists f' : A \to C, g' : B \to C) \to \exists! h : A \times B \to C]$

Seja $C : Obj$ Tq existem f' e g'...

Seja f' Tq $A \to C$

Seja g' Tq $B \to C$

~~Lemmate~~

~~Seja~~ h:

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

~~(20)~~ **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

$\forall (\varphi : A \to B)[\varphi \text{ respeita op} \to \varphi \text{ é um homomorfismo}$

Seja $\varphi : A \to B$ tq φ respeita a op $\overset{def}{\iff} (\forall a\, a')[\varphi(a \cdot_A a') = \varphi(a) \cdot_B \varphi(a')$

Parte respeita op: imediato

Parte respeita id

Calculamos

$\varphi(e_a) = \varphi(e_a \cdot_A e_a)$ [e_a id]

$= \varphi(e_a) \cdot_B \varphi(e_a)$ [respeita op]

Temos que $\varphi(e_a) = \varphi(e_a) \cdot_B e_B$

Logo pelo Rec-R $\varphi(e_a) = e_B$

Parte respeita inv

~~Calculamos~~

Sejam $a \in A$ ~~$, a' \in A$ Tq $a' = a^{-1}$~~

Calculamos

$\varphi(e_a) = \varphi(a \cdot a^{-1})$ [a invertível]

$= \varphi(a) \cdot_B \varphi(a^{-1})$ [respeita op]

Como $\varphi(e_a) = e_B$, Logo

$e_b = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1})$

Temos que $e_b = \varphi(a) \cdot (\varphi(a))^{-1}$

Logo pelo Rec-R $(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$

Existência:

C - Seja $h : A \times B \to C$ Tq $h\langle a, b\rangle = f'a *_C g'b$

Vou demonstrar que h é um homomorfismo -- respeita op

Sejam $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$

Calculamos:

$$h(\langle a,b\rangle \cdot_{Pw} \langle a',b'\rangle) = h(\langle a a', b b'\rangle) \quad [\text{def } \cdot_{Pw}]$$
$$= f'(a a') *_C g'(b b') \quad [\text{def } h]$$
$$= f'a *_C f'a' *_C g'b *_C g'b' \quad [f' \text{ e } g' \text{ respeitam } *_C$$

Calculamos

$$h\langle a,b\rangle * h\langle a',b'\rangle = f'a *_C g'b *_C f'a' *_C g'b' \quad [\text{def } h]$$
$$= f'a *_C f'a' *_C g'b *_C g'b' \quad [C \text{ é Abel}]$$

Unicidade:

+ comuta

...?

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f'"'] & A \times B \arrow[d, "h"] & B \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[dl, bend left, "g'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos A, B* na categoria **Abel** dos grupos *abelianos.*

DEMONSTRAÇÃO.

isso tudo já é dado

$A \times B \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ componentwise, ou seja, $op_{A\times B} \Leftrightarrow \langle op_A \times op_B \rangle$

$e_{A\times B} \Leftrightarrow \langle e_A \times e_B \rangle$

$inv_{A\times B} \langle -^{-1}_A \times -^{-1}_B \rangle$

nenhuma linha compila

$\mathbb{C}$ = categoria Abel

obj($\mathbb{C}$): grupos abelianos

arr($\mathbb{C}$): homomorfismo-abel

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "inleft"] \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[d, dashed, "{[f\ g]}"] & B \arrow[l, "inright"'] \arrow[dl, "g"] \\ & \forall C & \end{tikzcd}$$

φ

Seja C um abel

seja $\varphi: A\times B \to C$ qualquer?

seja $f: A \to C$

seja $g: B \to C$

qualquer outro candidado de soma, tem uma função iso que leva de $A \times B$

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**. **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções *injetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO. X

H_2 Sejam M, N monóides

Seja f injetiva $M \to N$

Seja $m \in M$.

Parte id-L

temos que $a \cdot e_M = a$, por M ser um monóide

temos que $f(a \cdot e_M) = fa$, por f ser função

temos que $fa \cdot fe_M = f(a \cdot e_M)$ pois f respeita a op do monóide

como $fa \cdot fe_M = fa$, fe_M é id do monóide N. — por quê?

Como f é inj, qualquer $\boxed{\text{outro } fx} = fe_M = e_N$ nos garante que $x \neq e_M$

Parte id-R: similar

não faz sentido

essa linha toda serve pra quê?

Regra X

Regra V

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

donde chegou isso?

Na categoria Abel o coproduto é o produto direto $A \oplus B = A \times B$, com projeções naturais:

- $i_1 : A \to A \times B$ dada por $i_1(a) = (a, 0)$.
- $i_2 : B \to A \times B$ dado por $i_2(b) = (0, b)$.

Para quaisquer $f : A \to X$ e $g : B \to X$, definimos:

- $h : A \times B \to X$ por $h(a,b) = f(a) + g(b)$.

