t.q. $D=\{d_0,\dots,d_{n-1}\}$

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a=-a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.

por que se preocupar com isso?

DEMONSTRAÇÃO DA E3. precisa solicitar $d \neq 0$ não tens isso nos dados

Seja $d \in D$. Preciso achar $d' \in \boxed{D \setminus \{0\}}$ tq $dd' = 1$.
Como D ~~(domínio de integridade)~~ finito, logo sejam $\boxed{d_0, d_1 \dots d_n}$
Considere os $dd_0, dd_1 \dots dd_n$ $\boxed{\in D \setminus \{0\}}$
Logo sejam $i, j \in \overline{n}$ tq $dd_i = dd_j$.
Logo $d_i = d_j$ e logo $i = j$. [R-can]
Logo $1 \in \{d_0, d_1 \dots d_n\}$.

- sem verbo!
- assim são arbitrários

-fácil, pois permitiu $i=j$

donde chegou isso?

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de aneis.
Seja $J \trianglelefteq B$. Preciso mostrar que $\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq A$.
Vou demonstrar $\varphi^{-1}[J] \leq A$.
Hab: Como $\varphi(e_A) = e_B$ e $J \leq B$ logo $\varphi^{-1}[J]$ hab.
$\qquad\qquad\quad 0 \quad\; 0$
Div-fech:

Vou demonstrar $(\forall j \in \varphi^{-1}[J])(\forall a \in A)[ja \in \varphi^{-1}[J]\ \&\ aj \in \varphi^{-1}[J]]$.
Sejam $j \in \varphi^{-1}[J]$ e $a \in A$.

nome ruim

Só isso mesmo.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

$a+a=0$ $\Rightarrow ab=ba$

$ab\,ab = ba\,ab$

$ab = ba \cdot ab$

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a=-a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E1.

(i) $a = -a$
Seja $a \in R$
Basta demonstrar $a+a=0$
sorry ✗

inventou um lemma estranho que deveria ser corolário imediato dos (i), (ii) para demonstrá-los e acabou nem fechando... :-/

(ii) R comutativo
Sejam $a, b \in R$
-- Preciso $ab = ba$
Pelo (i), tenho $ab = -(ab)$
Pelo (Lemma1), tenho $-(ab) = -(-ba)$
Logo $ab = ba$

(18) **O**

$ir \in \varphi^{-1}(J)$

$ri \in \varphi^{-1}(J)$

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

qual é o alvo aqui??

Sejam R, S anéis
Seja $\varphi : R \to S$ homo
Seja $J \trianglelefteq S$

-- Parte $\varphi^{-1}(J) \leq R$: ✓
-- $0_R \in \varphi^{-1}(J)$ ✓
Como φ homo, $\varphi(0_R) = 0_S$
-- Parte $\varphi^{-1}(J)$ é $(-)$-fechado
sejam $a, b \in \varphi^{-1}(J)$ ✓
Sejam R_a, R_b t.q. $\varphi(R_a) = a$, $\varphi(R_b) = b$ ✓

Basta demonstrar $\varphi(R_a - R_b) = a - b$
Calc: $\varphi(R_a - R_b) = \varphi(R_a) + \varphi(-R_b)$
$= a - \varphi(R_b)$
$= a - b$ ✓

-- Parte $(\forall i \in \varphi^{-1}(J))(\forall x \in R)[ix \in \varphi^{-1}(J)\ \&\ \dots]$
Sejam $i \in \varphi^{-1}(J)$, $r \in R$ ✓
✗ Seja $R_i \in R$ t.q. $\varphi(R_i) = i$ ✗ TYPE ERROR!
-- Parte $ir \in \varphi^{-1}(J)$
Basta demonstrar $\varphi(R_i r) \in J$
Calc: $\varphi(R_i r) = \varphi(R_i)\varphi(r)$
$= i \cdot \varphi(r)$
Pelo $J \trianglelefteq S$, $i \cdot \varphi(r) \in J$

Só isso mesmo.

$-a^2 = -a$ $(pq - qp)\cdot(pq - qp) = (pq - qp)\cdot pq$

$a \cdot a$

Lemmata

$(pq = -(qp))$ $pq \overset{(ii)}{=} qp \overset{(i)}{=} -(qp)$

Seja R anel booleano

Sejam $p, q \in R$

Basta demonstrar $pq - qp = 0$

Sorry

X

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E3.

