

(24) **C**

Seja G grupo e $g \in G$.

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

C2. Ache a classe de conjugação do e , que denotamos por $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$.

RESPOSTA.

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo S_3 .

Dê um palpite “de coração” sobre quais membros de um grupo acabam sendo côjugues.

RESPOSTA.

(24) C

Seja G grupo e $g \in G$.

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

$$(\forall a, b) (\forall n \in \mathbb{N}) [a \approx b \Rightarrow a^n \approx b^n]$$

(
cada o g ?

$(\approx)$ compatível com as potências naturais

C2. Ache a classe de conjugação do e , que denotamos por $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$.

RESPOSTA.

$$x e x^{-1} \in G$$

~~A classe de conjugação é o próprio $\{e\}$.~~
 ~~$[e]_{\approx} = \{e\}$ $(\forall x \in G) [x \approx e] \Leftrightarrow x = e$~~
~~Escolho e .~~
~~Como $e e e^{-1} = e$ pela id. inv e pela id. 1, $e \in [e]_{\approx}$.~~
 ~~$[e]_{\approx} \subseteq \{e\}$.~~
~~Seja x .~~
Parte $[e]_{\approx} \subseteq \{e\}$: Seja $x \in [e]_{\approx}$.
Seja $y \in G$. $x = g e g^{-1}$
Logo, $g e g^{-1} = g e g^{-1}$ pela id. 1
Logo, $g g^{-1} = e$ pela inv.

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo S_3 . Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo cômjugues.

RESPOSTA.

~~$G \cong [e]_{\approx}$~~
~~Seja $x \in [e]_{\approx}$.~~
~~Seja $y \in G$.~~

Parte $\{e\} \subseteq [e]_{\approx}$:
Basta demonstrar que
 $e \in [e]_{\approx}$.
Escolho e .
Como $e e e^{-1} = e$ pela inv-id
e pela id. 1, $e \in [e]_{\approx}$.

Logo, $x = e$ pela inv-id
Logo, $x \in \{e\}$

(24) G

Escolha um dos G1, G2, G3.

(12) G1. Seja G grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: G é comutativo.

(24) G2. Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) G3. Sejam G grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem exatamente n potências distintas de a .

RESOLUÇÃO DE G2

Parte $\Rightarrow$:
Suponha $HK = KH$.
~~Seja $h \in H$ e $k \in K$.~~
Parte HK hereditário:
~~Seja $h \in H$ e $k \in K$.~~
Escolho e .
Como $e \in H$ por $H \leq G$ e
 $e \in K$ por $K \leq G$,
 $ee \in HK$.
Logo, $e \in HK$ pela $ee=e$.
Parte HK ab^{-1} fechado:
~~Seja $h, k \in HK$.~~ escolha de nomes muito ruim!
sejam $h, j \in H$ e $k, i \in K$.
Logo, $hk, ji \in HK$.
C

Parte $\Leftarrow$:
Suponha $HK \leq G$.
Logo
Parte $\supseteq$:
~~Seja $h \in H$ e $k \in K$.~~
Logo, $kh \in KH$.
~~Não demonstrar que $kh \in HK$.~~
Seja $x \in KH$.
...

$x \quad kH$
 $x \quad HK$
 $kh \quad k'h'$
 $k(hh')k'$
 $kh'h'$

$hk(ji)^{-1}$
 $hki^{-1}j^{-1}$
 $h \quad k \quad k \quad h$
 $K \quad HK \quad HK$

Só isso mesmo.

(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1**. Seja G grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: G é comutativo.

(24) **G2**. Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) **G3**. Sejam G grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem *exatamente* n potências distintas de a .

RESOLUÇÃO DE G2.

$(\Rightarrow)$:

suponha $HK = KH$. (1) ✓

HK nab: ✓

Escolho e .

Como H, K subgrupos de G , logo $e \in H$ & $e \in K$.

Logo, $ee \in HK$.

Logo, $e \in HK$. ✓

HK op-fechado:

seja $h \in H$ & $k \in H$

6-q. $hk \in HK$.

. Logo

X Não!

Calc:

$$(hk)(hk) = h(kh)k$$

$$= h \boxed{hk} k \quad [(4)] \quad X$$

a

Como H, K op-fechado, logo $hh \in H$ e $kk \in K$.

