

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

- (6) **A3.** Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre **exatamente** uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f \ n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g \ (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h \ (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{array}$$

DEFINIÇÕES.

pontinhos

$m \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. (4 \cdot x)$
 $h \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. (x \cdot x)$
 $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. \text{succ } x$
 $p \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x, y. x + 2 \cdot y$

Vem definir funções iguais

$\sim f$ e g .

$f \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. \theta h m$

$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. x$

λ
 $\leftarrow$ lambda

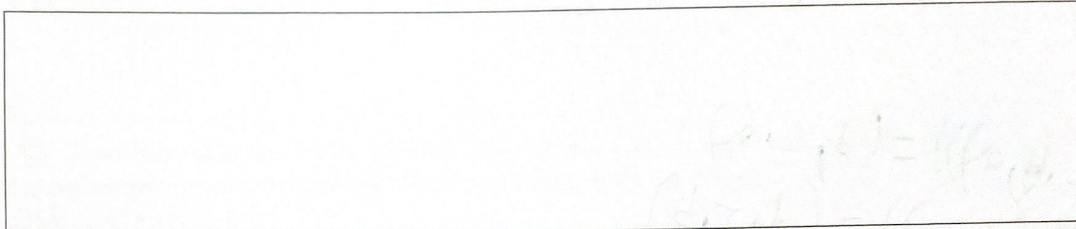
(16) **J**

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

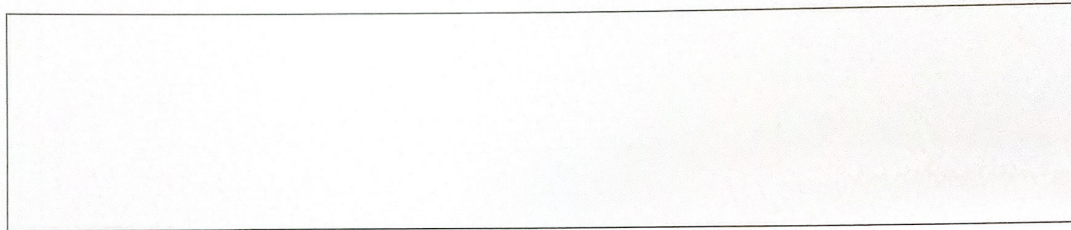
Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .



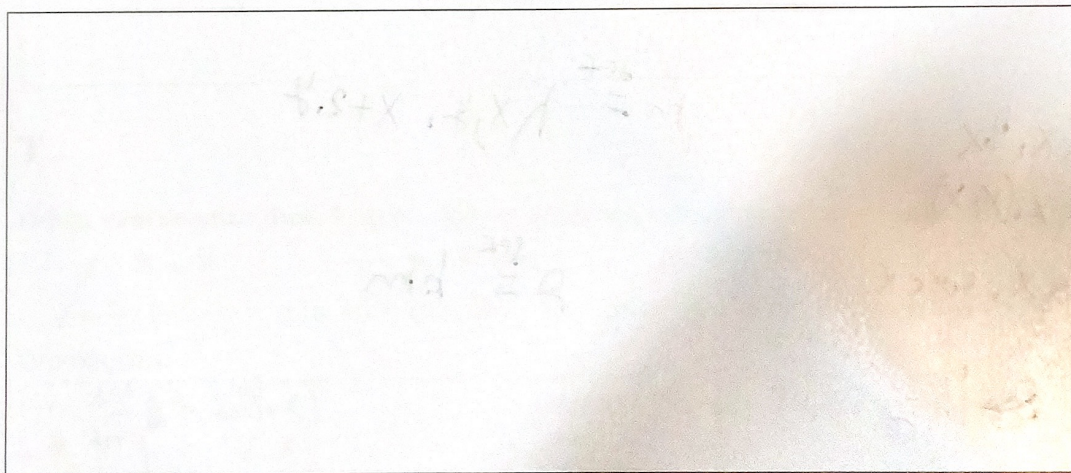
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .



(16) **D**

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.



Só isso mesmo.

(16) A

escrita ruim: o "pé" de u $\rightarrow$ pé de u e obrigatório aqui.

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

$\varepsilon: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow \delta \times \alpha + \delta \times \beta$ $F(u, r) = \text{case } v \text{ of } \begin{cases} l.a = l.(u, a) \\ r.b = r.(u, b) \end{cases}$	$G: \delta \times \alpha + \delta \times \beta \rightarrow \delta \times (\alpha + \beta)$ $G w = \text{case } w \text{ of } \begin{cases} l.a = (a.l, l.a.r) \\ r.b = (b.l, r.b.r) \end{cases}$
---	---

nomes ruins!

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$F: ((1+1) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \times \alpha)$	$G: (\alpha \times \alpha) \rightarrow (1+1) \rightarrow \alpha$
--	--

obrigatórias

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre **exatamente uma** das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A1

Parte $F \circ G = \text{id}$ Seja $w: \delta \times \alpha + \delta \times \beta$ Caso $l.v$: match'ou o w? $(F \circ G)(w) = F(G(w))$ [G.1] yikes! $= F(\text{case } l.v \text{ of } \begin{cases} l.a = (a.l, l.a.r) \\ r.b = (b.l, r.b.r) \end{cases})$ [G.1] $= F(w.l, l.w.r)$ [G.1] $= \text{case } l.w.r \text{ of } \begin{cases} l.a = l.(w.l, a) \\ r.b = r.(w.l, b) \end{cases}$ [F.1] $= l.(w.l, w.r)$ [G.1] $= l.w$ [G.1] $= \text{id } l.w$ [G.1]	Caso $r.w$: Similar Parte $G \circ F = \text{id}$: Seja $(u, r): \delta \times (\alpha + \beta)$ Caso $l.v$: $(u, l.v)$ $G \circ F l.w = G(F(l.w))$ [F.1] $= G(\text{case } l.v \text{ of } \begin{cases} l.a = l.(u, a) \\ r.b = r.(u, b) \end{cases})$ [F.1] $= G(l.(u, r))$ [F.1] $= \text{case } l.(u, r) \text{ of } \begin{cases} l.a = (a.l, l.a.r) \\ r.b = (b.l, r.b.r) \end{cases}$ [G.1] $= l.w$
--	--

obrig.

match'ou já, match'ando de novo?