Suponha D um domínio de integridade finito.
Preciso mostrar que cada $d \neq 0$ no D tem inverso.
Seja $d \in D$ t.q. $d \neq 0$. Procuro $d' \in D$ tg $dd' = 1$.
Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $d_1, d_2, \dots d_n$ todos os membros distintos de $D \setminus \{0\}$.
Considere os $dd_1, dd_2, \dots, dd_n$.
Sejam i, j tg $dd_i = dd_j$.
Logo $d_i = d_j$. [alam de canc]
Logo $i = j$.
Ou seja $D \setminus \{0\} = \{dd_1, dd_2, \dots, dd_n\}$ por que nenhum deles é zero?
Como $1 \in D \setminus \{0\}$, logo seja $u \in \{1, \dots, n\}$ tg $dd_u = 1$

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais. → hab, + fech, absorve

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam R, S aneis e $\varphi: R \to S$ homomorfismo
Seja $J \trianglelefteq S$
Para subanéis: imediato
(i) $\varphi^{-1}[J]$ hab
Como $0_S = \varphi(0_R) \in J$, logo $0_R \in \varphi^{-1}[J]$
(ii) $\varphi^{-1}[J]$ é (+) fechado por que isso é suficiente?
Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$
Logo $\varphi a, \varphi b \in J$. [def pre-im]
Logo $(\varphi a) + (\varphi b) \in J$. [J (+) fech]
Logo $\varphi(a + b) \in J$. [φ - homo]
Logo $a + b \in \varphi^{-1}[J]$ [def pre-im]
(iii) $\varphi^{-1}[J]$ absorve multiplicações
Seja $m_i \in \varphi^{-1}[J]$ e $r \in R$
Logo $\varphi_i \in J$
Logo $(\varphi r)(\varphi i) \in J$ [J ideal]
Logo $\varphi(ri) \in J$ [φ homo]
Logo $ri \in \varphi^{-1}[J]$
Similarmente $ir \in \varphi^{-1}[J]$.

Só isso mesmo.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1, E2, E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E2 .

seja $x \in R$ t.q $x \neq 0$ e $x \neq 1$

Vou demonstrar que $x - 1 \neq 0$:
  suponha $x - 1 = 0$
  logo $x = 1$ [Unicidade dos inversos aditivos]
  Contradição

Basta demonstrar que $x(x-1) = 0$

Calc:
$x(x-1) = xx + (x(-1))$ [distributividade L]
$= x + (x(-1))$ [Anel booleano]
$= x(1 + (-1))$ [$\leftarrow$ distributividade L]
$= x(0)$ [+-Inv R]
$= 0$ [~~[illegible]~~ x-anulador R]

nunca use

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

sejam A, B Anéis e φ homomorfismo de $A \to B$
seja $J \trianglelefteq B$

$\varphi^{-1}[J]$ $\varphi^{-1}[A]$

Basta demonstrar que $\varphi^{-1}[J] \leq^{+} A$ $\wedge (\forall g \in \varphi^{-1}[J])(\forall a \in A)[ga \in A \wedge ag \in A]$

Parte $\varphi^{-1}[J] \leq^{+} A$:
~~Parte~~ Basta demonstrar que $\varphi^{-1}[J] \subseteq A$ e $\varphi^{-1}[J]$ é --fechado one-Tot

& habitado!

Parte $\varphi^{-1}[J] \subseteq A$:
Imediato
Parte $\varphi^{-1}[J]$ é --fechado:

(−)

~~sejam ... [J]~~
~~Como J é um grupo ... φ(~~
seja $a, b \in \varphi^{-1}[J]$, ou seja $\varphi a, \varphi b \in J$
logo $(\varphi a)(\varphi b)^{-1} \in J$
logo $(\varphi a)(\varphi b^{-1}) \in J$ [homo-Inv]
logo $\varphi a b^{-1} \in J$ [homo-op]
logo $ab^{-1} \in \varphi^{-1}[J]$ [def]

~~Part~~

+ −(φb)

Parte R:

Só isso mesmo.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo. $(\forall d \neq 0)(\exists x)[dx = 1]$

DEMONSTRAÇÃO DA E3 .

