

Relações

lec01
2025-05-28

$\alpha \times \beta \rightarrow \text{Prop}$

relação entre α e β

ou de α para β

$\text{Rel}(\alpha, \beta)$

$\text{Rel}(\alpha, \alpha)$

relação binária no α

Notação

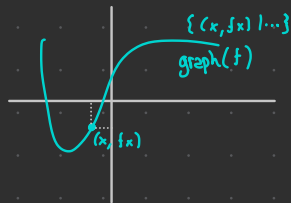
$a R b$ $R(a, b)$ $(a, b) \in R$

$\text{graph} : \text{Rel}(\alpha, \beta) \rightarrow \text{Set}(\alpha \times \beta)$

$\text{graph}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (a, b) \mid a R b \}$

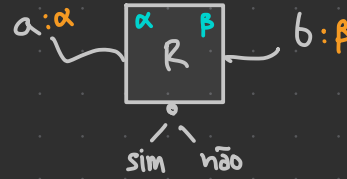
$\text{succ } 3 = 4$ $(3, 4) \in \text{graph}(\text{succ})$

$a R b \text{ S } c \text{ T } d \stackrel{\text{Sug}}{\iff} a R b \text{ \& } b \text{ S } c \text{ \& } \dots$



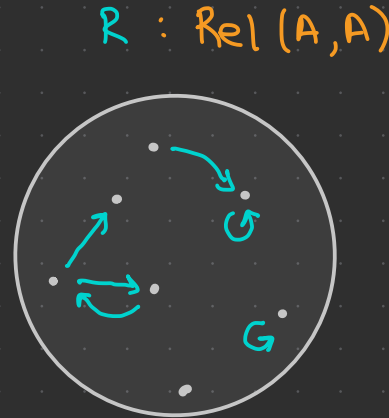
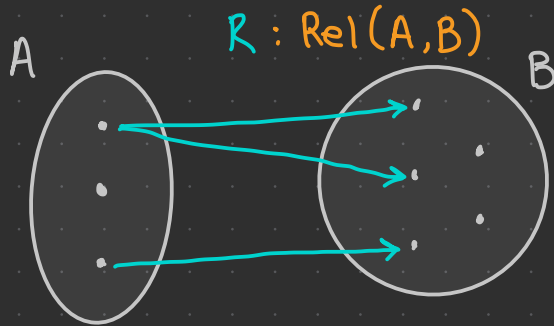
Igualdade

$R, Q : \text{Rel}(\alpha, \beta)$



$$R =_{\text{Rel}(\alpha, \beta)} Q \iff (\forall a)(\forall b) [a R b \iff a Q b]$$
$$\iff \text{graph}(R) = \text{graph}(Q)$$

Diagramas (internos)



Propriedades

$R : \text{Rel}(\alpha, \alpha)$

R reflexiva $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$a R a$$

transitiva

$$a R b \ \& \ b R c \Rightarrow a R c$$

simétrica

$$a R b \Rightarrow b R a$$

antissimétrica

$$a R b \ \& \ b R a \Rightarrow a = b$$

irreflexiva

$$a \not R a$$

assimétrica

$$a R b \Rightarrow b \not R a$$

cíclica

$$a R b \ \& \ b R c \Rightarrow c R a$$

⋮



Cuidado

irreflexiva vs não reflexiva

assimétrica vs não simétrica

$\underbrace{\text{refl \& trans}}_{\text{preordem}} \& \begin{cases} \text{antisym.} & \text{ordem (parcial)} \\ \text{sym.} & \text{relação de equivalência} \end{cases}$

$R : \text{Rel}(\alpha, \beta)$

$L\text{-total} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall a)(\exists b) [a R b]$

$R\text{-total} \iff (\forall b)(\exists a) [a R b]$

$L\text{-uniq} \stackrel{\text{def}}{\iff} ?$

$R\text{-uniq} \iff ?$

Construções

negação ou complemento

$$x \not R y \stackrel{\text{def}}{\iff} \neg (x R y)$$

dual

$$x R^{\partial} y \stackrel{\text{def}}{\iff} y R x$$

composição

$$a (R \circ S) c \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists b) [a R b \ \& \ b S c]$$



Relações de equivalência - Partição

$$(\sim_\square) : \text{Partition}(A) \xrightarrow{\text{toEqRel}} \underbrace{\text{EqRel}(A)}_{\substack{\text{Rel}(A, A) \\ + \text{legal (leis)}}}$$

$$\mathcal{A}_\square : \text{EqRel}(A) \xrightarrow{\text{toPartition}} \underbrace{\text{Partition}(A)}_{\substack{\text{Set}(\text{Set } A) \\ + \text{legal (leis)}}}$$

$$\mathcal{A}_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{ [a]_\sim \mid a \in A \}$$

$$[a]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \sim a \}$$

} classe de equivalência

$$A : \text{Set } \alpha$$

$$\mathcal{A} : \text{Set}(\text{Set } \alpha)$$

$$\mathcal{A} \text{ partição de } A \stackrel{\text{def}}{\iff}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup \mathcal{A} = A \\ \mathcal{A} \text{ disjuntos dois-a-dois} \\ \emptyset \notin \mathcal{A} \end{array} \right.$$

$$a \sim_{\mathcal{A}} b \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists P \in \mathcal{A}) [a, b \in P]$$

$$\mathcal{A}_{\sim_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A} \quad \& \quad (\sim_{\mathcal{A}_\sim}) = (\sim)$$

Conjunto quociente

$$(\sim) : \text{RelEq}(A)$$

$$A / \sim \stackrel{\text{def}}{=} \{ [a]_{\sim} \mid a \in A \}$$

(conjunto quociente

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{as pessoas aqui} \}$$

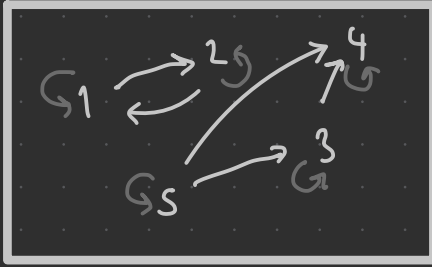
$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x, y \text{ nasceram na mesma cidade}$$

$$\text{Queremos } P / \sim \stackrel{\heartsuit}{=} \text{Cidades}$$

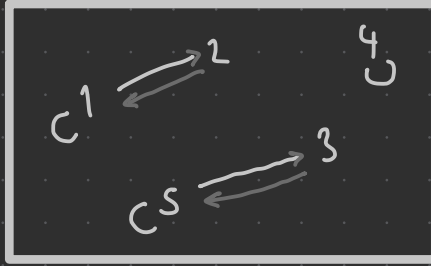
Notação (confortos)