(16) T

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tático).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$F = \text{succ} \circ \text{square} \circ \text{double} \circ \text{double}$ $g = \text{square} \circ (+) \circ \langle \text{id}, \text{double} \rangle$ $(\text{id} \times \text{double})$	Lemmas: $\text{double}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{double} = (+) \circ \text{diag}$ $\text{square}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{square} = (.) \circ \text{diag}$	$\text{diag}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\text{diag} = \langle \text{id}, \text{id} \rangle$ $\langle, \rangle$ primitivo
---	---	--

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)$
RESOLUÇÃO.

$$\begin{array}{l} F(\delta \times (\alpha + \beta)) = (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta) \\ F(l, a) = l \cdot (d, a) \\ F(r, b) = r \cdot (d, b) \end{array} \quad \begin{array}{l} G((\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)) = \delta \times (\alpha + \beta) \\ G(l, (d, a)) = (d, l \cdot a) \\ G(r, (d, b)) = (d, r \cdot b) \end{array}$$

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$$\begin{array}{l} F: 2 \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \times \alpha \\ Fh = (h(l, 1), h(r, 1)) \end{array} \quad \begin{array}{l} G: \alpha \times \alpha \rightarrow 2 \rightarrow \alpha \\ Gw = \lambda s. \text{case } s \text{ of } l.1 \rightarrow w.l \\ \quad \quad \quad r.1 \rightarrow w.r \end{array}$$

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____.

A2. $F \circ G = id_{\alpha \times \alpha}$
Seja $w: \alpha \times \alpha$.
Calc:
 $(F \circ G) w$
 $= F(G w) [w.1]$
 $= F(\lambda s. \text{case } s \text{ of } (l.1 \rightarrow w.l) (r.1 \rightarrow w.r)) [G.1]$
 $= (\lambda s. \text{case } s \text{ of } (l.1 \rightarrow w.l) (r.1 \rightarrow w.r)) l.1, (\lambda s. \text{case } s \text{ of } (l.1 \rightarrow w.l) (r.1 \rightarrow w.r)) r.1 [F.1]$
 $= (w.l, w.r) [(\rightarrow) \cdot \beta; (\rightarrow) \cdot \beta; (+) \cdot \beta; (+) \cdot \beta]$
 $= w [(\lambda) \cdot \eta] \checkmark$
 $= id w [(\leftarrow) \cdot \beta] \checkmark$

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tático).

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{array}$$

DEFINIÇÕES.

$\Delta: \alpha \rightarrow \alpha \times \alpha$ $\Delta x = \langle x, x \rangle$	$f^n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f = \text{Succ} \circ \text{square} \circ \text{double} \circ \text{double}$	$g': \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $g = \text{square} \circ (+) \circ \text{double} \circ R$
$\text{square}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{square} = (\cdot) \circ (\Delta)$	$\text{double}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{double} = (+) \circ (\Delta)$	$\text{double } R: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\text{double } R = \langle w.l, \text{double } w.r \rangle$

pontinho

(16) J

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; J3. $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

(16) D

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

escreva «existe» ou a fórmula: não misture, 'j' não é uma abreviação de «existe»

Parte ($\supseteq$): Seja $x \in \bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \}$. Logo $\exists A \in \mathcal{A}, \text{ t.q. } x \in D \cap A$. Logo $x \in D$ e $x \in A$. Como $x \in A$ e $A \in \mathcal{A}$, logo $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Logo $x \in D \cap \bigcup \mathcal{A}$.	Parte ($\subseteq$): Seja $x \in D \cap \bigcup \mathcal{A}$. Logo $x \in D$ e $\exists A \in \mathcal{A}, \text{ t.q. } x \in A$. Logo $x \in D \cap A$. Como $x \in D \cap A$ e $A \in \mathcal{A}$, então $x \in \bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \}$.
--	--

Handwritten notes in red:
- "Quem é A? (não há A no escopo.)"
- "mesmo problema"
- "Logo $x \in D$ e $x \in A$ " is crossed out with an X.

Só isso mesmo.

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

τ

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

- (6) **A3. Escolha uma** das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente uma** das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ f(n) &\stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g(n, m) &\stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h(n, m) &\stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{aligned}$$

DEFINIÇÕES.

$$\begin{aligned} f &\stackrel{\text{def}}{=} \text{succ} \circ (\cdot) \circ \text{diag} \circ \text{multfour} & g &= (\cdot) \circ \text{diag} \circ (\cdot) \circ h \\ \text{diag} : \mathbb{N} &\rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & h &: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ \text{diag}(\boxed{n}) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle n, n \rangle & h(\boxed{\omega}) &= \langle \omega_1, 2 \cdot \omega_2 \rangle \\ \text{multfour} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & & \\ \text{multfour}(\boxed{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} 4x & & \end{aligned}$$

?!

(16) **J**

Demonstre/refute **até duas** das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J1 .