Esse h é o único homomorfismo tal que

- $h \circ i_1 = f$
- $h \circ i_2 = g$

Logo, $A \times B$ satisfaz a propriedade universal do coproduto.

Portanto, $A \times B$ é o coproduto em Abel.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos.

Então φ é injetiva $\iff \ker\varphi = \{e\}$, onde e é o neutro de G.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha φ injetiva.

Se $a \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(a) = e_H$.

mas $\varphi(e_G) = e_H$ também.

como φ é injetiva $\Rightarrow a = e_G \Rightarrow \ker\varphi = \{e_G\}$.

($\Leftarrow$) Suponha $\ker\varphi = \{e_G\}$.

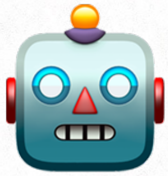
Se $\varphi(a) = \varphi(b)$, então $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e_H \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = e_H \Rightarrow ab^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow ab^{-1} = e_G \Rightarrow a = b$.

Logo φ é injetiva.

conclusão: φ é injetiva $\iff \ker\varphi = \{e\}$

Isso não é um critério de homo.

Isso é algo que queria ser um critério de injetividade.



Não é minha culpa.
Tu não mandou as regras pra mim.
Also: eu não estou entendendo nada disso, obviamente.

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.
DEMONSTRAÇÃO DE (I) .

??

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de grupos.
Então: ?
• $\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = e\}$.
vamos mostrar que $\ker \varphi$ é um subgrupo de A:

• (I) Fechado para operação:
Se $a, b \in \ker \varphi$, então
$\varphi(\boxed{ab^{-1}}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e \cdot e^{-1} = e \Rightarrow ab^{-1} \in \ker \varphi$.
• (II) Identidade:
$\varphi(e) = e \Rightarrow e \in \ker \varphi$.

• (III) Fechado para inverso:
Se $a \in \ker \varphi$, então $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = e^{-1} = e$
$\Rightarrow a^{-1} \in \ker \varphi$

isso não é op-fechado

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável **e** refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \mathcal{H}$.

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA (A) .

Definição de núcleo: $\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ — por que escrever isso?
Verificar as três condições:
• $e \in \ker \varphi$, pois $\varphi(e) = e$.
• Se $g, h \in \ker \varphi$, então $\varphi(gh^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = e \cdot e = e \Rightarrow gh^{-1} \in \ker \varphi$.
• Logo, $\ker \varphi \leq G$.

essa é uma condição?

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA (B) .

A imagem de φ é definida como:
$\operatorname{im} \varphi = \{\varphi(g) \in H \mid g \in G\}$, ou seja, $\operatorname{im} \varphi \subseteq H$ — os elementos da imagem estão em H
não em G

Só isso mesmo.

(32) **C**

cadê?

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Sejam A, B e C Abel.~~

Sejam $f : A \xrightarrow{\text{hom}} C$, $g : B \xrightarrow{\text{hom}} C$.

× (bem mais) basta definir ℓ, π e h t.q. $h \circ \ell = f$ e $h \circ \pi = g$

Seja $\ell : A \to A \times B$ t.q. $\ell a = \langle a, e_B \rangle$ são homos?

Seja $\pi : B \to A \times B$ t.q. $\pi b = \langle e_A, b \rangle$

Seja $h : A \times B \to C$ t.q. $h\langle a, b \rangle = fa +_C gb$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\ell"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & A \times B \arrow[d, dashed, "!\,h"] & B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Parte $h \circ \ell = f$

Calc: $(h \circ \ell)a = h(\ell a)$
[ℓ.1] $= h\langle a, e_B \rangle$
[h.1] $= fa + ge$
[g homo] $= fa + e$
[e_C-id] $= fa$

Parte $h \circ \pi = g$

$(h \circ \pi)b = h(\pi b)$
[π.1] $= h\langle e_A, b \rangle$
[h.1] $= fe + gb$
[f homo] $= e + gb$
[e_C-id] $= gb$

Similar!!

Parte h homo:
Parte h resp. identidade:
basta mostrar que $h\langle e_A, e_B \rangle = e_C$
Calc: $h\langle e_A, e_B \rangle = fe_A + ge_B$ [h.(1)]
$= e_C + e_C$ [f e g homo]
$= e_C$ [e_C-id]

desnecessário

Parte h resp. composição:
Sejam $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$.
Logo, basta mostrar que $h\langle a + a', b + b' \rangle = h\langle a, b \rangle + h\langle a', b' \rangle$
Calc: $h\langle a + a', b + b' \rangle = f(a + a') + g(b + b')$ [h.(1)]
$= fa + fa' + gb + gb'$ [f, g homos resp. composição]
$= fa + gb + fa' + gb'$ [C-comm]
$= h\langle a, b \rangle + h\langle a', b' \rangle$ [← h.(1)]

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfismos de grupos.
(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfismos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.
DEMONSTRAÇÃO DE i.