lec02
2025-05-30

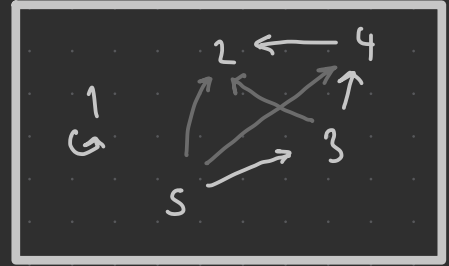
R refl



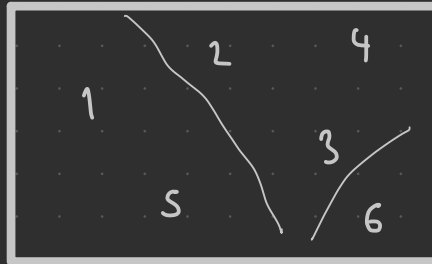
R sym



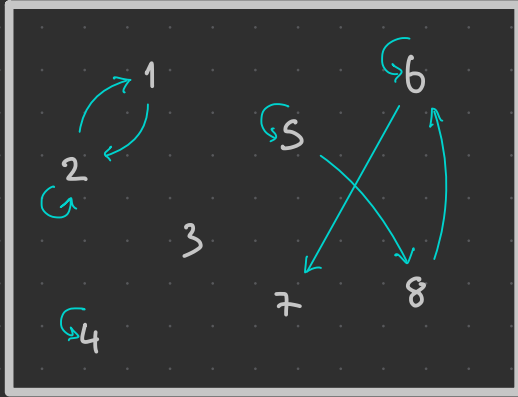
R trans



R eqrel

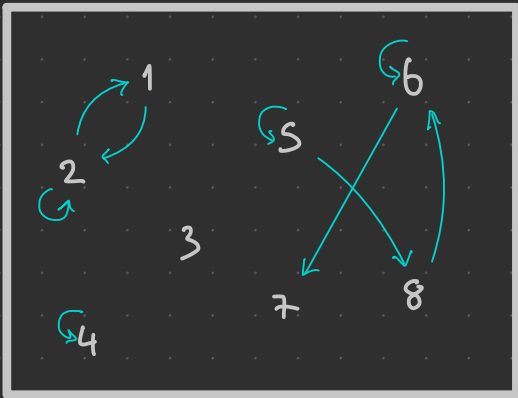


Construções: fechos



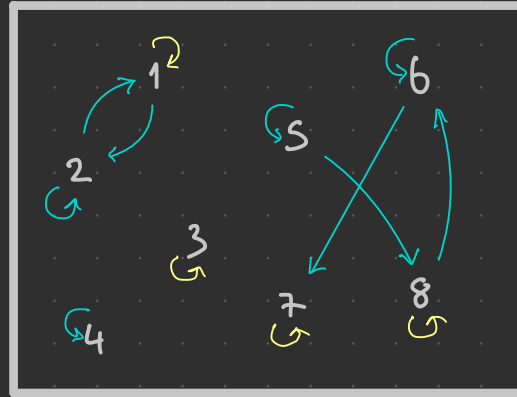
$R : \text{Rel}(A, A)$

A



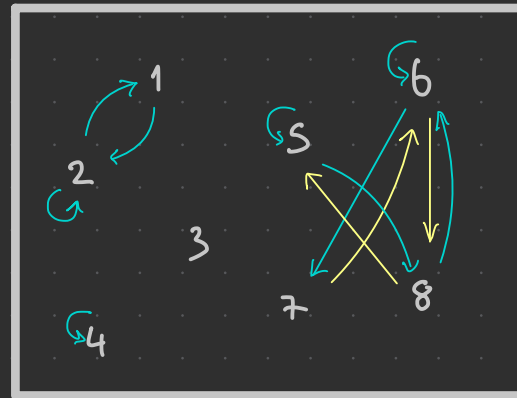
$\overline{R}^r : \text{Rel}(A, A)$

A



fecho refl

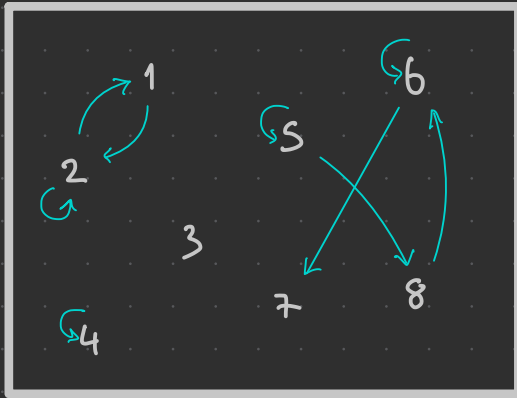
$\overline{R}^s : \text{Rel}(A, A)$



fecho sym

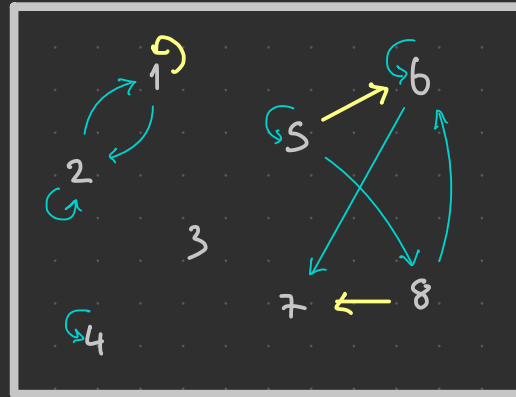
$R : \text{Rel}(A, A)$

A



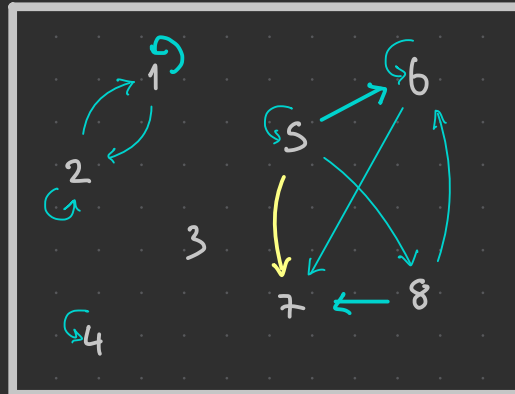
$- : \text{Rel}(A, A)$

A



$\bar{R}^t : \text{Rel}(A, A)$

A



fecho trans

Fechos: como definir

$$R : \text{Rel}(A, A)$$

$$\overline{R}^r \quad \overline{R}^s \quad \overline{R}^t : \text{Rel}(A, A) \Rightarrow \&$$

$$a \overline{R}^r b \stackrel{\text{def}}{\iff} a R b \text{ ou } a = b$$

$$a \overline{R}^s b \stackrel{\text{def}}{\iff} a R b \text{ ou } b R a$$

$$a \overline{R}^t b \stackrel{\text{def}}{\iff} ?$$

$$R, S : \text{Rel}(A, B)$$

$$R \cup S :$$

$$\cap$$

$$\vdots$$

$$\overline{R}^r \stackrel{\text{def}}{=} R \cup (=)$$

$$\text{graph}(R)$$

$$\overline{R}^s \stackrel{\text{def}}{=} R \cup R^a$$

$$R \cup R^a$$

$$R \leq S \stackrel{\text{def}}{\iff} R \subseteq S$$

$$\overline{R}^{r,s} = \bigcap \left\{ \overline{R}^r, \overline{R}^s \right\},$$

$$\overline{R}^{r,t} = ? ,$$

$$\dots ?$$

De fecho para versão legal de uma relação

$\overline{R}^l \stackrel{\text{legal}}{\equiv} \text{a melhor } ? : \text{Rel}(A,A) \text{ legal}$ (a partir da) baseada na R

$l := r, s, t, \dots \rightsquigarrow (\subseteq)\text{-menor} \dots \dots \dots$ que contem a R

$l := \text{irr}, \text{asym}, \dots \rightsquigarrow (\subseteq)\text{-maior} \dots \dots \dots$ contida na R

$\overline{R}^l \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ C \supseteq R \mid C \text{ legal} \}$ onde $l := r, s, t, rs, rt, \dots$

- $\cap$ resp legalidade
- algo mais? ... e para $l := \text{outras?}$

P(ri)osets

tipo ou conjunto

relação

$$\mathcal{P} \equiv (P; \leq_P)$$

justificar

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$

preordem

proset

ordem

poset

$$|\mathcal{P}| \equiv \mathcal{P}.carrier \equiv P$$

$$\mathcal{P}.order \equiv (\leq)$$

$$(P; \leq_P) \xrightarrow{f} (Q; \leq_Q)$$

$$f : P \rightarrow Q$$

t.q. f preserva $\leq_P$

$$f \text{ preserva } \leq_P \stackrel{\text{def}}{\iff} p \leq_P p' \Rightarrow f p \leq_Q f p'$$

$$f \text{ reflete } \leq_Q \stackrel{\text{def}}{\iff} p \leq_P p' \Leftarrow f p \leq_Q f p'$$