Logo, $hk \in HK$.

inv fechado?

$(\Leftarrow): ?$

Só isso mesmo.

(24) C

Seja G grupo e $g \in G$.

$$x \approx y \rightarrow x^n \approx y^n$$

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

$(\forall x, y) [x \approx y \rightarrow x^n \approx y^n]$ — cadê o g nisso??

Suponha $x \approx y$
indução em n . Seja g Tq $x = g y g^{-1}$

Basta $n=1$ e 0 ?
imediato

Por indução
suponha $x^n \approx y^n$
Seja g Tq $x^n = g y^n g^{-1}$
calculamos
 $x^{n+1} = x^n x$
 $= x^n g y g^{-1}$
 $= g y^n g^{-1} g y g^{-1}$
 $= g y^{n+1} g^{-1}$

C2. Ache a classe de conjugação do e , que denotamos por $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$.

RESPOSTA.

Seria $\{e\}$ apenas
Vou demonstrar $x \approx e$ logo $x = e$

Suponha $x \approx e$, logo $\exists g$ Tq $x = g e g^{-1}$
Seja g Tq $x = g e g^{-1}$
logo $x = g e g^{-1}$
logo $x = e$

não misture formulas com texto assim

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo S_3 .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

(24) G

Escolha um dos G1, G2, G3.

(12) G1. Seja G grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: G é comutativo.

(24) G2. Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) G3. Sejam G grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem exatamente n potências distintas de a .

RESOLUÇÃO DE G3.

limitação estranha $\exists$ e negativas?

Parte $(\forall m \geq m) (\exists i \leq m) [a^i = a^m]$

Seja $m \geq m$
divido m por m
Logo $m = qm + r$
Escolho r
 $a^m = a^{qm+r}$
 $= a^{qm} \cdot a^r$
 $= (a^m)^q \cdot a^r$
 $= e \cdot a^r$
 $= a^r$

apareceram do nada!

Seja $0 < i, j \leq m$ tal que $a^i = a^j$
Separa em duas pela e.m.d
 $i > j$ caso $i > j$
Como $i > j$
Logo $(\exists k) [j+k=i]$ segue tal
Logo $a^{j+k} = a^i$
Logo $a^j \cdot a^k = a^i$
Logo $a^k = e$ pelo Res!
Temor $k \leq m$, pois $k < j$ e $j \leq m$
Como Contradição pela def de $o(a)=m$
caso $j > i$
similar
caso $i = j$
imediato ✓

nenhuma das duas está nos teus dados!

E por que r serve?

Seja q, r tal que $m = qm + r$
esqueceu algo essencial!!!

Nenhum porto final?!

(Nada "compila" assim..)

Só isso mesmo.

(24) C

Seja G grupo e $g \in G$.

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} (\exists g) [x = g y g^{-1}] \\ x = g y^m g^{-1} \quad ?? \\ x = g g^{-1} y^m g g^{-1} \quad . \\ = e y^m e \\ = y^m \end{aligned}$$

C2. Ache a classe de conjugação do e , que denotamos por $[e]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$.

RESPOSTA.

$$[e] = ??$$

$$x = g e g^{-1}$$

$$\begin{aligned} x &= g e g^{-1} \\ &= g g^{-1} e g g^{-1} \quad [\text{escolha } g] \\ &= e e e \\ &= e. \end{aligned}$$

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo S_3 .

Dê um palpite “de coração” sobre quais membros de um grupo acabam sendo cômjugues.

RESPOSTA.

$$\begin{array}{c} (12) \quad (132) \\ (123) \quad (23) \\ (14) \\ (13) \end{array} \quad \bigg| \quad (123) \text{ e } (132)$$

não dá pra entender.

Não houve nenhuma palavra em português.

Só rascunhos com símbolos e continhas.

(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1.** Seja G grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: G é comutativo.

(24) **G2.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) **G3.** Sejam G grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem *exatamente* n potências distintas de a .

RESOLUÇÃO DE G2.

HK
 $(\forall h \in H, k \in K) [hk \in HK]$
 $(\forall h \in H, k \in K) [kh \in KH]$ } ??