Parte $\operatorname{Ker} f \subseteq A$
trivial

Parte $\operatorname{Ker} f$ hab

Como A é um grupo, seja e sua identidade [(A).id]
Logo, como f homo, $f e_A = e_B$ [f respeita id]
Logo, $e_A \in \operatorname{Ker} f$ [Ker_-def]

use o critério!

Parte $\operatorname{Ker} f$ op-fechado
Sejam k e $k' \in \operatorname{Ker} f$
Logo, $f(k) = f(k') = e_B$ [Ker_-def]
Logo, como $e_B e_B = e_B$, então $f(k)f(k') = e_B$ [e_B-def]
Logo, $f(kk') = e_B$ [f homo respeita op]
Logo $kk' \in \operatorname{Ker} f$ [Ker_-def]

Parte $\operatorname{Ker} f$ inv-fechado
Seja $k \in \operatorname{Ker} f$.
Logo, como $f(k) \in B$, $f(k)^{-1} \in B$ [B. inv Fechado]
Logo, $f(k) f(k)^{-1} = e_B$ [inv_def]
Logo, $e_B f(k)^{-1} = e_B$ [$k \in \operatorname{Ker}(f)$]
Logo $f(k^{-1}) = e_B$ [e_B-def] [f respeita inv]
Logo $f(k^{-1}) = e_B$
Logo $k^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ [Ker_def]

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável **e** refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \mathcal{H}$

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A.

Parte $\operatorname{Ker} f \leq A$
Imediato [N1. i]

Parte $(\forall g \in G)[g \operatorname{Ker} f g^{-1} \subseteq \operatorname{Ker} f]$
Sejam $g \in G$ e $k \in \operatorname{Ker} f$.
basta mostrar que $gkg^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ -- alvo: $f(gkg^{-1}) = e_B$
calc: $f(gkg^{-1}) = f(g) f(k) f(g^{-1})$ [f homo respeita op]
$= f(g) \cdot e_B f(g^{-1})$ [$k \in \operatorname{Ker} f$]
$= f(g) f(g^{-1})$ [e_B-def]
$= f(gg^{-1})$ [f respeita op]
$= f(e_A)$ [inv_def]
$= e_B$ [$e_A \in \operatorname{Ker} f$]
Logo $gkg^{-1} \in \operatorname{Ker} f$

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA B.

Sejam $f : S_3 \to S_4$ $f \alpha_{S_3} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{S_4}$ -- $f(12)_{S_3} = (12)_{S_4}$
-- $f(12)(3) = (12)(3)(4)$ [ω-omite]

Parte f homo
LEMMA I

Parte $(\exists g)[g \operatorname{Im} f g^{-1} \notin \operatorname{Im} f]$

Parte $(\exists s)(\exists g)[g s g^{-1} \notin \operatorname{Im} f]$ ($s \in \operatorname{Im} f$, $g \in S_4$)
escolha $g := (14)$ e $s := (12)$

calc: $(14) \circ (12) \circ (14)^{-1} = (14)((12)(14)^{-1})$
$= (14)((12)(14))$ [$(14)^{-1} = (14)$]
$= (14)(142)$ [$(12)\circ(14) = (142)$]
$= (24)$ [$(14)\circ(142) = (24)$]

dado: $\operatorname{Im} f = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Imediato [$(24) \notin \operatorname{Im} f$]

Só isso mesmo.

(por que envolver o S_4?)

Lemmata (até 2)

LEMMA 1 f homo.

?

$f(\mathrm{id}_{S_n}) = \mathrm{id}_{S_n}$

Imediato.

Parte $(\forall_{s,s'})[f(s \circ s') = f(s) f(s')$

Sejam $s \circ s' \in S_n$.

~~[illegible]~~: $\cancel{f(s \circ s')a = f(s(s')a) = f(s(s'a)) = [illegible](f \circ s)(s'a) = (f \circ s)a \circ}$

Imediato $[\cancel{[illegible]}]$

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfismos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfismos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

H1

prefixo!

Cuidado. Quem fornece o $\langle \_, \_ \rangle$ é o produto.

HW

Para isso funcionar aqui tu deve invocar qual produto, e com quais argumentos?
Respondendo nisso, vai descubrir o problema de usar $\langle \_, \_ \rangle$ e a sua resolução.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

com parênteses $(*_C)$ $\boxed{\text{sufixo}}$

$*_C$ infixo

$(\_, e_B) \equiv \lambda a.\,(a, e_B)$

$(e_A, \_) \equiv \lambda b.\,(e_A, b)$

DEMONSTRAÇÃO.