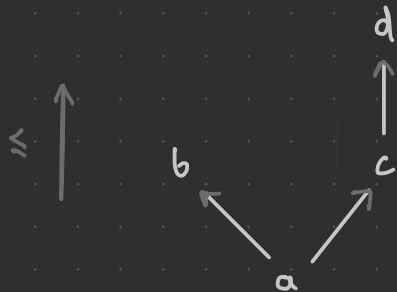
$$a \sim b \iff a \leq b \ \& \ b \leq a$$

HW



Diagramas Hasse

lec03
2025-06-02



$$a \prec b \stackrel{\text{def}}{\iff} a \leq b \quad \& \quad (\forall a \leq m \leq b) [a = m \text{ ou } m = b]$$

a coberto por b

HW: ache e corrija o erro

Exemplos

$$(\mathbb{N}; \leq), (\mathbb{Z}; |), (\mathcal{P}A; \subseteq)$$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

Kleene star

alfabeto

$$\Sigma^* \equiv \{ \text{os } \Sigma\text{-strings finitas} \}$$

$$\Sigma^{<\omega} \text{ mais curto que } \omega$$

$$\omega \text{ vezes } \omega \equiv (\mathbb{N}; \leq) \text{ a "padrão" (do ensino fundamental)}$$

ω -longos

$$\Sigma^{\omega} \equiv \{ \text{os strings infinitos} \}$$

$$\Sigma^{\leq \omega} \equiv \{ \text{os strings finitos ou infinitos} \}$$

► Se Σ fosse ordenado:

- lexicográfica
- componentwise pointwise

► Consultar outro poset:

$$A \rightarrow P$$

substring funciona?

$$s \sqsubseteq t \stackrel{\text{def}}{\iff} s \text{ prefixo de } t$$

$$\iff (\exists c) [s \# c = t]$$

Funções parciais

$(A \rightarrow B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{as funções parciais de } A \text{ para } B \}$

Escrevemos: $f \uparrow x \iff f \text{ diverge no } x \iff f x = \perp$

$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x) [f x \downarrow \Rightarrow (g x \downarrow \ \& \ f x = g x)]$
aproximação $\iff \text{graph}(f) \subseteq \text{graph}(g)$

f, g compatíveis $\iff \text{graph}(f) \cup \text{graph}(g)$ "é" função (parcial)

f, g incompatíveis $\iff (\exists a: A) [f a \downarrow \ \& \ g a \downarrow \ \& \ f a \neq g a]$

inconsistência, conflito

$\lceil$ incompatibilidade $\rfloor$

Exemplo: $\{ (0, 42), (1, 3), (5, 0) \} \cup \{ (0, 42), (2, 7), (5, 1) \}$

Construções

oposto ou dual

$$(-)^{\text{op}_{\text{ou}}}: P(\text{r})\text{oset } P \rightarrow P(\text{r})\text{oset } P$$

$$x \leq^{\partial} y \iff y \leq x$$

ordinal

(n-chain)

HW
def!

discreta

(n-antichain)

n-1
|
⋮
|
1
|
0
n

$$\mathbb{N} \rightarrow \text{Proset} \quad ?$$

0 1 ... n-1
|
n

$\text{Soma}(s?) : \mathcal{P}(\text{r)oset} ? \times \text{Proset} ? \rightarrow \text{Proset} ?$



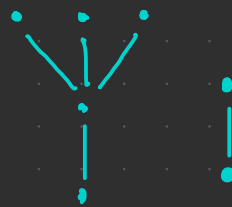
$P \cup Q$
 $P + Q$



$P \oplus Q$

$(P + Q ; ?)$
 $P \Psi Q$

Exemplo:



$(2 \oplus \bar{3}) + 2$

HW:

Produto(s?) : $P(\text{r})\text{oset} ? \times \text{Proset} ? \rightarrow \text{Proset} ?$

visualizar
(as 3)

$P \times Q$

?

lexi

antilexi

cw

componentwise

λέξι (palavra)

(lexi)

λεξικό (dicionário)

(lexicó)

$(P \times Q; \begin{matrix} ? \\ ? \\ ? \end{matrix})$

defina
&
verifique!

HW

$$(p, q) \leq_{P \times Q} (p', q') \stackrel{\text{def}}{\iff} p \leq_P p' \ \& \ q \leq_Q q'$$

downsets

A down set

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

fechado por baixo

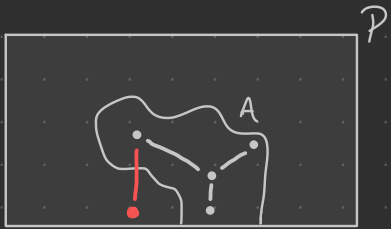
$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$(\forall a) (\forall p \leq a) [p \in A]$$

upset

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

?

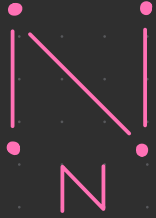


não exemplo

$$\mathcal{O}(P) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \{ \text{os downsets de } P \}$$

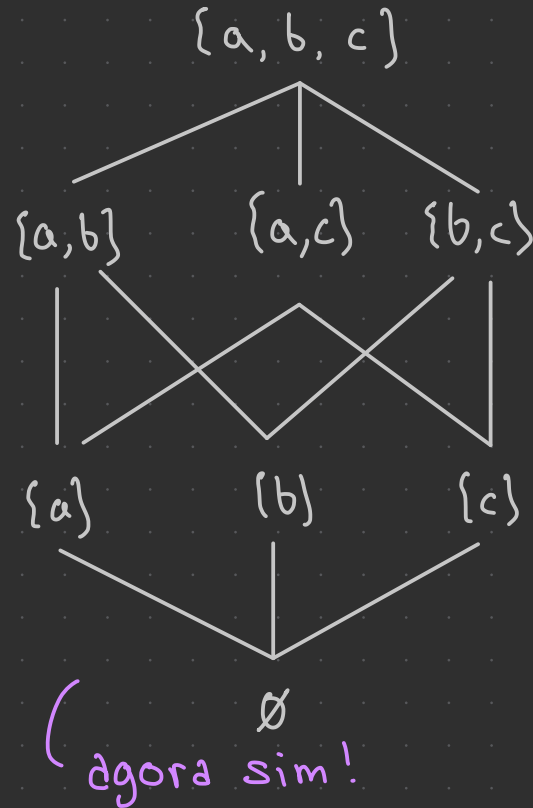
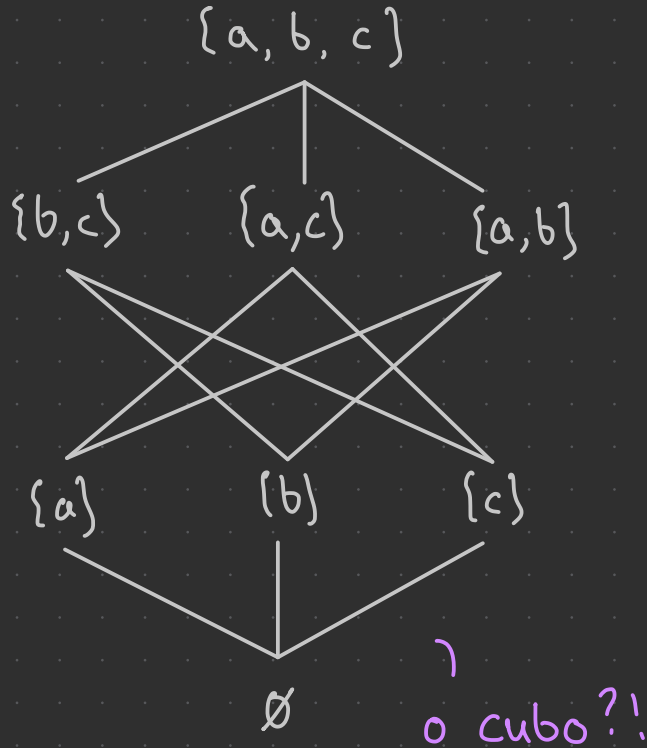
↗

é uma construção mesmo? $\mathcal{O}(N) = ?$



Desenhando posets: o cubo

lec04
2025-06-04



Construções

① Por que chamamos o $\mathcal{O}(-)$ de «construção»?

$$\mathcal{O}(N) = \left(\{ \emptyset, \dots, N \} ; \subseteq \right)$$

?

