

---

Nome:

---

2024-07-08

**Regras:**

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$ .<sup>2</sup>
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- IX. Escolha até duas das **D, P, I, C**.
- X. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

**Definição.** Seja  $L$  reticulado e  $I \subseteq L$ . Chamamos  $I$  de *ideal* de  $L$  sse  $I$  é habitado, downset, e  $(\vee)$ -fechado.

**Definições.** Sejam  $A$  conjunto e  $(\prec)$  uma relação binária sobre  $A$ . Dizemos que  $(\prec)$  *não possui cadeias descendentes infinitas* (c.d.i.) sse não existe seqüência  $(a_n)_n$  de membros de  $A$  tal que:

$$\dots \prec a_2 \prec a_1 \prec a_0.$$

Dizemos que  $(\prec)$  é *bem-fundada* sse cada conjunto habitado  $X \subseteq A$  possui membro  $m$  tal que nenhum  $x \in X$  satisfaz  $x \prec m$ . (Tal  $m$  é chamado  $(\prec)$ -*minimal*.)

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(29) **D**

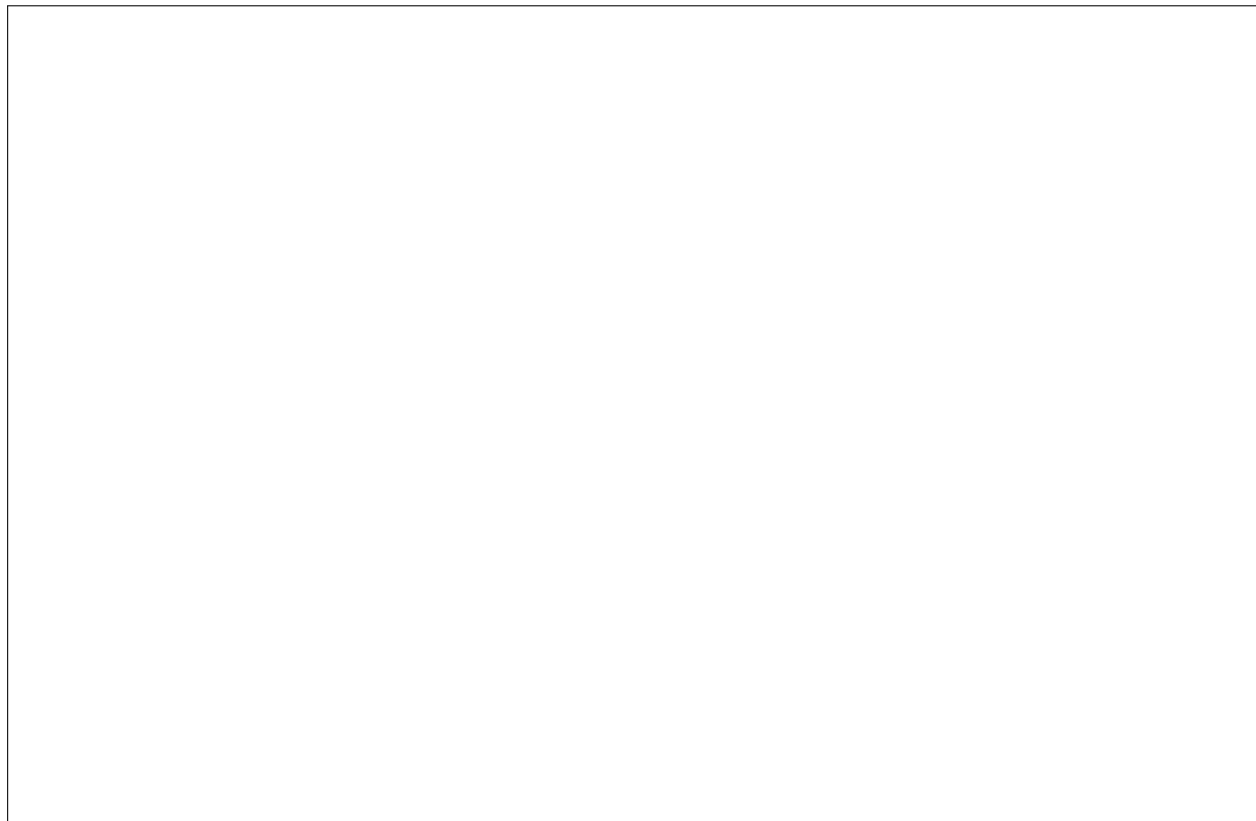
Sejam  $A$  conjunto e  $(\prec)$  uma relação binária sobre  $A$ .

Considere a afirmação:

$$(\prec) \text{ é bem-fundada} \iff (\prec) \text{ não possui c.d.i.}$$

Demonstre a  $(\Rightarrow)$  e dê um esboço da  $(\Leftarrow)$ .

DEMONSTRAÇÃO.