($\Rightarrow$): Suponha $HK = KH$

-- HK habitada
Temos $e \in H$ e $e \in K$ [H, K subgrupos]
Sabemos $e * e = e$
Logo, $e \in HK$. ✓

-- HK $ab^{-1} \in HK$
Seja xh e $yk \in HK$ não é assim que solicita membros arbitrários.
Temos $(yk)^{-1} \in HK$ [H, K -subgrupos] e o que isso tem a ver?
Assim $(xh)(yk)^{-1} \in HK$ [HK -opfechoes]

X

($\Leftarrow$) $HK = KH \iff HK \subseteq KH$
 $\& KH \subseteq HK$

Suponha $HK \leq G$
Seja $ab \in HK$ X
Logo $(ab)^{-1} \in HK$ [HK subgr.

$ab^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
 $= b^{-1}a^{-1}$??
 $= (ba)^{-1}$ [$(ba)^{-1} \in HK$]
 $= ba$ X

Portanto $ab = ba$

X

Só isso mesmo.

(24) C

Seja G grupo e $g \in G$.

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

$$(\forall a \in G) [a \approx b] \Rightarrow (\forall n: \text{nat}) [a^n \approx b^n]$$

seja $a \in G$ t.q. $a \approx b$.

Seja $n: \text{nat}$.

$$\begin{aligned} \text{Calc: } a^n &= a \cdot a^{n-1} \\ &= g b g^{-1} a^{n-1} \\ &= \end{aligned}$$

C2. Ache a classe de conjugação do e , que denotamos por $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$.

RESPOSTA.

quem se importa com isso?

Note que $(\forall g) [g e g^{-1} = e]$.

Então $[e]_{\approx} = \{e\}$.

$\subseteq$

$\supseteq$

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo S_3 .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= (\varphi - \varphi^{-1}) \\ \sigma_{\psi} &= (\psi - \psi^{-1}) \\ \sigma_{\psi^2} &= (\psi^2 - \psi^{-2}) \end{aligned}$$

os membros conjugues são os que são potências deles mesmos.

$$\text{Ex: } g \approx g^2$$

isso não faz sentido pois $(\approx)$ é uma rel binária.

(24) G

Escolha um dos G1, G2, G3.

(12) G1. Seja G grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: G é comutativo.

(24) G2. Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) G3. Sejam G grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem *exatamente* n potências distintas de a .

RESOLUÇÃO DE G3.

no máximo n potências: $-- (\forall i: \text{int}) (\exists 0 \leq j < n) [a^i = a^j]$
Seja $i: \text{int}$
divida i por n para obter $i = qn + r$ $t \cdot q$
 $r \leq 0 < n$ [div. euclidiana]
Calc: $a^i = a^{qn+r} = a^{nq} \cdot a^r = (a^n)^q \cdot a^r = e^q \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$
Escolho r .
no mínimo n potências: $-- (\forall i, j) [a^i = a^j \implies i = j]$
Sejam $0 \leq i, j < n$ $t \cdot q$ $a^i = a^j$

$$\text{logo } a^i \cdot a^{-j} = a^j \cdot a^{-j}$$

$$\text{logo } a^{i-j} = a^{j-j}$$

$$\text{logo } a^{i-j} = a^0$$

$$\text{logo } a^{i-j} = e$$

Como $i, j < n$ e $i, j \geq 0$, então $i - j < n$.