$\mathcal{O}(N)$

vs

$\mathcal{P}(N)$

lifting

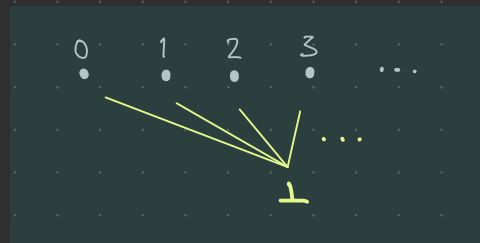
$\mathcal{P}_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \equiv$



onde achamos?



$\omega_\perp$



$\mathbb{N}_\perp$

Subposet

Qualquer $X \subseteq P$ vira um poset munido com a ordem herdada de P :

$(X; \leq_x)$ a restrição de $(\leq_P)$ no X .

onde $x \leq_x y \stackrel{\text{def}}{\iff} \iota_{X \subseteq P} x \leq_P \iota_{X \subseteq P} y$ inclusão de X no P .

Vocabulário

$\mathcal{P}$ discreto : $\cdot \cdot \cdot \cdot \dots \cdot (\dots)$

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$$x \leq y \Rightarrow x = y$$

ou seja: $(\leq_{\mathcal{P}}) = (=_{\mathcal{P}})$

$\mathcal{P}$ flat : $\cdot \cdot \cdot \cdot \dots \cdot (\dots)$

$\Updownarrow_{\text{def}}$



$\mathcal{P}$ tem bottom & $(x \leq y \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = y)$

Contexto

$\mathcal{P}, \mathcal{Q} : \mathcal{P}(r) \text{ o sel}$

$A \subseteq \mathcal{P}$

$a \in A$

$x, p, m, \dots \in \mathcal{P}$

P linear $\stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y \text{ ou } y \leq x$

ou chain todos comparáveis
ou total

A chain $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ todos os membros de A comparáveis

A antichain $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ únicos comparáveis: cada um com ele mesmo
 $\iff A \subseteq P$ discreto

Bounds (cotas)

$$\begin{array}{l} x \text{ cota inferior de } A \xLeftrightarrow{\text{def}} x \leq A \xLeftrightarrow{\text{Sug}} (\forall a \in A) [x \leq a] \\ x \text{ cota superior de } A \xLeftrightarrow{\text{def}} x \geq A \xLeftrightarrow{\text{Sug}} (\forall a \in A) [x \geq a] \end{array}$$

$$(\leq -), (\geq -), \text{lbs}, \text{ubs} : \text{Set } P \rightarrow \text{Set } P$$

$$\text{lbs}(A) \text{ ou } (\leq A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{os lower bounds de } A \}$$

$$\text{ubs}(A) \text{ ou } (\geq A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{os upper bounds de } A \}$$

Quem seria um (o?) melhor $\frac{\text{u.b.}}{\text{l.b.}}$?

max, min, top, bottom

$$m \text{ é } \frac{\text{máximo}}{\text{mínimo}} \text{ de } A \iff \underbrace{m \geq A}_{\text{m é um u.b. de A}} \text{ \& } \underbrace{m \leq A}_{\text{m é um l.b. de A}} \text{ \& } m \in A$$

Escrevemos



$$m = \max A$$

$$m = \min A$$

↳ mas não é a (=)

$$- = \max - : P \times \text{Set } P \rightarrow \text{Prop}$$

HW: justificar

top $(\top_P)$: um ^{o?} máximo de P

bottom $(\perp_P)$: um _{o?} mínimo de P

fechos

vs

bounds

$A^\uparrow, A^\downarrow, a^\uparrow, a^\downarrow,$

$(\leq A), (\geq A)$: Set $\mathcal{P}$

$a^\uparrow \stackrel{\text{def}}{=} \text{[diagram]}$

$A^\uparrow \stackrel{\text{def}}{=} \text{[diagram]}$

$a^\uparrow \stackrel{?}{=} \{a\}^\uparrow$

$a^\downarrow \stackrel{\text{def}}{=} ?$

$A^\downarrow \stackrel{\text{def}}{=} ?$

$A^\uparrow$ vs $(\geq A)$

$\emptyset^\uparrow = \emptyset \quad (\geq \emptyset) = \mathcal{P}$

Melhores bounds

lec05a

2025-06-09

x é um melhor ub $\iff x$ é o menor u.b. (lub)

x é um melhor lb $\iff x$ é o maior l.b. (glb)

$\text{lub} : \text{Set } P \rightarrow P = \text{lub} _ : P \times \text{Set } P \rightarrow \text{Prop}$

$x = \text{lub } A \iff \begin{matrix} \text{\textit{x é um u.b.}} \\ x \geq A \end{matrix} \ \& \ \underbrace{\begin{matrix} \text{\textit{x é o melhor}} \\ (\forall c \geq A) [x \leq c] \end{matrix}}$

$x = \text{glb } A \iff \begin{matrix} \text{\textit{x é um l.b.}} \\ x \leq A \end{matrix} \ \& \ \underbrace{\begin{matrix} \text{\textit{x é o melhor}} \\ (\forall c \leq A) [x \geq c] \end{matrix}}$

lub sup (remum) join $\vee$ $\vee$ $\sqcup$ $\sqcup$...

glb inf (imum) meet $\wedge$ $\wedge$ $\sqcap$ $\sqcap$..

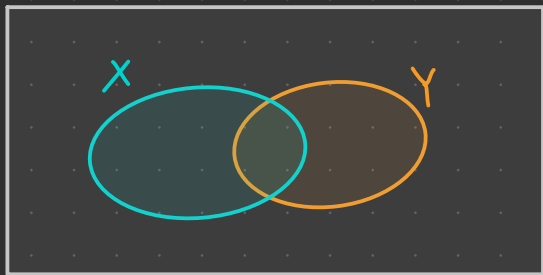


$\text{lub } \{a, b\} \uparrow$

Joins & meets no pA

$(pA; \subseteq)$

A



$$X \vee Y = X \cup Y$$

$$X \wedge Y = X \cap Y$$

Garantias: ?-cpo, (semi)reticulados, ...