Sejam $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ t.q. f sobre & g sobre. ✓
Seja $b \in C$. ✓
Logo, seja $a: A$ t.q. $g \circ f(a) = b$.
Cálculo
 $(g \circ f)(a) = b$
 $\leftarrow ??$ } (justificativas?)
cadê o cálculo?

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

(16) **D**

Sejam $D: \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A}: \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

$$\delta \times (\alpha + \beta) \xrightarrow{f} \delta \times \alpha + \delta \times \beta \quad | \quad \delta \times \alpha + \delta \times \beta \xrightarrow{g} \delta \times (\alpha + \beta)$$

$$f \langle c, l.a \rangle = l \langle c, a \rangle \quad g \langle c, l.a \rangle = \langle c, l.a \rangle$$

$$f \langle c, r.b \rangle = r \langle c, b \rangle \quad g \langle c, r.b \rangle = \langle c, r.b \rangle$$

why ASCII?!

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$$(2 \xrightarrow{f} \alpha) \xrightarrow{g} (\alpha \times \alpha) \quad | \quad \alpha \times \alpha \xrightarrow{g} (2 \xrightarrow{f} \alpha)$$

$$f \langle g \langle a \rangle \rangle = \langle g \langle a \rangle, g \langle a \rangle \rangle \quad g \langle g \langle a \rangle, g \langle b \rangle \rangle = f \langle g \langle a \rangle \rangle$$

dom f = ?

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A1

?? qual o domínio da g?

$$f(g(w)) = w$$

Caso $w \stackrel{\text{def}}{=} l \langle c, a \rangle$??

$$f(g(l \langle c, a \rangle)) = l \langle c, a \rangle$$

$$[g.1] \leftarrow f(g(l \langle c, a \rangle)) = f \langle c, l.a \rangle$$

$$[f.1] = l \langle c, a \rangle$$

Caso $w \stackrel{\text{def}}{=} r \langle c, b \rangle$

$$f(g(r \langle c, b \rangle)) = r \langle c, b \rangle$$

$$f(g(r \langle c, b \rangle)) = f \langle c, r.b \rangle \quad [g.2]$$

$$= r \langle c, b \rangle \quad [f.2]$$

parece rascunho!

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$$f = \text{succ} \circ \text{square} \circ \text{double} \cdot \text{double} \quad \checkmark$$

$$\text{square} = (\cdot) \circ \Delta$$

$$\text{double} = (+) \circ \Delta$$

$$g = \text{square} \circ (\text{outleft} (+) (\text{double} \circ \text{outright}))$$

$$\Delta a = a \times a$$

↳ Primitiva

~~outleft~~ → primitiva

$$\text{outleft} \langle a, b \rangle = a$$

~~outright~~ → primitiva

$$\text{outright} \langle a, b \rangle = b$$

(defina em termos das $\langle \dots \rangle$ e id.

injetividade $\Rightarrow (\forall a, b) [a = b \rightarrow fa = fb]$

Sobrejetividade

Não! Qualquer função satisfaz isso!

$$(\forall b)(\exists a | \{b = a\})$$

notação errada

(16) J

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

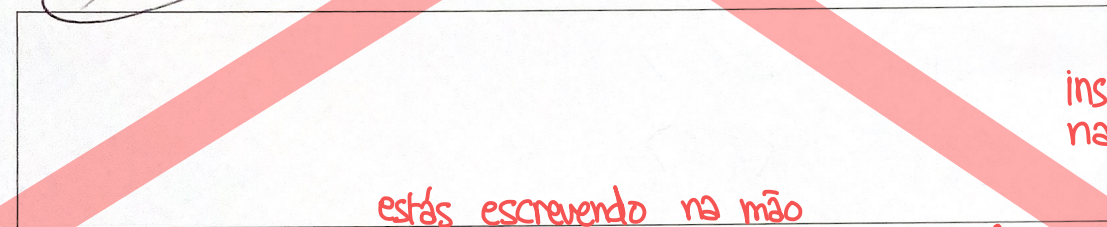
Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f$ bij $\Rightarrow f$ sobre; J3. $g \circ f$ bij $\Rightarrow g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J2



DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J3



instale unicodef na tua mão! ☺

estás escrevendo na mão

mas parece que tá se limitando em ASCII aqui...

Soltos símbolos matemáticos

isso não compila.

(16) D

Sejam $D : \text{Set}$ e $\mathcal{A} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$. Demonstre: $\bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

parece rascunho!

$$S \in \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} \Rightarrow S \in D \cap \bigcup \mathcal{A}$$

$$S \in \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} \Rightarrow S \in D \cap \bigcup \mathcal{A} \mid S \in D \cap \bigcup \mathcal{A} \rightarrow S \in \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Suponha $S \in \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$
requisito $S \in D \cap A$ e $A \in \mathcal{A}$
requisito $S \in D \cap A$ e $A \in \mathcal{A}$

left. $S \in D$ prova que $S \in D$

right. $S \in A$ e $A \in \mathcal{A}$ prova que $S \in \bigcup \mathcal{A}$

Suponha $S \in D \cap \bigcup \mathcal{A}$

$h2 = S \in \bigcup \mathcal{A}$

$h2 = S \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow \exists t \mid S \in t \text{ e } t \in \mathcal{A}$

testemunho

$S \in t$

$t \in D$ e $t \in \mathcal{A}$

Só isso mesmo.

$\downarrow$

por $h2$, right

por $h2$, left e

$h2$, left ? ?

não use "setinhas mágicas" no teu texto.
Se elas significam algo pra ti,
use só no teu rascunho.