Como $a^{i-j} = e$ e $i - j < n$, então $i - j = 0$

$$\text{logo } i = j.$$

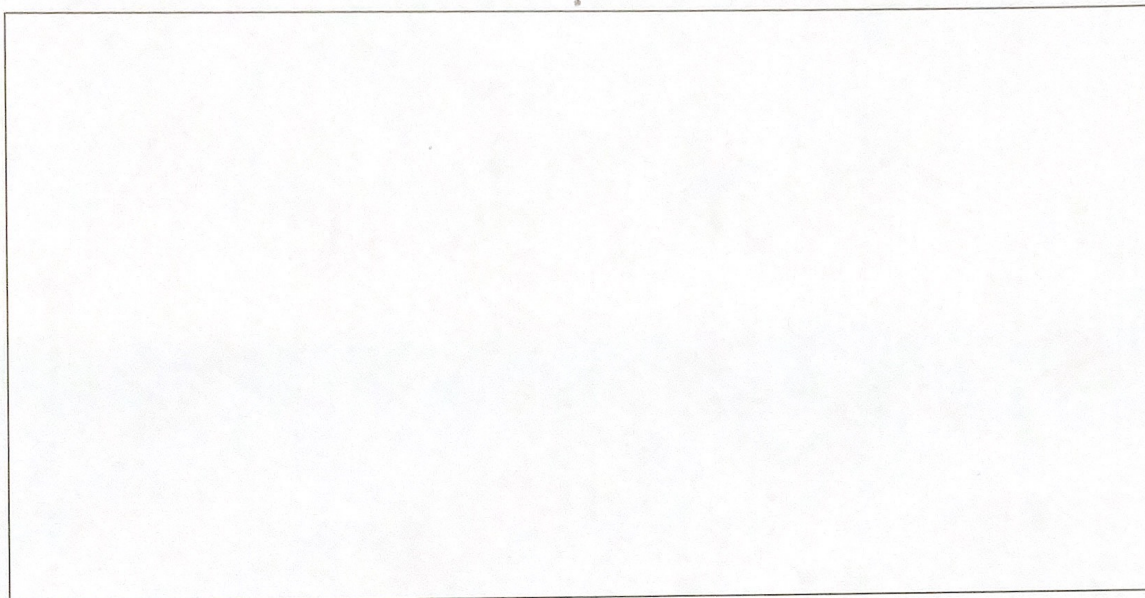
tens essa ($\implies$) nos
teus dados para
inferir isso?
Só isso mesmo.

(24) C

Seja G grupo e $g \in G$.

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.



C2. Ache a classe de conjugação do e , que denotamos por $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$.

RESPOSTA.

Seja $x \in [e]_{\approx}$ e $g \in G$

$$\text{Calc: } x = (g e g^{-1})$$

$$x = g g^{-1}$$

$$= e$$

Logo $[e]_{\approx} = \{e\}$ Não. Demonstrou apenas a $(\subseteq)$.

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo S_3 .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

$$\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$\{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$$

$$\{()\}$$

(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1**. Seja G grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: G é comutativo.

(24) **G2**. Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) **G3**. Sejam G grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem *exatamente* n potências distintas de a .

RESOLUÇÃO DE G2.

$(\Rightarrow)$. Temos $HK = KH$

id-fechado:

como $H, K \leq G$

logo $e \in H$ & $e \in K$.

logo $e \in HK$

logo $e \in HK$. ✓

Inv-fechado / *escolhas ruins de nomes!*

Sejam $x \in H$ & $y \in K$. -- AWO: $(xy)^{-1} \in HK$

logo $x^{-1}, y^{-1} \in HK$

logo $x^{-1}e, y^{-1}e \in HK$. } X

op-fechado

Sejam $x, x' \in H$ & $y, y' \in K$ *ficou bugado o texto*

Se $xx' \in H$ logo pertence a HK, pois membros de $H \in HK$?? X

X Se $yy' \in K$ logo pertence a HK, "

"K" " " X

Logo $xy \in HK$

□

Só isso mesmo.

(24) C

Seja G grupo e $g \in G$.