Seja n m, $d_1, \dots, d_n$ t.q. $D = \{d_1, \dots, d_n\}$.
Seja $d \neq 0$.
~~Seja~~ $(d\cdot) : D \to D$, temos que $(d\cdot)$ inj. [Θ.1]
Como $(d\cdot)$ inj e D finito, logo $(d\cdot)$ é bij.
Logo, aplicando $(d\cdot)$ no D temos $\{dd_1, \dots, dd_n\} = D$.
Como $1 \in D$, logo, testemunho i t.q. $dd_i = 1$.
∎

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja homomorfismo de anéis $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.
Sejam $J \trianglelefteq \mathcal{B}$.
Parte $\varphi^{-1}[J] \subseteq \mathcal{A}$:
Trivial.

Parte $\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$:
$a, b \in A$ t.q. $\varphi a, \varphi b \in J$.
Sejam $\varphi a, \varphi b \in J$.
Basta demonstrar que $\varphi(a-b) \in J$.
Como $\varphi b \in J$, logo $-(\varphi b) \in J$. [J subgroup.inv(+)]
Logo $\varphi(-b) \in J$. [φ homo.inv(+)]
Como (φa) & $(\varphi(-b)) \in J$, logo $(\varphi a) + (\varphi(-b)) \in J$. [J subgroup.op(+)]
Logo $\varphi(a-b) \in J$. [φ homo.op(+)]

o que elas precisam para compilar?

Parte $(\forall i \in \varphi^{-1}[J])(\forall a \in \mathcal{A})[ia \in \varphi^{-1}[J]$ & $ai \in \varphi^{-1}[J]]$:
$i \in A$ t.q. $\varphi i \in J$
Sejam $(\varphi i) \in J$ & $a \in \mathcal{A}$.
Logo $\varphi a \in \mathcal{B}$.
Logo $(\varphi i)(\varphi a) \in J$. [$J \trianglelefteq \mathcal{B}$]
~~& $(\varphi a)(\varphi i) \in J$. [$J \trianglelefteq \mathcal{B}$]~~
Logo $\varphi(ia) \in J$ ~~& $\varphi(ai) \in J$~~. [φ homo.op(·)]
∎

Melhor tratar um lado e "similarar" o outro.

Só isso mesmo.

Θ.1 Seja A dom Cancel:

$(\forall a \in A)[a \neq 0 \Rightarrow (a\cdot)$ é injetiva$]$

DEMONS:

Seja $a \neq 0$.

Sejam x, y t.q. $a \cdot x = a \cdot y$.

Como $a \neq 0$, logo $x = y$. [A dom Cancel]

■

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E1 .

i):
Seja $P \in R$.
Basta demonstrar que $P+P=0$.
Calc:
$$P+P = (P+P)^2 \quad \text{— [R Booleano]}$$
$$= P^2+P^2+P^2+P^2$$
$$= P+P+P+P \quad \text{— [R Booleano]}$$
Logo $P+P$ é uma solução para a $P+P+\_ = P+P$.
Pela (Res-Uni) e pela $P+P+0 = P+P$, temos que $P+P=0$. ✓
■

ii):
Sejam $P, Q \in R$. Basta demons. que $(P+Q)(P-Q) = (P-Q)(P+Q)$.
por quê?
Calc:
$$(P+Q)(P-Q) = P^2 + (-PQ) + QP + (-Q)^2$$
$$= P^2 + PQ + (-QP) + (-Q)^2$$
$$= (P-Q)(P+Q)$$
■

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam A, B aneis e φ um homo entre eles.
Seja $J \trianglelefteq B$.
Parte $\varphi^{-1}[J] \leq A$:
Sabemos que $\varphi^{-1}[J]$ é hab pois a φ é um homo. (e...?)
basta demos que $(\forall a,b \in \varphi^{-1}[J])[a-b \in \varphi^{-1}[J]]$.
Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$.
Como $\varphi(a)$ e $\varphi(b) \in J$, logo $\varphi(a-b) \in J$. como?
Parte $(\forall i \in \varphi^{-1}[J])(\forall a \in A)[ia \in \varphi^{-1}[J] \land ai \in \varphi^{-1}[J]]$:
Sejam $i \in \varphi^{-1}[J]$ e $a \in A$.
Como $\varphi(i) \in J$ e $\varphi(a) \in B$ e $J \trianglelefteq B$, logo $\varphi(ia) \in J$.
Similarmente $\varphi(ai) \in J$.
■

pulou demais

Só isso mesmo.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E1 .