Este texto tá muito longe de ser compilável

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

$F: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow \delta \times \alpha + \delta \times \beta$ $F \langle d, l \cdot a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} l \cdot \langle d, a \rangle$ $F \langle d, \eta \cdot b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \eta \cdot \langle d, b \rangle$	$G: \delta \times \alpha + \delta \times \beta \rightarrow \delta \times (\alpha + \beta)$ $G l \cdot \langle d, a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle d, l \cdot a \rangle$ $G \eta \cdot \langle d, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle d, \eta \cdot b \rangle$
--	--

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$F: (1 + 1 \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \times \alpha)$ $F h \stackrel{\text{def}}{=} h \cdot h$	$G: (\alpha \times \alpha) \rightarrow (1 + 1 \rightarrow \alpha)$ $G \langle l \cdot x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} l \cdot x$
--	--

- (6) **A3.** Escolha uma das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A1: $G \circ F = \text{id}$

Sejam $a: \alpha, b: \beta$ e $d: \delta$.

Calc.:

precisa separar em casos.

$(G \circ F) \langle d, l \cdot a \rangle$
 $= G(F \langle d, l \cdot a \rangle)$
 $= G(l \cdot \langle d, a \rangle)$
 $= \langle d, l \cdot a \rangle$

$[?]$
 $\vdots$

Calc.:

$(G \circ F) \langle d, \eta \cdot b \rangle$
 $= G(F \langle d, \eta \cdot b \rangle)$
 $= G(\eta \cdot \langle d, b \rangle)$
 $= \langle d, \eta \cdot b \rangle$

«Similar.»

(16) **T**

Defina **exatamente** duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$f \stackrel{\text{def}}{=} \text{succ} \circ (\text{square}) \circ (\cdot) \circ \Delta \circ (+) \circ \Delta \circ (+) \circ \Delta$ *nomes!*

$g \stackrel{\text{def}}{=} (\cdot) \circ \Delta \circ (+) \circ \langle \text{id}, (+) \circ \Delta \rangle$

(id x double)

(16) J

Demonstre/refute **até duas** das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f \text{ bij} \implies f \text{ sobre}$; J3. $g \circ f \text{ bij} \implies g \text{ sobre}$.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J1.

Sejam f e g sobrejetivas. Vou demonstrar que $g \circ f$ é sobrejetiva.
Seja $c: C$.
Seja $b: B$ tal que $g b = c$. [h1: g sobre]
Seja $a: A$ tal que $f a = b$. [h2: f sobre]
Escolho a .
Calc.: $(g \circ f) a$
 $= g(f a)$ [o-definição]
 $= g b$ [h2]
 $= c$. [h1]

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____.

para evitar
rotular & citar:
use: «pela escolha de»

(16) D

Sejam $D: \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A}: \text{Set}(\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) A

não compila assim!

ou use pattern matching (escrevendo uma $\equiv$ para cada pattern)
ou use uma parametro w para case_of... nele no "corpo"

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

$F: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
 $F \leq \lambda, \text{ case } w \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot x \mapsto a \\ \delta \cdot x \mapsto b \end{array} \right\} \Rightarrow \text{case } w \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot x \mapsto \langle \delta, a \rangle \\ \delta \cdot x \mapsto \langle \delta, b \rangle \end{array} \right\}$ | $G: \delta \times \alpha + \delta \times \beta \rightarrow \delta \times (\alpha + \beta)$
 $G \leq \lambda, \text{ case } w \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot x \mapsto \langle \delta, a \rangle \\ \delta \cdot x \mapsto \langle \delta, b \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \cdot x \mapsto \langle \delta, a + b \rangle$

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$F: \alpha^2 \rightarrow \alpha \times \alpha$
 $F \leq \lambda w. \text{ case } w \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot a \mapsto a \\ \delta \cdot a \mapsto a \end{array} \right\} \Rightarrow \langle a, a \rangle$ | $G: \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha^2$
 $G \leq \lambda w. 1. \text{ case } w \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot a \mapsto a \\ \delta \cdot a \mapsto a \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \cdot a \mapsto a$

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA $F \circ G$

seja $\langle a, a \rangle: \alpha \times \alpha$
 $F \circ G \langle a, a \rangle$
calculamos
 $(F \circ G) \langle a, a \rangle = F(G \langle a, a \rangle) \quad [10]$
 $= F(\lambda w. \text{ case } w \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot a \mapsto a \\ \delta \cdot a \mapsto a \end{array} \right\}) \quad [0, 1]$
 $= \# \langle a, a \rangle \quad [F, 1]$
 $= id \langle a, a \rangle \quad [id]$

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$f \stackrel{\text{def}}{=} \text{square } 4 \circ (+) \circ \Delta$
 $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda a, b. a + b$

$g \stackrel{\text{def}}{=} \text{square } 0 \circ (+)' \circ \text{double } l$

~~$(+): \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $(+)(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a + b$~~

$\text{double } l: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $\text{double } l \langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle a, 2b \rangle$
!!
pontinhos

(16) **J**

Demonstre/refute **até duas** das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA _____.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA _____.

(16) **D**

Sejam $D : \text{Set } \alpha \text{ e } \mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $a : \alpha$
Suponha $a \in \bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \}$ (1)
Logo $\exists A' \in (1) \mid a \in A'$
Seja $A' : \text{set } \alpha$ Tq, $A' \in (1)$ e $a \in A'$
Como $A' \in (1)$ logo $A' \in \mathcal{A}$
Parte L: x ∈
Como $a \in A'$ e $A' \in (1)$ Logo $a \in D$
Parte R:
Testemunha A'
imediato por $a \in A'$

Não rotulamos objetos matemáticos assim

... e o (2)?