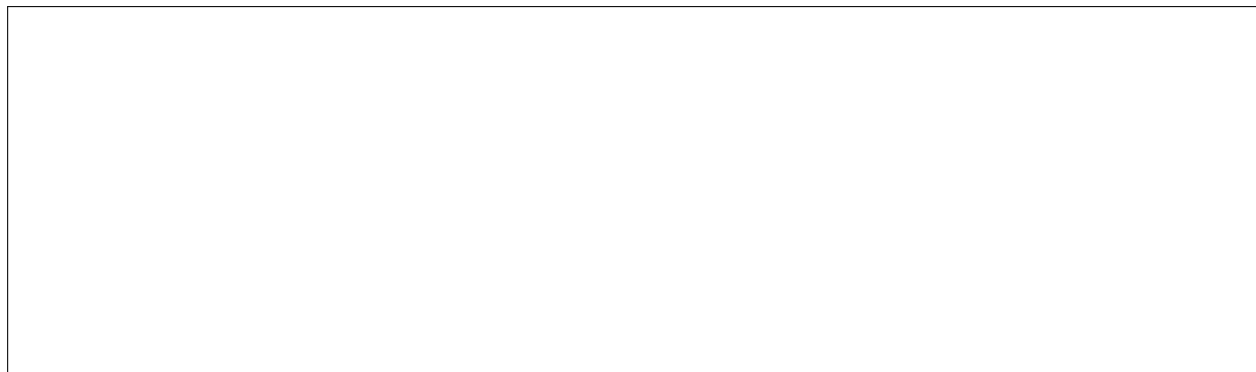
(29) **P**

Sejam  $P$  e  $Q$  posets, e  $\varphi : P \hookrightarrow Q$  um order-embedding, ou seja, uma função que preserve e reflète as ordens:

$$x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y).$$

Demonstre que  $\varphi$  é injetora.

DEMONSTRAÇÃO.



(29) **I**

*Demonstre exatamente uma das I1, I2.*

**I1.** Sejam  $L, K$  reticulados cotados e  $f : L \rightarrow K$  homomorfismo. Logo  $f^{-1}(0)$  é um ideal de  $L$ .

**I2.** Seja  $L$  reticulado e,

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$$

uma  $(\subseteq)$ -cadéia de ideais de  $L$ . Logo  $\bigcup_n J_n$  é um ideal.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_.

(29) **C**

*Escolhe exatamente uma das C1, C2, C3.*

Em qualquer reticulado,

**C1.**  $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  &  $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ;

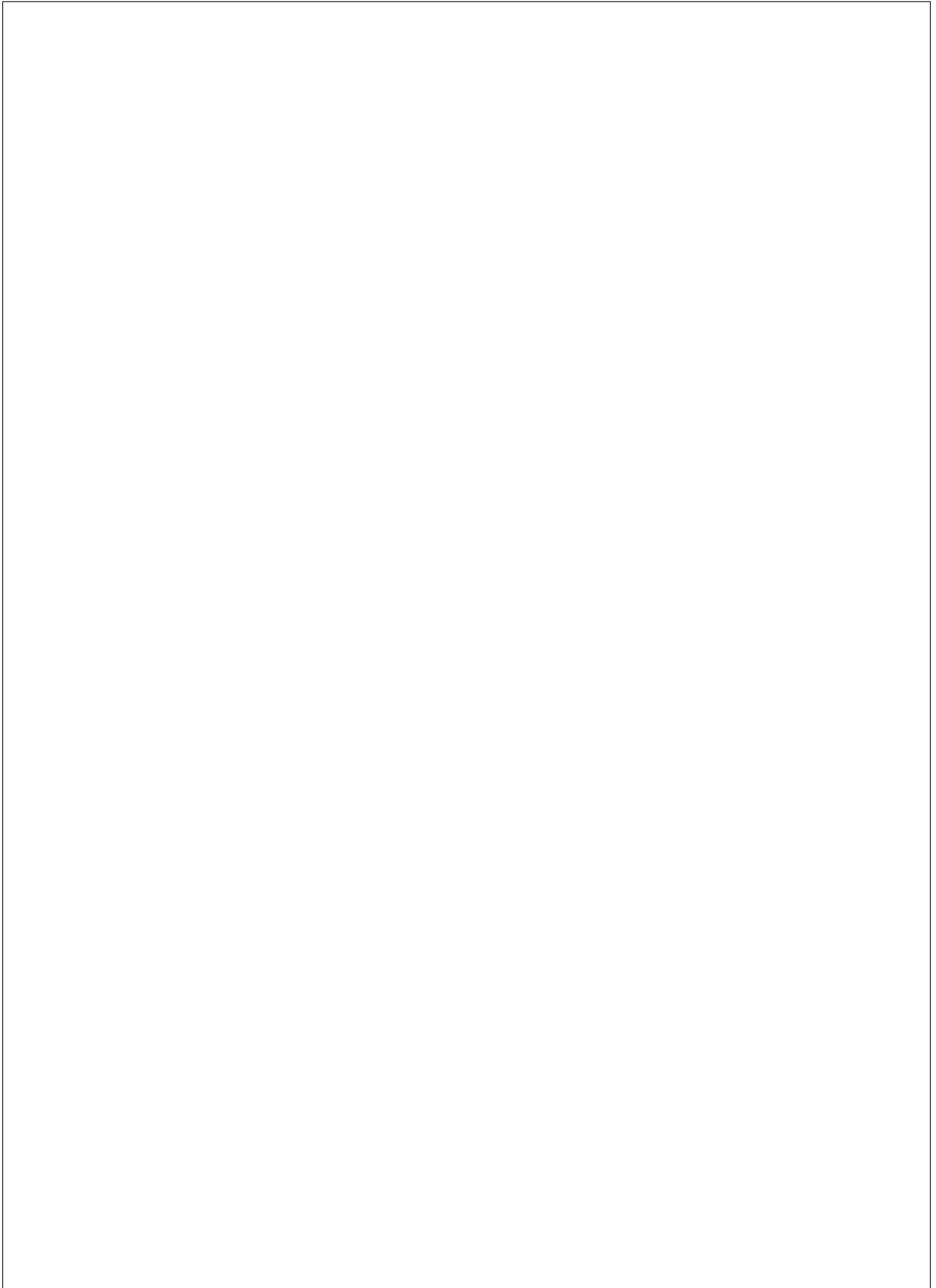
**C2.**  $x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ ;

**C3.**  $(- \vee c)$  e  $(- \wedge c)$  são monótonas.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_.

Só isso mesmo.

## LEMMATA



RASCUNHO