$(*_C) \circ \langle h, g\rangle$ é homomorfismo:
Basta que respeite a operação,

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{(\_,e_B)}"] \arrow[dr, bend right, "h"'] & A \times B \arrow[d, "{(*_C)\circ\boxed{\langle h,g\rangle}}"] & B \arrow[l, "{(e_A,\_)}"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

por que esses nomes

$$
\begin{aligned}
&((*_C)\circ\langle h,g\rangle)((a,b) *_{A\times B} (a',b')) \\
&= ((*_C)\circ\langle h,g\rangle)(a *_A a', b *_B b') \\
&= (*_C)(h(a *_A a'), g(b *_B b')) \\
&= h(a *_A a') *_C g(b *_B b') \\
&= ha *_C ha' *_C gb *_C gb' \\
&= ha *_C gb *_C ha' *_C gb' \quad [*_C\text{-assoc; abel}] \\
&= (*_C)(ha, gb) *_C (ha', gb') \\
&= ((*_C)(\langle h,g\rangle(a,b))) *_C (*_C)(\langle h,g\rangle(a',b')) \\
&= ((*_C)\circ\langle h,g\rangle)(a,b) *_C ((*_C)\circ\langle h,g\rangle)(a',b')
\end{aligned}
$$

Esquerda comuta:

$$
\begin{aligned}
(*_C)\circ\langle h,g\rangle\circ(\_, e_B) &= (*_C)\circ\langle h,g\rangle\circ(\lambda a.\,(a,e_B)) \\
&= (*_C)\circ(\lambda a.\,\langle h,g\rangle(a,e_B)) \\
&= (*_C)\circ(\lambda a.\,(ha, ge_B)) \\
&= \lambda a.\,(*_C)(ha, ge_B) \\
&= \lambda a.\,(*_C)(ha, e_C) \quad [g \text{ hom (respeita id)}] \\
&= \lambda a.\,ha \quad [\text{id}] \\
&= h
\end{aligned}
$$

(faltou o !)

Direita comuta: similar.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**. **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfismos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfismos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

~~Sejam $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ monoides~~

~~Seja $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$~~

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker\varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im}\varphi \leq B$.

DEMONSTRAÇÃO DE i.

i. Parte habitado:
com φ hom, $\varphi e_A = e_B$.
Logo, $e_A \in \operatorname{Ker}\varphi$.
Parte ab^{-1} fechado:
Seja $a, b \in \ker\varphi$.
Basta demonstrar que $\varphi(ab^{-1}) = e_B$.
Calc:
$\varphi(ab^{-1}) = \varphi a *_B \varphi(b^{-1})$ [φ respeita op]
$= e_B *_B \varphi(b^{-1})$ [$a \in \ker\varphi$]
$= \varphi(b^{-1})$ [id]
$= \varphi(b)^{-1}$ [φ-respeita-inv]
$= e_B^{-1}$ [$b \in \operatorname{Ker}\varphi$]
$= e_B$ [id-inv]

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável e refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im}\varphi \trianglelefteq \mathcal{H}$

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A.

Parte $\operatorname{Ker}\varphi \leq \mathcal{G}$: imediato por N1.(i)
~~-Parte habitado:~~
~~Como φ hom, φe_G ...~~
~~Logo, $e_G \in \operatorname{Ker}\varphi$~~
Parte $(\forall g)[gNg^{-1} \subseteq N]$ -- $N := \operatorname{Ker}\varphi$
Seja $g \in G$
Seja $k \in \operatorname{Ker}\varphi$ t.q. $gkg^{-1} \in g(\operatorname{Ker}\varphi)g^{-1}$.
Basta demonstrar que $\varphi(gkg^{-1}) = e_H$.

Calc:
$\varphi(gkg^{-1}) = \varphi g * \varphi k * \varphi(g^{-1})$ [φ-respeita-op]
$= \varphi g * e_H * (\varphi g)^{-1}$ [$k \in \operatorname{Ker}\varphi$; φ-respeita-inv]
$= \varphi g * (\varphi g)^{-1}$ [id]
$= e_H$ [inv]

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA B.

Escolho $\mathcal{G} :=$ Inteiros, $\mathcal{H} := S_3$, $f := \varphi$
-- $f : \mathrm{Int} \to S_3$
~~[illegible]~~
$f a = \begin{cases} \mathrm{id}, & \text{se } a \text{ é par} \\ \varphi, & \text{se } a \text{ é ímpar} \end{cases}$

Só isso mesmo.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos A, B* na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfismos de grupos. respeita op $\Rightarrow$ hom a

(20) **H2**. Demonstre o critério de homomorfismos de monóides: respeita op & sobre $\Rightarrow$ hom mon
funções *sobrejetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

Suponha φ sobrejetiva e φ respeita a operação H2.