P : Poset

P $\bigvee$ -semiretilado $\stackrel{\heartsuit}{\iff}$ garante $\bigvee$ binários
n-ários ($\bigvee$ de finitos)

P reticulado $\stackrel{\heartsuit}{\iff}$ garante $\bigvee, \bigwedge$ de finitos vs binários

P reticulado completo $\stackrel{\heartsuit}{\iff}$ garante $\bigvee, \bigwedge$

P wcpo $\stackrel{\heartsuit}{\iff}$ garante $\bigvee$ de w-chains

P dcpo $\stackrel{\heartsuit}{\iff}$ garante $\bigvee$ de directed

$D \subseteq P$ $\uparrow$ -directed $\stackrel{\heartsuit}{\iff}$ garante ub. de finitos
 $\uparrow$ dirigido

inj & sobrej revisitadas

lec05b
2025-06-09

$$f : A \rightarrow B$$

$$f \text{ inj} \iff (\forall a, a') [f a = f a' \Rightarrow a = a']$$

$$f \text{ sobrej} \iff (\forall b)(\exists a) [a \xrightarrow{f} b]$$

$$\cancel{f} a = \cancel{f} a' \stackrel{?}{\Rightarrow} a = a' \quad a, f : \mathbb{R}$$

$$\text{Sup } f a = f a'.$$

$$\text{Logo } f^{-1} (f a) = f^{-1} (f a') \quad [f \neq 0, (f^{-1} \cdot)]$$

$$\text{Logo } (f^{-1} f) a = (f^{-1} f) a' \quad [(\cdot) \text{-ass.}]$$

$$\text{Logo } 1 a = 1 a' \quad [(f^{-1}) \text{ inv}]$$

$$\text{Logo } a = a' \quad [1 \text{ id}]$$

$(\circ)$ vs $(@)$

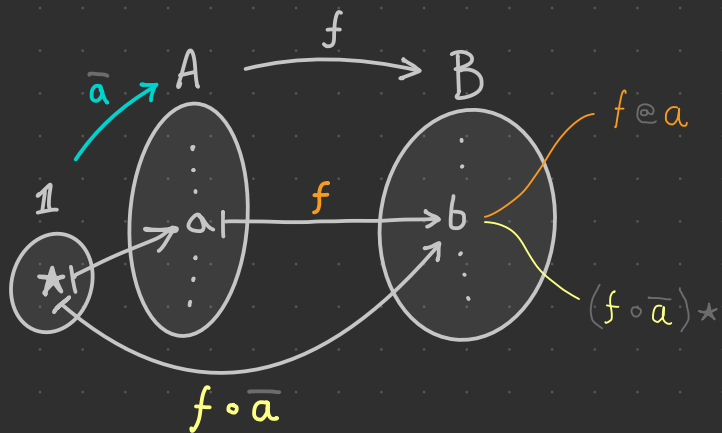
$$f \text{ inj} \iff \underbrace{\left(f @ a = f @ b \Rightarrow a = b \right)}_{\substack{\text{função} \swarrow \searrow \\ \text{pontos} \nearrow \nwarrow}}$$

parece L-cancelamento mas para qual operação?

$(@)$ não é nem entre funções nem entre pontos

$$f \text{ L-canc} \iff \left(f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v \right) \quad D \xrightarrow[u]{u} A \xrightarrow{f} B$$

$$f \text{ R-canc} \iff \left(u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v \right) \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow[v]{u} C$$

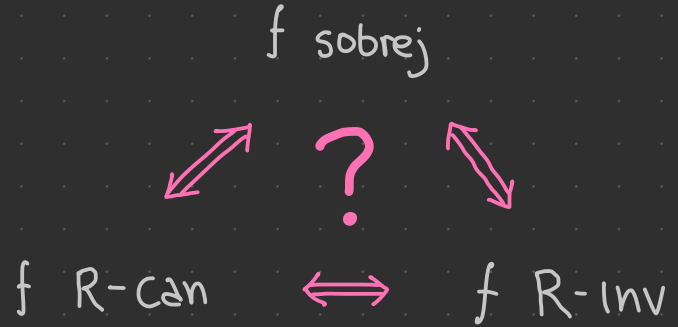
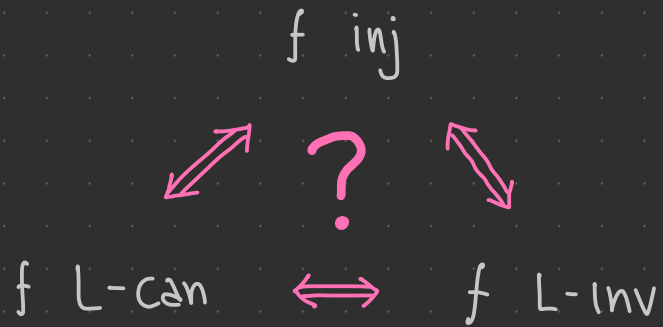


$$(f \circ g) a = f (g a)$$

$$\underbrace{(f \circ g) @ a \stackrel{\text{def}}{=} f @ (g @ a)}_{(\circ) - \text{def}}$$

$$\underbrace{(f \circ g) \circ \bar{a} = f \circ (g \circ \bar{a})}_{(\circ) - \text{assoc}}$$

Será...?



Reticulados

lec06
2025-06-13

$\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}; \leq) : \text{Poset}$

$(\leq) : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \text{Prop}$

$(\leq)$ ordem (parcial)
(refl, trans, antis)

leis: garantidos:

$\hookrightarrow$ join
($\vee$) binários

($\wedge$) binários
 $\hookrightarrow$ meet

$\perp$

$\top$

$$\overline{a \leq a \vee b}$$

$$\overline{b \leq a \vee b}$$

$$a \leq c$$

$$b \leq c$$

($\vee$)

$$a \vee b \leq c$$

$$\overline{a \wedge b \leq a}$$

$$\overline{a \wedge b \leq b}$$

$$c \leq a$$

$$c \leq b$$

($\wedge$)

$$c \leq a \wedge b$$

$$\overline{}$$

$$a \leq \top$$

$\top$

$$\overline{}$$

$$\perp \leq a$$

$\perp$

Procurando leis algébricas (equações)

comutatividades : $a \vee b = b \vee a$

associatividades : $(a \wedge b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Investigar!

idempotências : $a \vee a = a$

identidades : $\frac{1}{1} \vee a = a$ & $a \vee \frac{1}{1} = a$

absorções : $a \wedge (a \vee b) = a$

anihiladores : $\frac{1}{1} \wedge d = \frac{1}{1}$ & $d \wedge \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$

caso 0-ário

distributividades : $(a \vee b) \wedge d = (a \wedge d) \vee (b \wedge d)$ & ...

Lattice

$$\mathcal{L} \equiv (L; \vee, \wedge, \overset{0}{\perp}, \overset{1}{\top})$$

$$(\vee), (\wedge) : L \times L \rightarrow L$$

$$\perp, \top : \mathbb{1} \rightarrow L$$

$(\vee), (\wedge)$ - com

$(\vee), (\wedge)$ - assoc

$(\vee), (\wedge)$ - idem

$\perp$ - id($\vee$) $\top$ - id($\wedge$)

$(\vee, \wedge)$ - absorção $(\wedge, \vee)$ - absorção

Outros nomes:

$\{0, 1\}$ - lattice

$\{\perp, \top\}$ -

bounded

:

Reticulado $\longleftrightarrow$ Lattice

$$\mathcal{R} \equiv (\mathcal{R}; \leq; \text{reticulado}) \xrightarrow{\text{toLat}} \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{R}; \vee_{\mathcal{R}}, \wedge_{\mathcal{R}}, \perp_{\mathcal{R}}, \top_{\mathcal{R}}; \text{lattice})$$

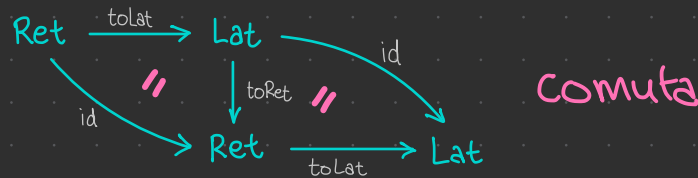
$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}; \leq_{\mathcal{L}}; \text{reticulado}) \xleftarrow{\text{toRet}} \mathcal{L} \equiv (\mathcal{L}; \vee, \wedge, \perp, \top; \text{lattice})$$

$$(\leq_{\mathcal{L}}) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \text{Prop}$$

$$a \leq_{\mathcal{L}} b \stackrel{\text{def}}{\iff} a \vee b = b \quad (\text{ou: } a \wedge b = a)$$

Precisamos mostrar a **reticulado** (isso inclui a parte poset).