C1. Demonstre que a g -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

~~ALVO: $(\forall a \in G)[g \sim a \Rightarrow (\forall m \in \mathbb{N})[g \sim a^m]]$ $(\forall x, y \in G)[\]$~~
~~Seja $a \in G$ t.q. $g \sim a$~~
~~Por indução!~~
~~BASE!~~
~~ALVO: $g \sim a^1$~~
~~ALVO: $(\forall x, y \in G)[x = \sigma_g y \Rightarrow (\forall m \in \mathbb{N})[x = \sigma_g y^m]]$~~
~~Sejam $x, y \in G$ t.q. $x = \sigma_g y$~~
~~Por indução!~~
ALVO: $(\forall x, y \in G)[x = \sigma_g y \Rightarrow (\forall m \in \mathbb{N})[x^m = \sigma_g y^m]]$
~~~~~  
Type error

C2. Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \sim e\}$ .

RESPOSTA.

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.



(24) G

Escolha um dos G1, G2, G3.

(12) G1. Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) G2. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) G3. Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem exatamente  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE G2.

Parte ( $\Rightarrow$ ):

Suponha  $HK = KH$ . ✓

Parte  $HK$  id-fechado:

Tomar que  $e \in H$  e  $e \in K$ .  $[H, K \leq G]$ .

Logo,  $e \cdot e \in HK$ . ✓

Logo,  $e \in HK$ . ✓

Parte  $HK$  inv-fechado:

Sejam  $h \in H, k \in K$ . ✓

Logo,  $h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$ . ✓

Logo,  $k^{-1}h^{-1} \in KH$ . ✓

Logo,  $k^{-1}h^{-1} \in HK$ . ✓

Logo,  $(hk)^{-1} \in HK$ . ✓

Parte op-fechado:

Sejam  $h, h' \in H$  e  $k, k' \in K$ .

:

Parte ( $\Leftarrow$ ):

Suponha  $HK \leq G$ .

Parte  $HK \subseteq KH$ :

Sejam  $h \in H$  e  $k \in K$ . Logo  $hk \in HK$

Logo,  $(hk)^{-1} \in HK$ . -- memb. arb de  $HK$

Logo,  $k^{-1}h^{-1} \in HK$

Logo,  $k^{-1}h^{-1} \in KH$ .  $[H, K \leq G]$ . ✓

Parte  $KH \subseteq HK$ :

Sejam  $k \in K$  e  $h \in H$ . ALVO:  $kh \in HK$

Tomar que  $k, h \in HK$   $\begin{cases} k=ek \\ h=he \end{cases}$

Logo,  $kh \in HK$   $[HK \leq G]$  ✓

Só isso mesmo.



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

C1. Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

$f a = g a g^{-1} \iff f a^n = g a^n g^{-1}$  (respeita)  $(\forall n: \mathbb{N})$

$(\Rightarrow)$  ~~Ver~~  
Seja  $a \in G$   
~~Seja  $a \in G$~~   
Por indução:  
~~base~~  $(a^0)$   $\times$   
 $f a^0 = g a^0 g^{-1}$   
 $= g e g^{-1}$   
 $= e$   
 $(f a)^0 = ?$   
Passo indutivo  
 $f a^n = g a^n g^{-1}$   
 $= g (a^{n-1}) g^{-1} g a g^{-1}$   
 $= g a^{n-1} a g^{-1}$   
 $= g a^n g^{-1}$

$(\Leftarrow)$  ~~Ver~~  
Seja  $a \in G$ .  
temos que  $f a = g a g^{-1}$ , pela  
escolha de  $n=1$ .  
calculamos  
 $a = (a \cdot a)$   
 $= e \cdot a$   
 $= a$   
logo  $a = g a g^{-1}$   $??$

C2. Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .

RESPOSTA.

Seja  $x \in [e]_{\sim}$ .  
logo  $x = g \cdot e \cdot g^{-1}$   
logo  $x = g \cdot g^{-1}$   
logo  $x = e$ , assim  $[e]_{\sim} = \{e\}$

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

$\varphi = (12)$   $e = ()$  são conjugues  
 $\psi = (123)$   $(12)$  e  $(123)$

$(1)$   $(12)$   $(123)$

não dá pra entender.



(24) G

Escolha um dos G1, G2, G3.

(12) G1. Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) G2. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) G3. Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem exatamente  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE G3.

$$a^{n'-n} = a$$

--  $(\forall n') (\exists 0 < x \leq n) [a^{n'} = a^x]$

Seja  $n'$  tal que  $n' > n$ . -- não era  $(\forall n')$ ?

Como  $n$  é natural,  $(n' - n) > 0$ .

~~$a^{n'} = a^{(n'-n)} (a^n)$~~

$a^n = a^{(n'-n)} \cdot e^{(n'-n)}$

$a^n = (a^{n'-n})$  escolha  $a^{n'-n}$ .

X

---

--  $(\forall x, y) [0 < x, y \leq n \ \& \ x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y]$

Por contradição

Suponha que  $x = y$

X

Só isso mesmo.