Só isso mesmo.

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

- (6) **A3.** Escolha uma das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente** uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente** duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(n) \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{array}$$

DEFINIÇÕES.

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $f \stackrel{\text{def}}{=} \text{succ} \circ (-) \circ \text{diag} \circ (+) \circ \text{diag} \circ (+) \circ \text{diag}$
nomes!!

$\text{diag} : \alpha \rightarrow (\alpha \times \alpha)$
 $\text{diag} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda a. \langle a, a \rangle$ pontinho!
abdmal

(16) J

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1. (o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f \text{ bij} \implies f \text{ sobre}$; J3. $g \circ f \text{ bij} \implies g \text{ sobre}$.

Ninguém se importa com habitantes de A no momento. Qual é teu alvo aqui?

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA JJ.

Suponha f sobre & g sobre. X Seja $a : A$ Aplique f sobre em a p/ obter $(\exists b : B) [f a = b]$ Logo seja $b : B$ t.q. $f a = b$. Logo seja $b : B$ t.q. $f a = b$. Logo seja $b : B$ t.q. $f a = b$.	f retorna Props? Calculamos: $(g \circ f) a$ $= g(f a)$ [(o).1] $= g b$ [pela escolha de b] Imediato.
---	---

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA nome para algo que já temos

como referir a ele numa
maneira bem mais informativa??
 $\hookrightarrow (f a)$

(16) D

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$

RESOLUÇÃO.

$F: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)$. Definimos $F(d, x)$ como: Se $x \in \alpha$, então $F(d, x) = (0, (d, x))$.
Se $x \in \beta$, então $F(d, x) = (1, (d, x))$.
 $G: (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta) \rightarrow \delta \times (\alpha + \beta)$. Definimos G como: Se o elemento é da forma $(0, (d, a))$ (onde $a \in \alpha$) então $G((0, (d, a))) = (d, a)$.
Se o elemento é da forma $(1, (d, b))$ (onde $b \in \beta$) então $G((1, (d, b))) = (d, b)$.

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.

RESOLUÇÃO.

$F: \alpha^2 \rightarrow \alpha \times \alpha$
 $F(t) = (f(0), f(1))$, onde $f: 2 \rightarrow \alpha$
 $(\alpha$ possui f para dois elementos porque $2 = 0, 1$ então $f(0) = f(1) \in \alpha$)
 $G: \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha^2$
 $G(a, b)$ é a função $g: 2 \rightarrow \alpha$ definida por:
 $g(0) = a$
 $g(1) = b$
Veja a def de 2.

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA _____.

Precisa aprender escrever definições que "compilam". Isso parece "handwriting".

(16) T

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES **type error!**

$F = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = (4n)^2 + 1\}$.
 $f(n) = (4n)^2 + 1$
pontinho
 $G = \{((n, m), k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid k = (n + 2m)^2\}$.
 $g(n, m) = (n + 2m)^2$
X
X

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$

RESOLUÇÃO.

$$\begin{array}{l} F: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow \delta \times \alpha + \delta \times \beta \\ F \langle d, l.a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} l.\langle d, a \rangle \\ F \langle d, r.b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} r.\langle d, b \rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} G: \delta \times \alpha + \delta \times \beta \rightarrow \delta \times (\alpha + \beta) \\ G l.\langle d, a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle d, l.a \rangle \\ G r.\langle d, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle d, r.b \rangle \end{array}$$

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.

RESOLUÇÃO.

$$\begin{array}{l} F: ((1+1) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \times \alpha \\ (F _ . \star) a \stackrel{\text{def}}{=} \langle a, a \rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} G: \alpha \times \alpha \rightarrow ((1+1) \rightarrow \alpha) \\ G \langle a, a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lambda s: 1+1. a \end{array}$$

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A1.

Parte $g \circ f = \text{id}$.

Seja $\langle d, c \rangle: \delta \times (\alpha + \beta)$

Caso $\langle d, l.c \rangle \leftarrow$ mal escrito

calc.

$$(g \circ f) \langle d, l.c \rangle = g(f \langle d, l.c \rangle) \quad [f.1]$$

$$= g l.\langle d, c \rangle \quad [f.1]$$

$$= \langle d, l.c \rangle. \quad [g.1]$$

$$\text{caso } \langle d, r.c \rangle: = \text{id } \langle d, l.c \rangle.$$

Similar.

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1$$

$$g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2$$

$$h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \text{succ} \circ \text{square} \circ \text{double} \circ \text{double}$$

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \text{square} \circ (+) (_ . l, \text{double } _ . r)$$

??

$$\text{double} = \lambda x. 2x$$

$$\text{square} = \lambda x. x^2$$

pontinhos

(16) J

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; J3. $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____.

(16) D

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Escreva: ($\subseteq$).

Parte $(\forall a : \alpha) [a \in \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} \implies a \in D \cap \bigcup \mathcal{A}]$:

seja $a : \alpha$ t.q. $(\exists A : \text{Set } \alpha) [a \in D \cap A]$.

logo seja $A : \text{Set } \alpha$. $\leftarrow$ Assim A é arbitrário $\text{Set } \alpha$.

logo $a \in D$ e $a \in A$. $\leftarrow$ Portanto, não.

Parte $a \in D$:

Imediato.

Parte $a \in \bigcup \mathcal{A}$:

« ($\supseteq$) » Escolho A .

Imediato.

Só isso mesmo.

