FMC2, 2025.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova CFR1.2
(points: 52; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος

2025-05-23

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Escolha até 2 dos $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{J}$.**

X. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Definição. Seja $\mathscr{A}$ uma família de conjuntos. Chamamos a $\mathscr{A}$ de $\subseteq$-chain sse todos os seus membros são $(\subseteq)$-compráveis, ou seja, sse:

$$\text{para todo } A, B \in \mathscr{A}, \text{ temos } A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq A.$$

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(28) **L** *Escolhe* ***exatamente um*** *dos* ***L1***, ***L2***.

(21) **L1.** Seja $\mathscr{C}$ uma $\subseteq$-chain, e seja $T = \bigcup \mathscr{C}$. Demonstre: $\mathscr{C} \cup \{T\}$ é uma chain.

(28) **L2.** Seja $(A_n)_n$ uma seqüência de conjuntos. Definimos os conjuntos

$$A_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j \qquad A^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j.$$

Demonstre que $A_* \subseteq A^*$.

RESOLUÇÃO DA L2 .

Seja $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$.

Logo seja $u \geq 0$ t.q. $\bigcap_{j=u}^{\infty} A_j$, ou seja: $(\forall j \geq u)[x \in A_j]$.

Seja $r \geq 0$. -- ALVO. $x \in \bigcup_{j=r}^{\infty} A_j$

Seja $m = \max r\ u$.

Como $m \geq r$, basta demonstrar $x \in A_m$.

Como $m \geq u$, $x \in A_m$. [pela escolha de u]

(24) **I**

Investiga a $(\leq_c)$-monotonicidade das $(\times)$ e $(\to)$.

INVESTIGAÇÃO.

$(\times)$ é $(\leq_c)$-monotona nos dois argumentos.

$A \leq_c A' \vdash A \times B \leq_c A' \times B$

Seja $f : A \rightarrowtail A'$. Considere a $f \times \mathrm{id} : A \times B \rightarrowtail A' \times B$.

$B \leq_c B' \vdash A \times B \leq_c A \times B'$: Similar

$(\to)$ é monotona no segundo.

$B \leq_c B' \vdash (A \to B) \leq (A \to B')$

Seja $g : B \rightarrowtail B'$.

Considere a $(g\circ) : (A \to B) \rightarrowtail (A \to B')$.

$(\to)$ é antitona no primeiro

$A \leq_c A' \vdash (A \to B) \geq_c A' \to B$

Seja $f : A \rightarrowtail A'$.

Considere a $(\circ f) : (A' \to B) \rightarrowtail (A \to B)$.

(24) **J**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f:

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes:

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

J1. Demonstração de $f[F] \subseteq F$.

Seja $x_0 \in F$.
-- $f\,x_0 \in f[F]$ arbitrário
Calc: $f\,(f\,x_0) = f\,x_0$ [x_0 fixpoint]
Logo $f\,x_0 \in F$.

J2. Demonstração de $f[F] \supseteq F$.

Seja $x_0 \in F$, ou seja, x_0 fixpoint de f.
Logo $x_0 = f\,x_0$
$\in f[F]$. [$x_0 \in F$]

J3. Demonstração de $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Extra hipotese: f injetiva
Seja $t \in f^{-1}[F]$.
Logo $f\,t \in F$, ou seja, $f\,(f\,t) = f\,t$.
Logo $f\,t = t$. [f inj.]

J4. Demonstração de $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $x_0 \in F$.
Logo $x_0 \overset{f}{\mapsto} x_0 \in F$.
Logo $x_0 \in f^{-1}[F]$

Só isso mesmo.

Rascunho