FMC2, 2025.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova CFR1.1
(points: 48; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος

2025-04-28

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Escolha até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{T}, \mathbf{J}, \mathbf{D}$.**

X. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(16) **A**

(5) **A1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta \times (\alpha + \beta) \overset{F}{\cong} \delta \times \alpha + \delta \times \beta$

Resolução.

$$F\ \langle d, l \cdot a\rangle \overset{\text{def}}{=} l \cdot \langle d, a\rangle \qquad G\ (l \cdot \langle d, a\rangle) \overset{\text{def}}{=} \langle d, l \cdot a\rangle$$
$$F\ \langle d, r \cdot b\rangle \overset{\text{def}}{=} r \cdot \langle d, b\rangle \qquad G\ (r \cdot \langle d, b\rangle) \overset{\text{def}}{=} \langle d, r \cdot b\rangle$$

(5) **A2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\alpha^{\mathbf{2}} \cong \alpha \times \alpha$, onde $\mathbf{2} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{1} + \mathbf{1}$.

Resolução.

$$F\ f \overset{\text{def}}{=} \langle f\ (l \cdot *), f\ (r \cdot *)\rangle \qquad G\ \langle a, a'\rangle \overset{\text{def}}{=} \lambda t.\ \text{case } t \text{ of } \begin{Bmatrix} l \cdot \_ \rightsquigarrow a \\ r \cdot \_ \rightsquigarrow a' \end{Bmatrix}$$

(6) **A3. Escolha uma** das tuas respostas dos **A1**, **A2** e demonstre **exatamente uma** das duas equações que precisa demonstrar para estabelecer o isomorfismo escolhido.

Demonstração da (A2): $(F \circ G) = id_{\alpha \times \alpha}$.

Seja $w : \delta \times \alpha + \delta \times \beta$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}
&(F \circ G)\ w \\
&= F\ (G\ w) && [(\circ)\ 1] \\
&= F\ \left(\lambda t.\ \text{case } t \text{ of } \begin{Bmatrix} l \cdot _ \rightsquigarrow w \cdot l \\ r \cdot _ \rightsquigarrow w \cdot r \end{Bmatrix}\right) && [G.1] \\
&= \langle \lambda t.\ (\text{case} \ldots \text{of} \ldots)\ (l \cdot *),\ \lambda t.\ (\text{case} \ldots \text{of} \ldots)\ (r \cdot *)\rangle && [F.1] \\
&= \langle \text{case } l \cdot * \text{ of } \{\vdots\},\ \text{case } r \cdot * \text{ of } \{\vdots\}\rangle && [(\to)\text{-}\beta\ ;\ (\to)\text{-}\beta] \\
&= \langle w \cdot l,\ w \cdot r\rangle && [(+)\text{-}\beta\ ;\ (+)\text{-}\beta] \\
&= w && [(\times)\text{-}\eta] \\
&= id\ w && [id.1]
\end{aligned}$$

(16) **T**

Defina **exatamente duas** funções iguais às seguintes, evitando pontinhos (estilo tácito).

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ n \overset{\text{def}}{=} (4n)^2 + 1 \qquad g\ (n, m) \overset{\text{def}}{=} (n + 2m)^2 \qquad h\ (n, m) \overset{\text{def}}{=} n^3 + m^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 1.$$

Definições.

$$f \overset{\text{def}}{=} succ \circ square \circ double^2$$
$$g \overset{\text{def}}{=} square \circ (+) \circ (id \times double)$$
$$h \overset{\text{def}}{=} succ \circ cube \circ (+)$$

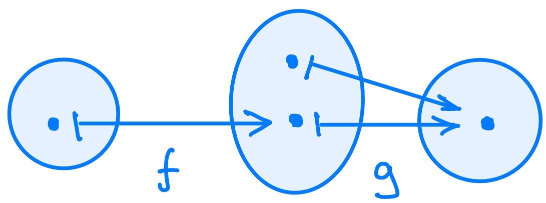
$$square \overset{\text{def}}{=} (\cdot) \circ \Delta$$
$$double \overset{\text{def}}{=} (+) \circ \Delta$$
$$cube \overset{\text{def}}{=} (\cdot) \circ \langle id, square\rangle$$
$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \langle id, id\rangle$$
$$f \times g \overset{\text{def}}{=} \langle f \circ outl, g \circ outr\rangle$$

(16) **J**

Demonstre/refute **até duas** das **(J1)–(J3)**:
Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

J1.($\circ$) respeita sobrejetividade; **J2.** $g \circ f$ bij $\implies$ f sobre; **J3.** $g \circ f$ bij $\implies$ g sobre.

~~Demonstração~~/Refutação da J2 .



Demonstração/~~Refutação~~ da J3 .

Seja $c : C$.
Logo seja $a_c : A$ t.q. $a_c \xmapsto{g \circ f} c$.
Vou mostrar que $f\,a_c : B \longmapsto c$.
Calculamos: $g\,(f\,a_c) = (g \circ f)\,a_c$ [($\circ$).1]
$= c$ [pela escolha de a_c]

(16) **D**

Sejam $D : \mathsf{Set}\ \alpha$ e $\mathscr{A} : \mathsf{Set}\ (\mathsf{Set}\ \alpha)$. Demonstre: $\bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathscr{A} \} = D \cap \bigcup \mathscr{A}$.
Demonstração.

($\subseteq$):
Seja $u \in \bigcup \{ D \cap A \mid A \in \mathscr{A} \}$.
Logo seja $A_u \in \mathscr{A}$ t.q. $u \in D \cap A_u$, ou seja, $u \in D$ & $u \in A_u$.
Parte $u \in D$: Imediato.
Parte $u \in \bigcup \mathscr{A}$: Escolho o A_u: $u \in A_u \in \mathscr{A}$.

($\supseteq$):
Seja $w \in D \cap \bigcup \mathscr{A}$, ou seja, $w \in D$ (1) & $w \in \bigcup \mathscr{A}$.
Logo seja $A_w \in \mathscr{A}$ t.q. $w \in A_w$ (2).
Preciso mostrar que w pertence àlgum dos $D \cap A$'s.
Escolho o $A_w \in \mathscr{A}$ Temos $w \in D \cap A_w$ pelas (1) e (2).

Só isso mesmo.

Rascunho