Gostaríamos também
demonstrar que o



Semilattice

$$\mathcal{S} \equiv (S; \diamond, \mathbb{I})$$

$$\diamond : S \times S \rightarrow S$$

$$\mathbb{I} : \mathbb{1} \rightarrow S$$

$(\diamond)$ - com

$(\diamond)$ - assoc

$(\diamond)$ - idem

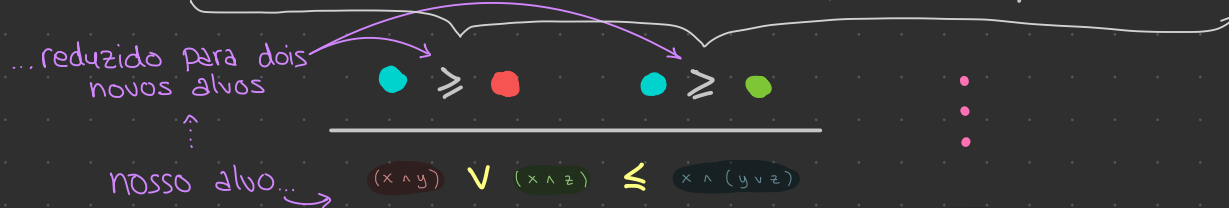
$\mathbb{I}$ - id($\diamond$)

$$\Theta. \vdash (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

Maneira de visualizar o alvo:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

Portanto basta: azul é um u.b. do {vermelho, verde}



Parte $\bullet \geq \bullet$:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y)$$

Visualizo assim:

$$x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge y$$

Portanto basta: azul é um l.b. do {vermelho, verde}

i.e., azul $\leq$ {vermelho, verde}

E se visualizar assim?

$$x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge y$$

Parte $\bullet \geq \bullet :$...

...

Outra maneira de visualizar o alvo original:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

Portanto basta: azul é um l.b. do {vermelho, verde}:

$$\bullet \leq \bullet$$

$$\bullet \leq \bullet$$

Parte $\bullet \geq \bullet :$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

...

...

(Veja lec01 de BabyCats)
2025-06-16

lec07
2025-06-16

(Veja lec02 de BabyCats)
2025-06-23

lec08
2025-06-23



(Veja lec03 de BabyCats)
2025-06-25

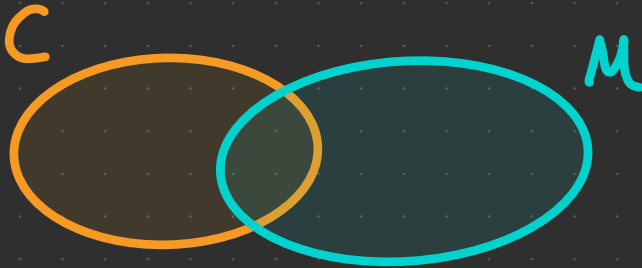
lec09
2025-06-25

Fundamentos ...

lec10
2025-06-27

... < Matemáticos para Computação
Computacionais para Matemática

Enquete



Fundamentos

Paradoxo Russell

(Russell)

Tipos

construções

(Zermelo)

Conjuntos

coleções

Uma inconsistência nos nomes

Teoria dos Grupos

$$(\forall x)(x \cdot e = x)$$

↳ x não é um grupo

x é um membro de um grupo
(não temos um nome pra isso)

$= \in$ urelementos

Princípio da puridade

Universos ZF
Teoria dos ~~conjuntos~~

$$(\forall a)(\forall b)(\exists s)[\dots]$$

↳ a é um "conjunto"

a é um membro de um "universo ZF"

$$(e) \cdot \overset{u}{\text{Set}} \rightarrow \overset{u}{\text{Set}} \rightarrow \text{Prop}$$

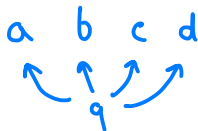
Princípio da pureza

$(\forall x) [x \text{ Set}]$ (elimina a possibilidade de urelementos)

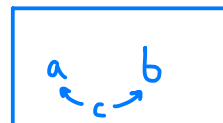
urelemento é um objeto que não é conjunto

FOL (com $(=)$)

com um predicado binário $(\in)$.



Axiomas ZF



$\{a, b\}$

ZF1 + 2 + 3 +

Extensionality.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \quad \text{A. ZF4} \quad (\text{ZF1})$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \quad \text{B. ZF5} \quad (\text{ZF2})$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \quad \text{C. ZF4 + ZF5} \quad (\text{ZF3})$$

Separation (schema).

Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \quad \text{D. } \varphi \quad (\text{ZF4})$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \quad (\text{ZF5})$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a)) \quad (\text{ZF6})$$

Infinity.

$$\exists i (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \quad \text{vN} \quad (\text{ZF7})$$

Replacement (schema).

Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:

$$\text{para todo conjunto } a, \text{ a classe } \{\Phi(x) \mid x \in a\} \text{ é um conjunto.} \quad (\text{ZF8})$$

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset) (\exists d \in a) [d \cap a = \emptyset] \quad (\text{ZF9})$$

Teoria (axiomática) dos Universos-ZF

Inventário:

$\emptyset$

$\{-, -\}$

$\{-\}$

$- \subseteq -$

$\mathcal{P}-$

$- \cap -$

$- \cup -$

$\cap -$

$\cup -$

$- \Delta -$

$- \setminus -$

$$a \subseteq b \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x [x \in a \Rightarrow x \in b]$$

$$e \text{ vazio} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x)[x \notin e]$$

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

$\mathcal{P}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é novo?

$$\emptyset. (\forall x)[\emptyset \subseteq x]$$

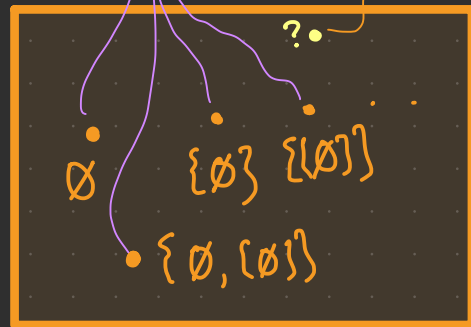
cujos habitantes
chamamos de

Conjuntos

uns dos "conjuntos"
deste Universo-ZF

aqui um deles

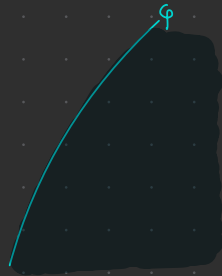
$\mathcal{U}$



Separação [esquema]

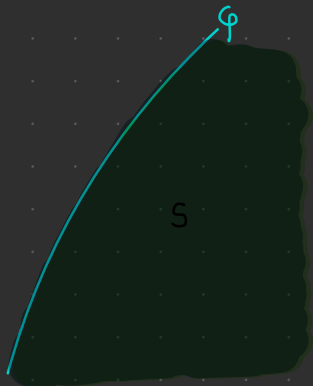
Considere uma $\phi : U \rightarrow \text{Prop}$

Ela separa o universo assim:



set-builder geral (General Comprehension)

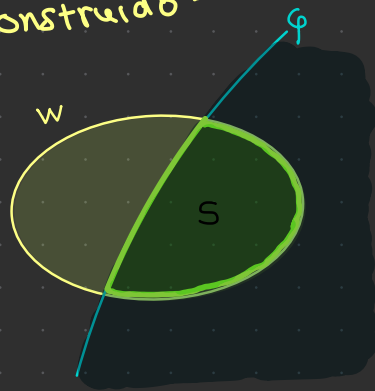
$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid \phi(x) \}$$



set-builder separador (Sep $_{\phi}$ de Zermelo)

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in W \mid \phi(x) \}$$

já construído $\nearrow$



Axioma da infinidade

$$x^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x\} \quad (\text{Zermelo})$$

$$x^+ \stackrel{\text{def}}{=} x \cup \{x\} \quad (\text{von Neumann})$$

$$\text{ZF7. } (\exists i) [\emptyset \in i \ \& \ \underbrace{i \text{ } ^+\text{-fechado}}_{(\forall x \in i) [x^+ \in i]}]$$

$$\text{Seja } I \stackrel{\text{def}}{=} \{ \emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots \} \quad [\text{ZF7}]$$

(não compila!)