Parte $(\forall a : \alpha) [a \in D \cap \bigcup \mathcal{A} \implies a \in \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}]$

Similar. $\times$ não é.

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$

RESOLUÇÃO.

$$F = \langle C, [a, b] \rangle \quad G = [\langle C, a \rangle, \langle C, b \rangle]$$

quem são?

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.

RESOLUÇÃO.

$$F = (1+1) \rightarrow \alpha \quad G = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A2

$$F \cdot l = C$$

$$l(F \cdot n) \subseteq a = a$$

$$m(F \cdot n) \subseteq b = b$$

$$(l \cdot G) \cdot l = C$$

$$(l \cdot G) \cdot m = a$$

$$(m \cdot G) \cdot l = C$$

$$(m \cdot G) \cdot m = b$$

??

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \ n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g \ (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h \ (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$$f_n = \text{Square o Square o Double o Double } n$$

$$f(n) = (\text{Square o Square o Double o Double})n$$

todo o "ponto" aqui é evitar o ponto!

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

- (6) **A3. Escolha uma** das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente uma** das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f \, n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g \, (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h \, (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{array}$$

DEFINIÇÕES.

(16) **J**

Demonstre/refute **até duas** das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

(16) **D**

Sejam $D : \text{Set}$ e $\mathcal{A} : \text{Set}(\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

(2): ~~← necessário!~~

Seja $x \in \bigcup D \cap A$ ~~X~~ type error & name error: quem é A?

tem-se que $x \in D$ e $x \in A$

como $x \in A$, logo $x \in \bigcup \mathcal{A}$

como $x \in D$ e $x \in \bigcup \mathcal{A}$, tem-se $x \in D \cap \bigcup \mathcal{A}$

logo $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$

Só isso mesmo.

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \otimes (\alpha + \beta) \cong (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)$
RESOLUÇÃO.

$F: \lambda h. \text{case } \alpha \text{ in } \{W \Rightarrow f a, w_1 \Rightarrow g b\}$ $G: \lambda h. \langle X, \lambda \alpha. \text{case } \alpha \text{ in } \{a \Rightarrow f a, b \Rightarrow g b\} \rangle$

$\uparrow$ tipagem?! $\times$ $\uparrow$?! $\times$

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$F: (\text{Bool} \rightarrow \text{Unit}) \rightarrow \text{Unit} \times \text{Unit}$ $G: \text{Unit} \times \text{Unit} \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow \text{Unit})$

$\times$ $\uparrow$?! $\times$

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \quad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \quad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$f: \text{succ} \circ \text{square} \circ (\text{double})^2$ $\text{double}: (+) \text{ m}$

$g: \text{square} \circ (+) \text{ m} \circ (+)$ $\text{square}: (\cdot) \text{ m}$

$h: \text{succ}$ $\times$

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

$F: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow \delta \times \alpha + \delta \times \beta$ $F \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \langle u, v \rangle, 1 \rangle$	$G: \delta \times \alpha + \delta \times \beta \rightarrow \delta \times (\alpha + \beta)$
---	--

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$F: (1+1 \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \times \alpha$	$G: \alpha \times \alpha \rightarrow 1+1 \rightarrow \alpha$
--	--

- (6) **A3.** Escolha uma das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente** uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente** duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \qquad g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \qquad h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

DEFINIÇÕES.

$\text{Fourt} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \times 4 \times$ $\text{Fourt}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$S_g \stackrel{\text{def}}{=} 1 \times x \times$ $S_g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$\text{Doublet}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\text{Doublet} = 1 \times \langle u, l, 2 \cdot u, r \rangle$	$\text{Sum}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{Sum} = 1 \times u, u, l + u, r$
$f \stackrel{\text{def}}{=} \text{Succ} \circ S_g \circ \text{Fourt}$		$g \stackrel{\text{def}}{=} S_g \circ \text{Sum} \circ \text{Doublet}$	

(16) J

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f$ bij $\Rightarrow f$ sobre; J3. $g \circ f$ bij $\Rightarrow g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J1.

~~Se f e g sobrejetivos $\Rightarrow g \circ f$ sobrejetivo~~ X Não compila. ' $\Rightarrow$ ' não é uma abrev. da palavra «então»!
Sup f sobrejetivo e g sobrejetivo
Seja $x \in C$
~~Logo existe x' em B tal q $g(x') = x$~~ [por g sobrejetivo]
~~Logo existe x'' em A tal q $f(x'') = x'$~~ [por f sobrejetivo]
B ... E daí? Qual é teu alvo?

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____.

(16) D

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

$F: \delta \times (\alpha + \beta) \rightarrow (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)$ $F(\langle d, \ell \cdot a \rangle) = \ell \cdot \langle d, a \rangle$ $F(\langle d, r \cdot b \rangle) = r \cdot \langle d, b \rangle$	$G: ((\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)) \rightarrow (\delta \times (\alpha + \beta))$ $G(\ell \cdot \langle d, a \rangle) = \langle d, \ell \cdot a \rangle$ $G(r \cdot \langle d, b \rangle) = \langle d, r \cdot b \rangle$
--	--

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$F: ((1+1) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \times \alpha)$ $Fh = \langle \ell \cdot h, r \cdot h \rangle$	$G: (\alpha \times \alpha) \rightarrow ((1+1) \rightarrow \alpha)$ $G\langle a, a' \rangle = \lambda w. \text{case } w \text{ of } \{ \ell \cdot x \rightarrow a, r \cdot x \rightarrow a' \}$
--	---

nome bizarro!

