**FMC2, 2025.1**
(Turma T12 do Thanos)

**Prova IEA.1**
(points: 48; bonus: $0^\flat$; time: 42')

---

**Nome:** Θάνος

---

*2025-05-23*

## Regras:

**I.** Não vires esta página antes do começo da prova.

**II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.

**III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

**IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

**V.** $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

**VI.** Responda dentro das caixas indicadas.

**VII.** Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

**VIII.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

**IX.** Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

*Boas provas!*

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(24) **C**

Seja $G$ grupo e $g \in G$.

**C1.** Demonstre que a $g$-conjugação respeita as potências naturais.
DEMONSTRAÇÃO.

-- ALVO: $(\forall n : \mathbb{N}) \underbrace{[(g\text{-}g^{-1}) \circ ({}^\wedge n) = ({}^\wedge n) \circ (g\text{-}g^{-1})]}_{(\forall a)[\, g a^n g^{-1} = (g a g^{-1})^n \,]}$

Seja $a \in G$.
Por indução.
BASE:
Calc: $(gag^{-1})^0 = e = geg^{-1} = ga^0g^{-1}$
PASSO INDUTIVO:
Calc: $(gag^{-1})^{Sn} = (gag^{-1})^n (gag^{-1})$
$= (ga^n g^{-1})(gag^{-1})$ [H.I]
$= g a^n a g^{-1}$
$= g a^{Sn} g^{-1}$

**C2.** Ache—e justifique!—a classe de conjugação do $e$, que denotamos por

$$[e]_{\approx} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in G \mid x \approx e \,\}.$$

RESPOSTA.

Vou demonstrar: $[e] = \{e\}$
$(\subseteq)$: $(\forall x)[x \approx e \Rightarrow x = e]$
Seja $x \approx e$.
Logo seja $g$ t.q. $x = geg^{-1}$.
Logo $x = e$.

$(\supseteq)$: $e \approx e$
Como $e = eee^{-1}$, logo $e \approx e$.

**C3.** Liste—sem justificar—todas as classes de conjugação do grupo $S_3$.
Dê um palpite "de coração" sobre quais membros de um grupo acabam sendo cônjugues.
RESPOSTA.

$\{e\}$, $\{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$, $\{(1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$
Os conjugados são indistingüíveis grupoteoricamente.
(Possuem as mesmas propriedades grupoteóricas.

(24) **G** *Escolha um dos* **G1**, **G2**, **G3**.

(12) **G1.** Seja $G$ grupo tal que para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Demonstre ou refute: $G$ é comutativo.

(24) **G2.** Sejam $H, K$ subgrupos de um grupo $G$. Demonstre: $HK = KH \iff HK \leq G$.

(21) **G3.** Sejam $G$ grupo, $a \in G$, tais que $o(a) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo existem *exatamente* $n$ potências distintas de $a$.

RESOLUÇÃO DE G2 .

($\Rightarrow$): Basta mostrar que HK é habitado e (/)-fechado.

HK habitado: Temos $e = ee \in HK$.

HK (/)-fechado: Sejam $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$.

-- Assim, $h_1k_1$, $h_2k_2$ são membros arbitrários de HK

Calculamos:

$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1}$

$= (h_1k_1)(k_2^{-1}h_2^{-1})$

$= k_1'(h_1'k_2^{-1})h_2^{-1}$

$= k_1'(k_3h_3)h_2^{-1}$ [$HK = KH$]

$= (k_1'k_3)(h_3h_2^{-1})$

$\in KH$

($\Leftarrow$): Sejam $h \in H$, $k \in K$.

Logo $h^{-1} \in H$, $k^{-1} \in K$ [$H, K \leq G$]

($\subseteq$): -- $hk \in HK$ arbitrário

Como $hk \in HK \leq G$,

logo $(hk)^{-1} \in HK$.

Mas $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$.

($\supseteq$): -- $kh \in KH$ arbitrário

Calculamos:

$kh = ((kh)^{-1})^{-1} = (h^{-1}k^{-1})^{-1}$

$\in HK$ [$h^{-1}k^{-1} \in HK \leq G$]

Só isso mesmo.

LEMMATA (ATÉ 2)

Rascunho