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

C1. Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

$$(\forall a \in G)(\forall n \in \mathbb{N})[(\sigma_g \circ (-^n))a = ((-^n) \circ \sigma_g)a] \quad \checkmark$$

Sejam  $a \in G, n \in \mathbb{N}$ .

Calc:

$$(\sigma_g \circ (-^n))a^n$$

$$= \sigma_g(a^n)$$

$$= ga^n g^{-1}$$

C2. Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ . Justifique!

RESPOSTA.

$$[e] = \{e\}.$$

Suponha que a classe contenha outro arbitrário membro  $a \in G$ .

$$\text{Logo } e = gag^{-1}$$

Isso implica que  $g$  é inverso de  $ag^{-1}$  ou  $g^{-1}$  é inverso de  $ga$ , o que quebraria a lei de unicidade dos inversos diretos, pois  $g^{-1}$  é inverso- $d$  de  $g$ . X -- muito handwaving  
bizarro! Separe em (1) & (2), calcule, e pronto! (faltou a (3)).

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

$$[()] = \{()\} \quad \checkmark$$

$$[\varphi] = \{$$

↑  
nem  $\varphi$ ?



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

C1. Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO. mesmo se fosse correto, serviria pra nada escrever isso

A conjugação de um elemento  $x$  por  $g$  em um grupo  $G$  é definida como  $g \times g^{-1}$ . Se tivermos  $x^n$  (a potência de  $x$ ), aplicando a conjugação obtemos:  $g \times x^n \times g^{-1} = (g \times g^{-1})^n$

Isso mostra que a conjugação preserva potências naturais.

↳ handwaving não mostra nada.

Escreva as "linhas de código" para demonstrar mesmo.

C2. Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .

RESPOSTA.

( $\approx$ )  
Pela definição de classe de conjugação, temos:  $[e] = \{x \in G \mid x = g e g^{-1} \text{ para algum } g \in G\}$ .  
Como  $e$  é o elemento neutro, qualquer conjugação de  $e$  resulta em  $e$  novamente.  
Ou seja:  $[e] = \{e\}$ .

↳ alegado, mas nem um pouco demonstrado.

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo côjugues.

RESPOSTA.

- $e$  (identidade)
- $(12), (13), (23)$  (transposições)
- $(123), (132)$  (ciclos de três elementos)

Palpite: Dentro de um grupo, dois elementos também são conjugados se quizermos pensar alguma simetria estrutural, como ter a mesma tipo de ciclo que desempenham papéis análogos na estrutura do grupo.

↑  
not bad!



(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1.** Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) **G2.** Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) **G3.** Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem *exatamente*  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE G2. *quem é? Nenhum desses está no escopo.*

Se  $\boxed{h_1 k_1, h_2 k_2} \in HK$ , então queremos que  $(h_1 k_1)(h_2 k_2) \in HK$ . Como  $HK = KH$ , podemos escrever como  $h_1(k_1 h_2)k_2$ , e pela fechamento em  $H$  e  $K$ , a produto continua *X por que?* XX  
Como  $h \in H$  e  $k \in K$ , então  $h = e \in HK$ . ✓  
Para  $hk \in HK$ , sua inversa  $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$  também pertence a  $HK$ , pois  $HK = KH$ . ✓

Só isso mesmo.



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

C1. Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja  $m \in \mathbb{N}$~~   
 ~~$g \in [g]$~~   
como  $g \in [g]$ , ~~haja~~ ~~mostramos~~ ~~que~~  $g^m \in [g]$ .  
~~escolha~~  $g^m$   
logo,  $g = g^m g^{m^{-1}}$   
 $= g^m (g^m)^{-1} g$   
 $= e g$   
 $= g$   
logo  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

-- olha  ~~$(g^m)^{-1} = (g^{-1})^m$~~   
 $g \in [g] \Rightarrow g^m \in [g]$

X bugou.

C2. Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .

RESPOSTA.

Seja  ~~$g \in G$~~   ~~$x \in G$~~   ~~$x \approx e$~~   $g \approx g \approx e$   
logo, ~~achamos~~  $e$  (qual é teu duo?)  
calc:  
 $e = e g e^{-1}$   
 $= g e^{-1}$   
 $= g$  ... ?