Uns números

$$0 \equiv_{\mathcal{E}_f} \emptyset$$

$$1 \equiv_{\mathcal{E}_f} \{0\}$$

$$2_{\mathbb{Z}} \equiv_{\mathcal{E}_f} \{1\}$$

$$3_{\mathbb{Z}} \equiv_{\mathcal{E}_f} \{2\}$$

$\vdots$

$$2_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathcal{E}_f} \{0, 1\}$$

$$3_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathcal{E}_f} \{0, 1, 2\}$$

$\vdots$

n -Tuplas

$$\langle _, _ \rangle : U \times U \rightarrow U$$

$$\langle l, r \rangle_K \equiv_{\mathcal{E}_f} \{\{l, r\}, \{l\}\}$$

$$\Theta. \langle l, r \rangle = \langle l', r' \rangle \Leftrightarrow \dots$$

$$\text{Defina: } \pi_1, \pi_2, \text{ t q. } \dots$$

$$a \times b \equiv \{ \langle l, r \rangle \mid l \in a, r \in b \}$$

$\parallel$

classe

$$\{ t \in \text{pp}(a \times b) \mid (\exists l \in a)(\exists r \in b)[t = \langle l, r \rangle] \}$$

$$\Theta. \text{ a classe } \{ \{x\} \mid x \in a \} \text{ é um conjunto}$$

lec11

2025-06-30

Relações

Representamos a relação $R : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \text{Prop}$

pelo seu gráfico: $\text{graph}(R) \equiv \{ \langle a, b \rangle \mid a R b \}$

r é uma relação de a para $b \overset{\text{def}}{\iff} r \subseteq a \times b$

⊖. $\text{Rel}(a, b)$ é um conjunto

$a R b \overset{\text{def}}{\iff} \langle a, b \rangle \in R$

Funções

f é uma função de a para $b \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é uma relação de a para b

sem isso temos uma função parcial $\left[\begin{array}{l} \& f \text{ é } L\text{-total} \\ \& f \text{ é } \underbrace{R\text{-unique}}_{\text{(funcional)}} \end{array} \right.$

Θ . $(a \rightarrow b)$ é um conjunto

$$fx = y \stackrel{\text{sig}}{\iff} \langle x, y \rangle \in f$$

$$fx \equiv \text{aquele } y \in b \text{ t.q. } fx = y$$

$$f \text{ é uma função} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists a)(\exists b)(\exists g)[f = \langle a, g, b \rangle$$

$\& g$ é uma função de a para b]

$$\text{dom } f \equiv \pi_1 f \quad \text{cod } f \equiv \pi_3 f$$

$$\frac{\langle x, y \rangle \in f \quad \langle x, y' \rangle \in f}{y = y'}$$

Class-functions

(operadores,
"funções")

lec12
2025-07-02

$$(\forall x)(\exists! y) [\varphi(x, y)]$$

$$\vdash \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{aquele (único) } y \text{ t.q. } \varphi(x, y).$$

Exemplos

$$\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$$

$$\vdash \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{\iff} \{x\} = y$$

$$\frac{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}{\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}} \text{Rep } [\Phi(x) := \{x\}]$$

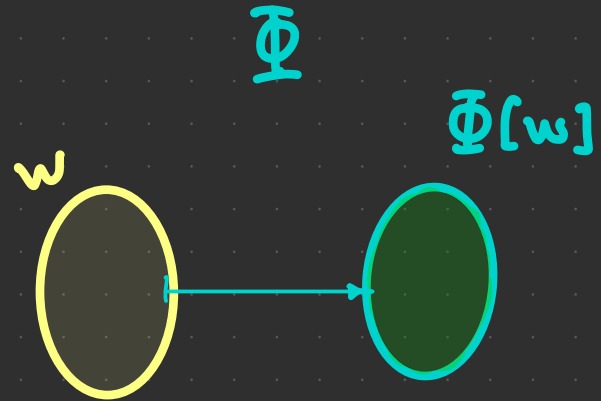
$$\wp : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$$

Replacement (scheme)

Separation:



Replacement:



$$(\forall x)(\exists! y)[\varphi(x, y)]$$
$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{aquele } y \text{ t.q. } \varphi(x, y)$$

Especificação do $\mathbb{N}$ (Peano)

$\mathcal{N} \equiv (\mathbb{N}; 0, S)$ sistema Peano

$N, 0, S : \text{Obj}^{(\text{Set})}$ } $\left\{ \begin{array}{l} \text{isso é} \\ \text{como o} \\ \text{ZF-ista} \\ \text{enxerga} \\ \text{isso} \end{array} \right.$ } $\left\{ \begin{array}{l} N : \text{Type / Set} \\ 0 : N \\ S : N \rightarrow N \end{array} \right.$

1. $0 \in N$

2. $S \in (N \rightarrow N)$

3. $0 \notin S[N]$, $0 \notin \text{Range}(S)$

4. S injetiva

5. Para qualquer $X \subseteq N$:

$$0 \in X \text{ \& } X \text{ é } S\text{-fechado} \Rightarrow X = N$$

Θ. Unicidade do $\mathbb{N}$

$$\mathcal{N}_1 \equiv (N_1; 0_1, S_1) \text{ peano}$$

$$\mathcal{N}_2 \equiv (N_2; 0_2, S_2) \text{ peano}$$

$$\vdash \mathcal{N}_1 \cong \mathcal{N}_2 \iff (\exists \pi \in (N_1 \rightarrow N_2)) [\pi \text{ iso}]$$

HW
ou bij?

$$\pi 0_1 = 0_2$$

$$\pi (S_1 n) = S_2 (\pi n)$$

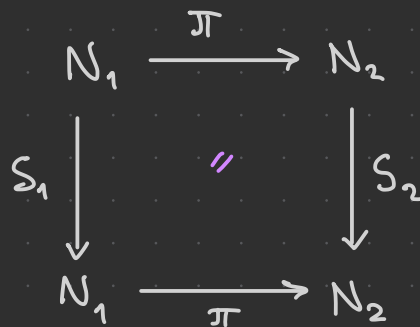


Tentativa:

