FMC2, 2024.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova CFR2.2
(points: 58; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome:

2024-07-08

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Escolha até duas das **D, P, I, C**.

X. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Definição. Seja L reticulado e $I \subseteq L$. Chamamos I de *ideal* de L sse I é habitado, downset, e $(\vee)$-fechado.

Definições. Sejam A conjunto e $(\prec)$ uma relação binária sobre A.
Dizemos que $(\prec)$ *não possui cadeias descendentes infinitas* (c.d.i.) sse não existe seqüência $(a_n)_n$ de membros de A tal que:

$$\cdots \prec a_2 \prec a_1 \prec a_0.$$

Dizemos que $(\prec)$ é *bem-fundada* sse cada conjunto habitado $X \subseteq A$ possui membro m tal que nenhum $x \in X$ satisfaz $x \prec m$. (Tal m é chamado $(\prec)$-*minimal*.)

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(29) **D**

Sejam A conjunto e $(\prec)$ uma relação binária sobre A.
Considere a afirmação:

$$(\prec) \text{ é bem-fundada} \iff (\prec) \text{ não possui c.d.i.}$$

Demonstre a $(\Rightarrow)$ e dê um esboço da $(\Leftarrow)$.
DEMONSTRAÇÃO.

(29) **P**

Sejam P e Q posets, e $\varphi : P \hookrightarrow Q$ um order-embedding, ou seja, uma função que preserve e reflete as ordens:

$$x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y).$$

Demonstre que φ é injetora.
DEMONSTRAÇÃO.

(29) **I** *Demonstre **exatamente uma** das **I1**, **I2**.*

I1. Sejam L, K reticulados cotados e $f : L \to K$ homomorfismo. Logo $f^{-1}(0)$ é um ideal de L.
I2. Seja L reticulado e,

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$$

uma ($\subseteq$)-cadéia de ideais de L. Logo $\bigcup_n J_n$ é um ideal.
Demonstração de __.

(29) **C** *Escolhe **exatamente uma** das **C1**, **C2**, **C3**.*

Em qualquer reticulado,

C1. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ & $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
C2. $x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$;
C3. $(- \vee c)$ e $(- \wedge c)$ são monótonas.

Demonstração de __.

Só isso mesmo.

Rascunho