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

$\{1, 2\}$   $\{1, 2, 3\}$   $\{1, 2, 3\}$  ??

X



(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1**. Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) **G2**. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) **G3**. Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem *exatamente*  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE **G2**.

$\Rightarrow$ :

Suponha  $HK = KH$

Prova  $HK$  subgrupo

Seja  $k \in K$  - pra quê?

Como  $H \leq G$ , então  $e \in H$

Logo, escolhendo  $e \in H$ ??

Logo  $e \in KH$

Logo  $e \in HK$

Portanto  $HK$  op- fechado

Seja  $k, k' \in K$ .

~~$k k' \in K$~~   $\times$

Como  $K$  op- fechado, então se  $y \in K$   $k k' = y$  onde  $y \in K$

~~$k k' \in K$~~  Similiter ( $\times$ )

~~$k k' \in K$~~

Portanto  $HK$  inv- fechado  $\times$

Como  $K$  op- fechado, se  $k^{-1} \in K$   $k^{-1} k = e$ , onde  $k^{-1} \in K$

~~$k k^{-1} = e$~~  Similiter ( $\times$ )

??

ou  $(\exists x) [x \in \{HK \mid K \in K\}]$

$\Leftarrow$ :

Suponha  $HK \leq G$

Seja  $h \in HK$

então  $h \in KH$ ?

Logo  $h \in KH$

Logo  $h \in HK$

??  $\times$

[ $HK$  subgr]   
 [ $K$  id- fechado]

Só isso mesmo.



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

**C1.** Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

**C2.** Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .

RESPOSTA.

**C3.** Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite “de coração” sobre quais membros de um grupo acabam sendo côjugues.

RESPOSTA.



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

**C1.** Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

**C2.** Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .

RESPOSTA.

**C3.** Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite “de coração” sobre quais membros de um grupo acabam sendo côjugues.

RESPOSTA.



(24) C

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

C1. Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam  $a, b \in G$  conjugados. — serviram algo esses  $a, b$ ?  
Basta que  $(gxg^{-1})^n = gx^n g^{-1}$ . — quem é  $x$ ?  
Por indução no  $n$ .  
Base.  
 $(gxg^{-1})^0 = e$   $gx^0 g^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e$ . ✓  
Passo indutivo.  
Seja  $k \in \mathbb{N}$  t.q.  $(gxg^{-1})^k = gx^k g^{-1}$ .  
Cole:  $(gxg^{-1})^{k+1} = (gxg^{-1})^k \cdot (gxg^{-1}) \stackrel{H}{=} (gx^k g^{-1})(gxg^{-1}) = gx^k (\bar{g}^{-1}g) x \bar{g}^{-1}$   
 $= gx^k e x \bar{g}^{-1} = gx^k x \bar{g}^{-1} = gx^{k+1} \bar{g}^{-1}$ .  
Onde usei da esquerda para a direita  $(\bar{\phantom{x}}^{-1})$ , H1, assoc., id,  $(\bar{\phantom{x}}^{-1})$ .

C2. Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .

RESPOSTA.

Pela  $(\approx)$ -reflexividade temos que  $e \approx e$ , ou seja,  $e \in [e]$ .  
Precisamos verificar que  $[e] = \{e\}$ .  
Seja  $x \in G$  t.q.  $x \approx e$ .  
Logo, seja  $g \in G$  t.q.  $x = geg^{-1} = g\bar{g}^{-1} = e$ . ✓

C3. Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .

Dê um palpite “de coração” sobre quais membros de um grupo acabam sendo conjugues.

RESPOSTA.

$[(\ )] = (\ )$ ;  $[\varphi] = \varphi$ ;  $[\psi^2] = \psi^2 \dots$   
Logo, todos os membros singleton são conjugues.  
✗



(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1.** Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) **G2.** Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) **G3.** Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem *exatamente*  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE G2.

( $\Rightarrow$ ):

Parte id-fechado:

Como  $e \in H, K$ , logo  $e \in HK$ , pois  $e = e \cdot e$ . ✓

Parte op/inv-fechado:

Sejam  $h_1, h_2 \in H$  e  $k_1, k_2 \in K$  t.g.  $h_1 k_1, h_2 k_2 \in HK$ . X - NÃO!