Seja $\pi : N_1 \rightarrow N_2$ definida pelas

$$\pi 0_1 \equiv 0_2$$

$$\pi (S_1 n) \equiv S_2 (\pi n)$$



Θ. Recursão

$\mathcal{N} \equiv (N; 0, S)$ peano

$A : \text{Set}$

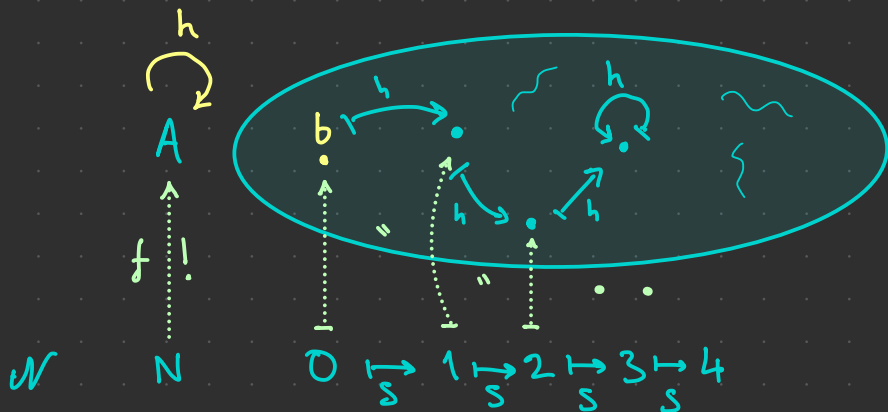
$b \in A$

$h \in (A \rightarrow A)$

$\vdash (\exists! f) [f \in (N \rightarrow A)$

$\& f 0 = b \rightsquigarrow \langle 0, b \rangle \in f$

$\& (\forall n \in N) [\underbrace{f(Sn) = h(f_n)}_{\langle Sn, h(f_n) \rangle \in f}]$



Atende mesmo nossas necessidades?

Como achamos os $b : A$ e $h : A \rightarrow A$?

Ideia:

($A := \text{String}$)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A$$

$$f \ 0 = \boxed{\text{"hi"}}$$

$$f \ (S n) = \boxed{(f \ n) \ ++ \ \text{" mundo"}}$$

$$b : A$$

$$b = \boxed{\text{"hi"}}$$

copy-paste

parametrizar
o $(f \ n)$

$$h : A \rightarrow A$$

$$h \ x \equiv \boxed{x \ ++ \ \text{" mundo"}}$$

HW ↴

...mas aqui não funciona:

$$f \ 0 = \boxed{1}$$

$$f \ (S n) = \boxed{n \ (f \ n)}$$

$$b = \boxed{1} \text{ (beleza)}$$

$$h \ x = \boxed{n \ x}$$

↳ quem é?

Aproximações da desejada função

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$$

$$f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle 0, b \rangle \}$$

$$f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle 0, b \rangle, \langle 1, hb \rangle \}$$

∴ ↪ temos como justificar?

(Estamos tentando demonstrar o Θ . recursão!)

↪ temos isso como conjunto mesmo?

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i f_i \stackrel{\text{sup}}{=} \bigcup \{ f_i \mid i \in \mathbb{N} \}$$

↪ não temos ainda (resolva!)

$$f \in (N \rightarrow A) \subseteq N \times A$$

$$f_i \in (N \rightarrow A) \subseteq N \times A$$

$$\bigcup \{ p \in \wp(N \times A) \mid p \text{ é uma } b, h\text{-aproximação} \}$$

$(N \rightarrow A)$ HW

$$\bigcup \{ p \in \mathcal{P}(N \times A) \mid p \text{ é uma } b, h\text{-aproximação} \}$$

$$(N \rightarrow A)$$



$$0 \in \text{Domain}(p)$$

$$\& \quad p \, 0 = b \quad \overset{\text{sup}}{\iff} \quad \langle 0, b \rangle \in p$$

$$\& \quad (\forall n) [\, s_n \in \text{Domain}(p) \,$$

$$\Rightarrow \quad n \in \text{Domain}(p)$$

$$\& \quad s_n \xrightarrow{p} h(p \, n)]$$

0. Existência do $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{N} \equiv \{ \emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \dots \}$.

$\mathcal{I} \equiv \{ I \mid I \text{ conjunto de nats com possível lixo} \}$

$\mathcal{I} \equiv \{ \underbrace{C \subseteq I}_{C \in \wp I} \mid \underbrace{\varphi(C)}_{\substack{\text{copy-paste} \\ \text{do ZF7: } C \ni \emptyset \text{ \& } C \text{ } ^+\text{-fechado}}} \}$

$\mathbb{N} \equiv \cap \mathcal{I}$

$\mathbb{N} \equiv (N; 0, S)$

$0 \equiv \emptyset$

$S \equiv -^+$

$S \equiv \dots$

HW: Demonstrar que
atende à especificação

Construindo outros sistemas numéricos

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$
 $\hookrightarrow \mathbb{Z}$ diferenças **formais** de naturais

$$3 - 8 \sim -5 \quad 9 - 4 \sim 5$$

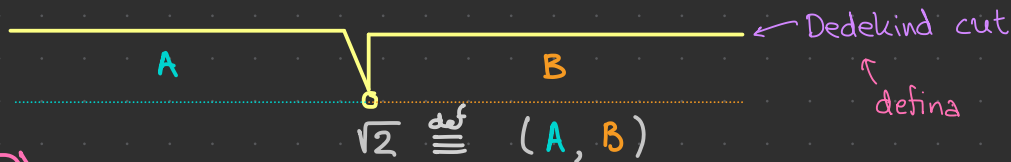
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \text{ onde } n - m \cong n' - m' \stackrel{\text{def}}{\iff} n + m' = n' + m$$

$\hookrightarrow \mathbb{Q}$ frações **formais** de inteiros ...

$\hookrightarrow \mathbb{R}$ Cantor: faltam uns limites de seq. **Cauchy**.

Representar como (classes de) seq. Cauchy. ($\cong$) = ?

Dedekind:

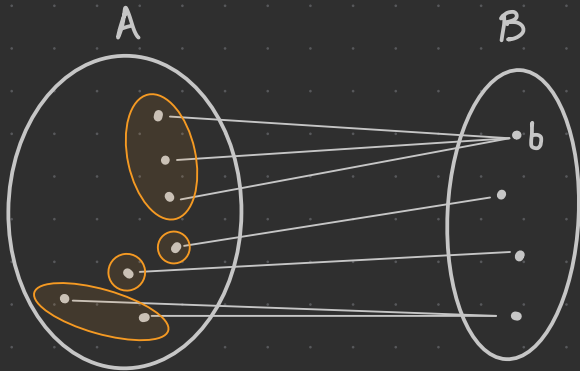
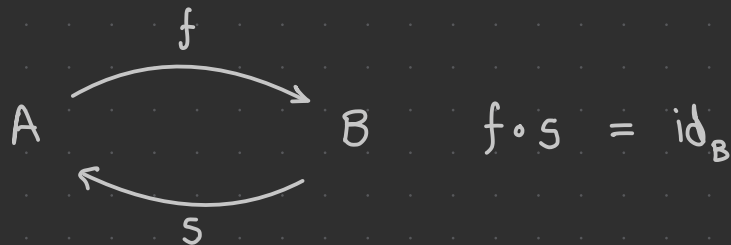


HW: resolver $A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\} = \{x \mid x^2 \leq 2\} \cup (<0)$

O axioma da escolha (AC)

$$\text{ZF} \vdash \text{AC} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{AC}' \Leftrightarrow \dots$$

Toda sobrejeção possui secção VS Banach - Tarski



Axioma da fundação (ou: regularidade)

Joguinho:

o conjunto na mesa no dia 0

$$A_0 =: \{ \quad , \quad , \quad , A_1 , \quad \dots \}$$

$$A_1 =: \{ \quad , A_2 , \quad , \quad , \quad \dots \}$$

$$A_2 =:$$

morreria

$$\hookrightarrow A = \{ \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \}, \emptyset \} , \{ \{ \{ \emptyset \} \} \} \}$$

$$\hookrightarrow A = \{ \{ A \}, A \}$$

sobreviveria