Parte φ respeita identidade:

Seja $\varphi(m) = n$ por φ sobrejetiva. Basta demonstrar φ também respeita a identidade

Calc:

$$\left.\begin{aligned} n &= n \cdot e \\ &= \varphi(m) \cdot \varphi(e) && [\varphi \text{ respeita ap}] \\ &= \varphi(m \cdot e) && [\varphi \text{ hom}] \\ &= \varphi(m) \\ &= n \end{aligned}\right\}$$

parece que usou φ-resp-id aqui

tudo isso é para descobrir que $n = n$?

Então, φ respeita a identidade. cadê??

Parte respeita operação:

Imediato

a φ já esta nos dados.

Ta "seja"ndo o quê?
Quem é m? Quem é n?

(20) N

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.
DEMONSTRAÇÃO DE <u>ii</u> .

isso não compila!
Escreva: Sejam x,y t.q. ..... .

Por ora teste, demonstraremos im $\varphi \leq B$

-- im φ hab
Como $\varphi(e_A) = e_H$
Então, $e_H \in$ im φ.
✓

-- $ab^{-1} \in$ im φ
Sejam $a, b \in$ im φ
Sejam $\boxed{\varphi(x) = a, \varphi(y) \in A}$
Calc:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b^{-1} &= \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} && [\varphi \text{ homomorfismo}] \\
&= \varphi(x) \cdot \varphi(y^{-1}) && [\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)^{-1}] \\
&= \varphi(x \cdot y^{-1}) && [\varphi \text{ respeita op}]
\end{aligned}
$$

Logo, $ab^{-1} \in$ im φ. ✓

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável e refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \mathcal{H}$

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA <u>A</u> .

-- ker $\varphi \leq \mathcal{G}$ (N1!!)

-- ker φ hab
$\varphi(e_A) = e_B$
$e_A \in$ ker φ ✓

-- $ab^{-1} \in$ ker φ
Sejam $a, b \in$ ker φ
Calc:

$$
\begin{aligned}
\varphi(a)\varphi(b)^{-1} &= e\,\varphi(b)^{-1} \\
&= e^{-1} \\
&= e
\end{aligned}
$$

Logo, $ab^{-1} \in$ ker φ. Cadê o $\varphi(ab^{-1})$?

-- ker φ normal
-- $(\forall k \in \ker \varphi)(g \in \mathcal{G})[gkg^{-1} \in \ker \varphi]$
Sejam $k \in$ ker φ, $g \in \mathcal{G}$
Calc:

$$
\begin{aligned}
\cancel{\varphi(g)\varphi(k)\varphi(g^{-1})} &= \varphi(g)\, e\, \varphi(g^{-1}) && [\varphi(k) = e] \\
&= \varphi(g)\varphi(g^{-1}) \\
&= \varphi(g g^{-1}) && [\varphi \text{ respeita op}] \\
&= \varphi(e) \\
&= e && [?]
\end{aligned}
$$

o alvo não envolve isso, mas sim o $\varphi(gkg^{-1})$!

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA <u>B</u> .

Só isso mesmo.

(32) C

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) H

Escolha um dos **H1**, **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções *sobrejetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

H2:
Sejam M, ~~A~~ N : Monoid.
Seja $\varphi : M \to N$ função sobrejetiva que respeita a operação de monóide.
-- ALVO: φ é homomorfismo.
Basta demonstrar que φ respeita a identidade de monóide.
-- ALVO: $\varphi\, id_M = id_N$
Seja $m \in |M|$ tal que $\varphi m = id_N$. [φ sobre] ✓

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
id_N &= \varphi m && [\text{hyp}] \\
&= \varphi(m \cdot id_M) && [M\text{-idR}] \\
&= (\varphi m)(\varphi\, id_M) && [\varphi \text{ respeita a op}] \\
&= id_N \cdot \varphi\, id_M && [\text{hyp}] \\
&= \varphi\, id_M. && [N\text{-idL}]
\end{aligned}
$$

∎

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:

(i) $\ker \varphi \leq A$;

(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.

DEMONSTRAÇÃO DE (i) .

Basta utilizar o critérion "one-teste"

Parte $\ker\varphi$ habitado:

| Escolho e_A. --ALVO: $e_A \in \ker\varphi$.

| Calc.: $\varphi(e_A) = e_B$ [φ homo].

Parte $(\forall a, b \in \ker\varphi)[ab^{-1} \in \ker\varphi]$:

| Sejam $a, b \in \ker\varphi$. -- $\varphi a = e_B = \varphi b$

| Calculamos: $\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b^{-1})$ [φ respeita a op]

$= e_B (\varphi b)^{-1}$ [$a \in \ker\varphi$]; φ resp inv

$= (\varphi b)^{-1}$ [B.idL]

$= e_B^{-1}$ [$b \in \ker\varphi$]

$= e_B$. [B.inv]

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável **e** refute a refutável:

(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;

(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im}\varphi \trianglelefteq$ ~~$\mathcal{G}$~~ $\mathcal{H}$.