Basta que  $(h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1} \in HK$ . ✓

Calc.:  $(h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1} = (h_1 k_1)(k_2^{-1} h_2^{-1}) = h_1(k_1 k_2^{-1} h_2^{-1})^{(*)} = h_1 h_3 k_3 \in HK$ . ✓

(\*) : Sejam  $h_3 \in H$  e  $k_3 \in K$  t.g.  $h_3 k_3 = k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$ , pela hipótese.

( $\Leftarrow$ ):

Parte ( $\subseteq$ ):

Seja  $x \in HK$ ,

logo  $x^{-1} \in HK$ . [ $HK \leq G$ ].

logo sejam  $h \in H, k \in K$  t.g.  $x^{-1} = hk$ .

logo  $x = (x^{-1})^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$ .  
inv-inv ✓

Parte ( $\supseteq$ ):

Seja  $x \in KH$ , logo  $x = kh$ .

Como  $h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$  [ $HK \leq G$ ]

logo  $(h^{-1}k^{-1}) \in HK$ , e ainda

mais  $(h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$ . [ $HK \leq G$ ]

logo,  $x = kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$ .  
inv-inv ✓

com esse '.', a única maneira dessa frase compilar é se o teu «Como» é do verbo tomar.

Só isso mesmo.







(24) **G**

Escolha um dos **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1.** Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) **G2.** Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) **G3.** Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem exatamente  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE G1.

Seja  $a, b \in G$  (Como  $G$  é grupo tem OP-fechada)  
logo  $ab \in G$  ???  
~~Como~~ Calc: ??  
 $ab = ((ab)^{-1})^{-1}$  ??  
 $= (a^{-1}b^{-1})^{-1}$  (distributiva) ?  
 $= (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$  (inv) (Hip) (Para o próximo passo distri) ?  
 $= ba$  ?

Só isso mesmo.



(24) C

$$\sigma_g a = g a g^{-1}$$

$$\sigma_g = (g, g^{-1})$$

$$a^m \Rightarrow$$

Seja  $G$  grupo e  $g \in G$ .

C1. Demonstre que a  $g$ -conjugação respeita as potências naturais.  
DEMONSTRAÇÃO.

Seja  $a \in G$  +  $g$ .

C2. <sup>Justif</sup> Ache a classe de conjugação do  $e$ , que denotamos por  $[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid x \approx e\}$ .  
RESPOSTA.

C3. <sup>1 Juu</sup> Liste todas as classes de conjugação do grupo  $S_3$ .  
Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo côjugues.  
RESPOSTA.



(24) G

Escolha um dos G1, G2, G3.

(12) G1. Seja  $G$  grupo tal que para quaisquer  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ . Demonstre ou refute:  $G$  é comutativo.

(24) G2. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Demonstre:  $HK = KH \iff HK \leq G$ .

(21) G3. Sejam  $G$  grupo,  $a \in G$ , tais que  $o(a) = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo existem *exatamente*  $n$  potências distintas de  $a$ .

RESOLUÇÃO DE G1.

Sejam  $a, b \in G$ .

Calc:  $ab(ab)^{-1}$ .

$$ab(ab)^{-1}$$

$$= e \quad [(*1) - \text{inv} R \ ab]$$

$$ba(ab)^{-1}$$

$$= ba(a^{-1}b^{-1}) \quad [(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}]$$

$$= (b(aa^{-1}))b^{-1} = ((ba)a^{-1})b^{-1} \quad \begin{array}{l} (*1) - \text{assoc } ba \ a^{-1}b^{-1}; \\ (*1) - \text{assoc } b^{-1}a^{-1}a \end{array}$$

$$= (be)b^{-1} \quad [\text{inv} R \ a]$$

$$= bb^{-1} \quad [\text{id} R \ b]$$

$$= e \quad [\text{inv} R \ b]$$

Como  $ab(ab)^{-1} = e$  &  $ba(ab)^{-1} = e$ , logo  $ab(ab)^{-1} = ba(ab)^{-1}$ .

logo  $ab = ba$ .  $[(*1) - \text{cancel} \ ab \ ab^{-1} \ ba]$



Só isso mesmo.



## LEMMATA (ATÉ 2)

Com a.R.  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})L(3, x)La =$

Sejam  $a, b, c : 0 \neq 0$ .  $ac = bc$ .

hence  $(aC)C^{-1} = (bC)C^{-1} \cdot [(-C^{-1})]$

haja  $(a(c c^{-1}) = b(c c^{-1}), [(1)_{\text{omac}} a c c^{-1}, (1)_{\text{omac}} b c c^{-1}]$

Logo  $a e = b e$ .  $[im \sigma A c; im \sigma R c]$

hogo  $a = b$ .  $[idR a ; idR b]$