- (6) **A3.** Escolha uma das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A1

Seja $w: (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)$
separa w em casos: $\leftarrow$ Caso $w = \ell \cdot \langle d, a \rangle$

$$\begin{aligned} (F \circ G)(\ell \cdot \langle d, a \rangle) &= F(G(\ell \cdot \langle d, a \rangle)) \quad [(\circ), 1] \\ &= F(\langle d, \ell \cdot a \rangle) \quad [G, 1] \\ &= \ell \cdot \langle d, a \rangle. \quad [F, 1] \end{aligned}$$

outro caso?

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ f\ n &\stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g\ (n, m) &\stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h\ (n, m) &\stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{aligned}$$

DEFINIÇÕES.

$f' = (\text{succ} \circ \text{square} \circ (\text{double} \circ \text{double}))$	$\text{doubleR}: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$
$g' = (\text{square} \circ (+) \circ \text{doubleR})$	$\text{doubleR}\ (n, m) = (n, \text{double}\ m)$

(16) J

Demonstre/refute **até duas** das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; J3. $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J1 .

Basta que $g \circ f$ sobrejetiva. ~~X~~ *Donde tirou?!*
Sejam $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, sobrejetivas.
Sejam $a, a': A$ t. $g(g \circ f)a = (g \circ f)a'$. — confundiu inj. com sobrej?
logo $g(fa) = g(fa')$. [$(o), 1$]
logo $fa = fa'$. [g é sobre]
logo $a = a'$. [f é sobre] ~~X~~

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J2 .

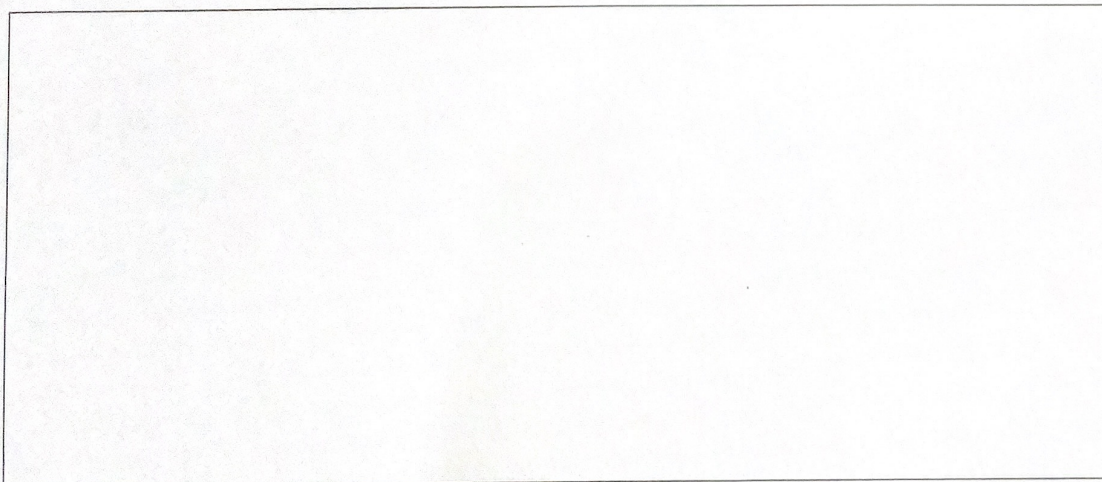
Sejam $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1\}$.
Temos $f(1) = 1$, $g(1) = 1$ e $g(2) = 1$.
Note que f não é sobre, pois a função não abrange todos os membros de B , ou seja, não há $fa = 2$.
(puro handwaving. não compila.)

Efetivamente falou: f não é sobre, porque f não é sobre.

(16) D

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.



Só isso mesmo.

(16) A

- (5) A1. Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

seja $f: \alpha \rightarrow \delta$ e $g: \beta \rightarrow \delta$, $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$ por distributividade. $\delta \times (\alpha + \beta) = (\delta \times \alpha) + (\delta \times \beta)$, $f: \alpha \rightarrow \delta$ e $g: \beta \rightarrow \delta$

- (5) A2. Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

$f: \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha^2$ $g = \text{unit} \circ \alpha^n$ $f: \text{double}(\alpha)$ $g: \text{double}(\text{unit})$

- (6) A3. Escolha uma das tuas respostas dos A1, A2 e demonstre exatamente uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A1

seja $(f: \alpha \rightarrow \delta) \in \{\alpha \times \delta \rightarrow \delta\}$ e $(g: \beta \rightarrow \delta) \in \{\beta \times \delta \rightarrow \delta\}$, $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
~~seja $f: \alpha \rightarrow \delta$ e $g: \beta \rightarrow \delta$~~ $a: \alpha$ e $b: \beta$, logo $w = f \circ g$
 $\langle a, b \rangle$
logo $\langle a, b \rangle w.L = f$
 $\langle a, b \rangle w.R = g$ (7)
 (β)
 $w.al \{g\} = f$
 $w.br \{g\} = g$
 $a \circ g \circ f$ e $w \circ f \circ g$ reciproca
Case al. $f \circ f$
Case br. $g \circ g$

(16) T

Defina exatamente duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

por que? $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $f \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1$ $g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2$ $h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1$

DEFINIÇÕES.

$f \stackrel{\text{def}}{=} (4m)^2 + 1$ $g(m, m)$
 $\text{succ}(\text{double}(\text{square}))$ $n + (\text{double}(\text{double } m))$
 $\text{succ} \circ \text{double} \circ \text{square}$
 $(\text{square}(4m)) \text{double} \text{succ}$

(16) J

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; J2. $g \circ f$ bij $\Rightarrow f$ sobre; J3. $g \circ f$ bij $\Rightarrow g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J1.