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A .

Seja $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ homomorfismo de grupos.

Parte $\ker\varphi \leq \mathcal{G}$:

| Imediato pela N1. (i).

Parte $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$:

| Basta demonstrar que $(\forall k \in \ker\varphi)(\forall g \in |\mathcal{G}|)[gkg^{-1} \in \ker\varphi]$.

| Sejam $k \in \ker\varphi$ e $g \in |\mathcal{G}|$. --ALVO: $\varphi(gkg^{-1}) = e_H$.

| Calc.: $\varphi(gkg^{-1}) = (\varphi g)(\varphi k)(\varphi g^{-1})$ [φ respeita a op]

$= (\varphi g)(\varphi g^{-1})$ [$k \in \ker\varphi$; H.id]

$= \varphi(gg^{-1})$ [φ respeita a op]

$= \varphi e_G = e_H$. [G.invR; φ respeita a id].

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA B .

Basta encontrar G, H grupos e $\varphi : G \xrightarrow{hom} H$ tais que ~~(ex imo)~~ $\operatorname{im}\varphi$ não é subgrupo normal de H.

(Lembrete: Na Abel, $(\leq) = (\trianglelefteq)$.)

Só isso mesmo.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**. **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções sobre*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO. plural?

Escolho H2.

Sejam M, N monóides e $\varphi : M \to N$.

fun$\boxed{\text{ções}}$ sobrejetivas que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

Suponha φ respeita a operação e φ sobrejetiva.

Logo, seja $m \in M$ tal que $\varphi(m) = 1_N$. ✓

φ resp-id:

$$
\begin{aligned}
\text{Calc.: } 1_N &= \varphi(m) && [\varphi(m) = 1_N] \\
&= \varphi(m \cdot 1_M) && [\text{def. } 1_M] \\
&= (\varphi m)(\varphi 1_M) && [\varphi \text{ resp. op}] \\
&= 1_N(\varphi 1_M) && [\varphi(m) = 1_N] \\
&= (\varphi 1_M). && [\text{def. } 1_N]
\end{aligned}
$$

✓

mal dá pra ler!
use caneta ...
(vou corrigir assim)

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker\varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im}\varphi \leq B$.
DEMONSTRAÇÃO DE i .

Habitado:
Como $\varphi(e_A) = e_B$, φ homomorfismo, $e_A \in \ker\varphi$.

Op-inv-fechado:
Sejam $x, y \in \ker\varphi$, basta que $\varphi(xy^{-1}) \in \ker\varphi$.
Calc.: $\varphi(xy^{-1}) = (\varphi x)(\varphi y^{-1})$ [φ resp. op]
$= (\varphi x)(\varphi y)^{-1}$ [φ resp. inv]
$= e\,e$ [$x, y \in \ker\varphi$]
$= e.$
Logo $\ker\varphi \leq A$.

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável **e** refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im}\varphi \trianglelefteq \mathcal{H}$.

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A .

Sejam $k \in \ker\varphi$ e $g \in G$.
Basta demonstrar que $gkg^{-1} \in \ker\varphi$, ou seja, $\varphi(gkg^{-1}) = e$.
Calc.: $\varphi(gkg^{-1}) = (\varphi g)(\varphi k)(\varphi g^{-1})$ [φ resp. op]
$= (\varphi g)e(\varphi g^{-1})$ [$k \in \ker\varphi$]
$= (\varphi g)(\varphi g^{-1})$ [def. e]
$= (\varphi g)(\varphi g)^{-1}$ [φ resp. inv]
$= e.$ [def. inv]
~~Logo $\ker\varphi \trianglelefteq G$.~~ ← já terminou esta demonstração na linha anterior.

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA B .

Sejam $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, com adição módulo 2, e S_3 grupos.
Seja $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ definida pela:
$\varphi(0) = (\,)$
$\varphi(1) = (1\,2)$

Note que $\operatorname{im}\varphi = \{(\,), (1,2)\}$, mas
$(1\,2\,3)(1\,2)(1\,2\,3)^{-1} = (2\,3) \notin \operatorname{im}\varphi$.
Logo $\operatorname{im}\varphi \ntrianglelefteq H$.

Só isso mesmo.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**. **H2**.

por deixar um cara em paz?

→ (16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfismos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfismos de monóides: funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

desculpa a bagunça, fiquei nervoso!

~~Sejam M, N monoids:~~

~~Seja $\varphi : M \to N$ t.q. φ inj e resp. op.~~

~~Basta demonstrar que $\varphi(e_A)$ é uma id de B e que~~

~~ela é a única cara que φ ... para~~ φ resp op $\Rightarrow \varphi$ hom

Sejam A, B grupos e $\varphi : A \to B$ t.q. φ resp op

Vou demonstrar que φ é homomorfismo.