$g \circ f$ bij se for injetiva e sobrejetiva ou seja: $f: \text{dominio} \rightarrow \text{codominio}$
 $g \circ f$ inj. $(\forall x \in f) [x \mapsto g] \wedge$ | inj ~~verdade~~ para todo x em f x tem correspondente
 g em g
 g sob. $(\exists x \in g) [x \leftarrow f]$ | Sob existe x em g que tem correspondente em f

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J2.

Se $g \circ f$ é ~~Sobre~~ bijetiva

(16) D

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

$\bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$; ~~$(\forall A \in \mathcal{A})$~~ $(\exists x: \alpha) [x \in D \wedge x \in A]$
~~se $A \in \mathcal{A}$~~ $(\exists x: \alpha) [x \in A \Leftrightarrow A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{A}]$???
 ~~$(\exists x: \alpha) [x \in D \wedge x \in A]$~~ ??
 $(\exists x: \alpha) [x \in D \wedge x \in A]$ X
 se $A \in \mathcal{A}$ ou seja $(\forall A \in \mathcal{A}) [x \in \mathcal{A}]$, ~~$D \cap A$~~
 Logo, ~~$(\exists x: \alpha) [x \in D \wedge x \in A]$~~ $D \cap \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{D \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$
 pois $(x \in A \in \mathcal{A} \wedge x \in D) \mid D \cap \bigcup \mathcal{A}$ X

Só isso mesmo.

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

- (6) **A3. Escolha uma** das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente uma** das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{array}$$

DEFINIÇÕES.

$f \stackrel{\text{def}}{=} \text{Succ} \circ \text{Square} \circ \text{double} \circ \text{double}$

$h \stackrel{\text{def}}{=} \text{Succ} \circ \text{Cube} \circ \text{odd}$ (+)

~~$\text{odd}(m; m) \stackrel{\text{def}}{=} m + m$~~ ✓

$\text{Cube}(m) \stackrel{\text{def}}{=} m^3$

pontinhos!

(16) **J**

Demonstre/refute até duas das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.($\circ$) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO / REFUTAÇÃO DA 2ª. *ninguém se importa com habitantes de A aqui! quem é u?!*

Seja $a: A$ como $g \circ f$ by, então $g \circ f = (g \circ f) \circ a$
~~Seja $g \circ f$ by~~
 Seja $g \circ f$ by
 Solução:
 $(g \circ f) \circ a = g \circ (f \circ a)$??

DEMONSTRAÇÃO/REFUTACAO DA 3

Supo $a: A$
~~como $g \circ f$ big~~
 Supo $g \circ f$ big
 calcular:
 $(g \circ f) \circ a = g(f(a))$

(16) D

Sejam $D : \text{Set} \rightarrow \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set} \rightarrow (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

DEMONSTRAÇÃO:

Sig. $U\{DNA|AES\}$ type error

($\subseteq$): $U\{DNA|AES\} \subseteq DNA$

Sig. $x \in U\{DNA|AES\}$ A' use!!

presumimos A' onde $x \in DNA$ e $A' \in \mathcal{A}$

logo $x \in \mathcal{A}$

como $A' \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{A}$, então $x \in U\mathcal{A}$

logo $x \in DNA$ ☺

nem tem A' ainda no teu escopo!

Use teus dados para obter tal A' .

Porte $DNA \subseteq U\{DNA|AES\}$

Sig. $x \in DNA$

logo $x \in \mathcal{A}$ [m-dy]

presumimos A' onde $x \in \mathcal{A}$ e $A' \in \mathcal{A}$

logo $x \in DNA$ [m-dy]

logo $x \in U\{DNA|AES\}$ ☺

Só isso mesmo.

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

~~F: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$~~ ~~$G: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$~~ ~~$F(1,1) = 2$~~ ~~$G(1,1) = 2$~~ ~~$2: \alpha$~~ ~~$F(1,1) = 2$~~

- (6) **A3.** Escolha uma das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente** uma das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

DEMONSTRAÇÃO DA A2

(16) **T**

Defina **exatamente** duas funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ f(n) &\stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g(n, m) &\stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h(n, m) &\stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{aligned}$$

DEFINIÇÕES.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$f(n) = (4n)^2 + 1$ $g(n, m) = (n + 2m)^2$ $h(n, m) = n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1$

$f(n) = (4n)^2 + 1$ $g(n, m) = (n + 2m)^2$ $h(n, m) = n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1$

$f(n) = (4n)^2 + 1$ $g(n, m) = (n + 2m)^2$ $h(n, m) = n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1$

?

??

(16) **J**

Demonstre/refute **até duas** das (J1)–(J3):

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.(o) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies f$ sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies g$ sobre.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J2 .

$g \circ f$ bij $\implies f$ 

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA J3 .

A composição de funções (o) respeita sim a sobrejetividade, pois, como que todos os elementos de B têm uma pre-
imagem em A . 

(16) **D**

Sejam $D : \text{Set } \alpha$ e $\mathcal{A} : \text{Set } (\text{Set } \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathcal{A} \} = D \cap \bigcup \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) **A**

- (5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \cong \delta \times \alpha + \delta \times \beta$
RESOLUÇÃO.

- (5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^2 \cong \alpha \times \alpha$, onde $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$.
RESOLUÇÃO.

- (6) **A3. Escolha uma** das tuas respostas dos **A1, A2** e demonstre **exatamente uma** das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.
DEMONSTRAÇÃO DA _____.

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f \ n \stackrel{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 & g \ (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 & h \ (n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1. \end{array}$$

DEFINIÇÕES.