Parte φ resp op. Imediato.

Parte φ resp id:

calc: $\varphi(e_A e_A) = (\varphi(e_A))(\varphi(e_A))$ [φ resp op]

$\varphi(e_A e_A) = \varphi(e_A)$

logo $\varphi(e_A)$ é uma id de B $\boxed{X}$

~~logo $\varphi(e_A)$ é a única id de B.~~ ~~[ids baratas]~~

logo $\varphi(e_A) = e_B$. [ids baratas]

Parte φ resp inv:

Seja $a \in A$

calc:

$\varphi(aa^{-1}) = (\varphi a)(\varphi(a^{-1}))$

$\varphi(aa^{-1}) = \varphi e \boxed{=e}$ necessário

logo $(\varphi a)(\varphi(a^{-1})) = \varphi e \boxed{=e}$

logo $(\varphi(a^{-1}))$ é um inv de (φa). inv-R!

logo $(\varphi a^{-1}) = (\varphi a)^{-1}$ [invs baratas]

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.
DEMONSTRAÇÃO DE i .

Parte $\ker\varphi$ hab:
$\varphi(e_A) = e_B$. [φ hom] ✓
logo $\varphi(e_A) \in \ker\varphi$. ✓

Parte $\ker\varphi$ div-fechado:
Sejam $a, b \in \ker\varphi$ [$\ker\varphi$ hab]
$\boxed{\text{Seja } b^{-1} \in A.}$ X não compila!

Calc.
$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\,\varphi(b^{-1})$ [φ hom]
$= \varphi(a)\,\varphi(b)^{-1}$ [φ hom]
$= e_B e_B^{-1}$ [$a, b \in \ker\varphi$]
$= e_B$
$\boxed{\varphi(e_A) = e_B}$ quem se importa?
[φ hom]
logo $\cancel{\varphi(}ab^{-1}\cancel{)} \in \ker\varphi$.

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável e refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$.

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A .

Parte $\ker\varphi \leq G$:
Demonstrado na N1. ✓

Parte $(\forall g \in G)(\forall k \in \ker\varphi)[gkg^{-1} \in \ker\varphi]$
Sejam $g \in G$, $k \in \ker\varphi$.
Calc: $gkg^{-1} = geg^{-1}$ [$k \in \ker\varphi$]
$= gg^{-1}$
$= e_B$

Bugou muito aqui

$\varphi(e_A) = e_B$ [φ hom]

Como $gkg^{-1} = \varphi(e_A)$
e $\varphi(e_A) \in \ker\varphi$.
então $gkg^{-1} \in \ker\varphi$.

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA B .

Sorry

declaration uses 'sorry'

Só isso mesmo.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**. **H2**.

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções ~~inj~~*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO.

Sejam M, N monóides.

Seja $f : M \to N$ ~~tq~~ t.q. f inj e f respeita a op. binária.

Como f inj $f(e) \in N$??

Seja $m \in M$

Como f respeita a op:

$f(m \cdot e) = f(m) \cdot f(e) \overset{??}{=} f(m)$

Logo f também respeita a identidade.

?? use "$\subseteq$"!

(20) N

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq \mathcal{A}$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq \mathcal{B}$.
DEMONSTRAÇÃO DE i .

Ker φ $\boxed{\text{é subconjunto de}}$ A, verificamos:

Op- fechado:

Sejam $K, L \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(K \cdot L) = \varphi(K)\cdot\varphi(L) = e_{\mathcal{B}} \cdot e_{\mathcal{B}} = e_{\mathcal{B}}$

Logo $K \cdot L \in \operatorname{Ker}\varphi$

id:

$\varphi(e_A) = e_{\mathcal{B}}$

Logo $e_A \in \operatorname{Ker}\varphi$

inv:

o que serviu isso?

Seja $K \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\boxed{\varphi(K \cdot K^{-1})} = \varphi(K)\cdot\varphi(K^{-1}) = \varphi(K)\cdot\varphi(K)^{-1} = e_{\mathcal{B}}$

...mas por que $k^{-1} \in \ker\varphi$?

Logo: Ker φ inv fechado.

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável e refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \cancel{\mathcal{G}}.\mathcal{H}$

(6) **N2.** DEMONSTRAÇÃO DA A .

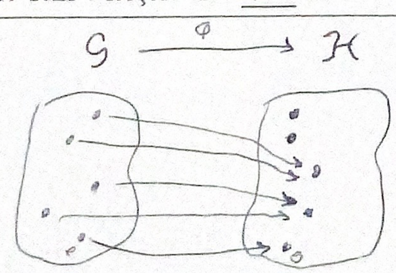
Pela N1. $\operatorname{Ker}\varphi \leq \mathcal{G}$

Seja $K \in \operatorname{Ker}\varphi$ e $g \in \mathcal{G}$.

Demonstramos que $gKg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(gKg^{-1}) = \varphi(g)\cdot\varphi(K)\cdot\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\cdot\varphi(g)^{-1} = e$ ✓

(8) **N3.** REFUTAÇÃO DA B .



nem homo é
(por quê?)

Só isso mesmo.

(32) **C**

Demonstre que o $A \times B$ "merece o nome" *coproduto dos* A, B na categoria **Abel** dos grupos *abelianos*.

DEMONSTRAÇÃO.

(20) **H** *Escolha um dos* **H1**, **H2**.

cadê?

X

(16) **H1.** Enuncie e demonstre um critério (interessante) de homomorfísmos de grupos.

(20) **H2.** Demonstre o critério de homomorfísmos de monóides:
funções __*jetivas* que respeitam a operação binária de monóide são homomorfismos.

RESOLUÇÃO. H1

Sejam A, B Grupos

?? X

$\varphi : A \to B$ é homomorfismo então

φ respeita a operaçã.

Precisamos demonstrar que φ respeita a id e inv

Suponha que φ respeita a op

-- Parte id:

3 linhas de cálculo para chegar em $\varphi e_A = \varphi e_A$??

$\varphi(e_A) = \varphi(e_A \cdot e_A)$

$= \varphi(e_A) \cdot \varphi(e_A)$ [respeita a op]

$= \varphi(e_A)$

$= e_B$ [??]

Logo φ é um homomorfismo entre A e B

-- Parte inv

Seja $a, b \in A$ tq $\varphi(a), \varphi(b) \in B$

Precisamos demonstrar que o $\varphi(ab^{-1})$ faz o quê? (sem verbo!)

Calc:

$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\,\varphi(b^{-1})$

confundiu

$= \varphi(a)\,\varphi(b)^{-1}$

$= e \cdot e^{-1}$ [respeita a op]

$= e$

Como $\varphi(b) \in B$ o $(\varphi(b))^{-1} \in B$

Nada a ver!

(20) **N**

(6) **N1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Demonstre **uma** das duas:
(i) $\ker \varphi \leq A$;
(ii) $\operatorname{im} \varphi \leq B$.
Demonstração de ii.

seja $\varphi : A \to B$ homomorfismo, img $\varphi \leq B$ sse $\varphi^{-1}[J] \subseteq A$, $\varphi^{-1}[J] \leq A$ e
$[\forall a \in A](\forall b \in \varphi^{-1}[J])\{ab \in \varphi^{-1}[J]$ e $ba \in \varphi^{-1}[J]\}$ sendo J sub grupo B

-- parte $\varphi^{-1}[J] \subseteq A$
trivial
-- parte $\varphi^{-1}[J] \leq A$
seja ~~...~~ $a, b \in A$ e φb ~~$\in \ker\varphi$~~ $\varphi a \in \ker\varphi$
$\varphi(a-b) \in \ker\varphi$
Calc:
$\varphi(a-b) = \varphi(a) - (\varphi b)$ [$\varphi b \in \ker\varphi$ logo $-\varphi(b) \in \ker$ logo $\varphi(-b) \in \ker\varphi$]
$= \varphi(a)(\varphi b)$
$= e - e$
$= e$ logo $\varphi(a-b) \in \ker\varphi$

-- parte $(\forall a \in A)$(~~...~~)
$(\forall i \in \varphi^{-1}[J])(ai \in \ker\varphi$ e $ia \in \ker\varphi)$
Calc:
$\varphi(ai) = \varphi(a)\varphi(i)$
$= \varphi(a$

Uma das proposições seguintes é demonstrável, a outra refutável.
Demonstre a demonstrável e refute a refutável:
(A) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{G}$;
(B) para quaisquer grupos e homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{im} \varphi \trianglelefteq \mathcal{H}$

(6) **N2.** Demonstração da A.

seja G, H grupos $\varphi : G \to H$ homomorfismo
precisamos demonstrar $\ker\varphi \trianglelefteq G$
~~...~~
-- parte $\varphi^{-1}[J] \subseteq A$ J seja subgrupo G
trivial pois $e \in \ker\varphi$ logo habitado
-- parte $\varphi^{-1}[J] \leq A$
seja $a, b \in A$ e φa e $\varphi b \in \ker\varphi$
$\varphi(a-b) \in \ker\varphi$
Calc:
$\varphi(a-b) = \varphi a - \varphi b$
$= e$

-- parte
$(\forall a \in A)(\forall i \in \varphi^{-1}\{J\})(ai \in \ker\varphi$ e $ia \in \ker\varphi)$
calc
$\varphi(ai) = \varphi a \, \varphi i$
$= \varphi a \cdot e$
$= e$

(8) **N3.** Refutação da ____ .

Só isso mesmo.