Seja $a \in R$. (i)
Calculemos:
$-a = (-a)^2$
$= a$ [Neg-prod] cadê?

(ii)
Sejam $a, b \in R$.
Calculemos:
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$
$= a + ab + ba + b$
Como $(a+b)^2 = a+b$, logo $0 = ab + ba$ [(R;+) com]

Logo $ab = -ba$.
Logo $ab = ba$. [(i)]

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ anéis e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo.
Seja $J \trianglelefteq \mathcal{B}$.
Parte $\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$:
[Lema 1]
Parte $\varphi^{-1}[J]$ é ideal:
Seja $i \in \varphi^{-1}[J]$ e $a \in \mathcal{A}$.
Logo $\varphi i \in J$ e $\varphi a \in \mathcal{B}$.
Logo $(\varphi i)(\varphi a) \in J$. [$J \trianglelefteq \mathcal{B}$]
Logo $\varphi(ia) \in J$. [φ homo].
Logo $ia \in \varphi^{-1}[J]$.
O outro lado é análogo.

Só isso mesmo.

• Lema 1 : $(\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} : \text{Ring})(\forall \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B})[\varphi \text{ homo} \Rightarrow (\forall J \trianglelefteq \mathcal{B})[\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq \mathcal{A}]]$

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ anéis e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homo.

Seja $J \trianglelefteq \mathcal{B}$.

Parte $\varphi^{-1}[J]$ é habitado:

Logo $0 \in J$. $[J \trianglelefteq \mathcal{B}]$

Logo $(\varphi 0) \in J$.

Logo $0 \in \varphi^{-1}[J]$.

Parte $\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$:

Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$.

$a - b$!!

Basta demonstrar $ab^{-1} \in \varphi^{-1}[J]$ ["one test"].

Logo $(\varphi a), (\varphi b) \in J$.

Logo $(\varphi b^{-1}) \in J$.

como?

Logo $\varphi(ab^{-1}) \in J$.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E1 .

(i) Seja $a \in R$.
Calc: $-a = (-a)\cdot(-a)$ [R booleano]
$= -(a\cdot(-a))$ [Lemma 1]
$= -(-(a\cdot a))$ [Lemma 1]
$= a\, a$ [Inv-Inv da Parte aditiva]
$= a$ [R booleano] ✓

(ii) Sejam $a, b \in R$.
Calc: $ab = (-b)a$ [Teorema?] ?? ✗
$= ba$ [(i)]

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam R, S anéis, $\varphi : R \xrightarrow{\text{homo}} S$ e $J \trianglelefteq S$. ✓
Parte $\varphi^{-1}[J] \leq R$:
Basta demonstrar que é (/)-fechado. [one test] ✗ & habitado
Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo $\varphi a \in J$ e $\varphi b \in J$. [ded]
Logo $\varphi a +_S (-(\varphi b)) \in J$. [$J \trianglelefteq S$]
Calc: $\varphi a +_S (-(\varphi b)) = \varphi a +_S \varphi(-b)$ [φ homo]
$= \varphi(a -_R b)$ [φ homo]
Logo $a - b \in \varphi^{-1}[J]$. [ded]
Parte $(\forall x \in R)[x\varphi^{-1}[J] = \varphi^{-1}[J] = \varphi^{-1}[J]x]$:
Sejam $x \in R$ e $i \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo $\varphi x \cdot_S \varphi i \in J$. [$J \trianglelefteq S$ e $\varphi i \in J$]
Logo $\varphi(xi) \in J$. [φ homo]
Logo $xi \in \varphi^{-1}[J]$. [ded]
Logo $\varphi i \cdot_S \varphi x \in J$. [$J \trianglelefteq S$ e φi]
Logo $\varphi(ix) \in J$. [φ homo]
Logo $ix \in \varphi^{-1}[J]$. [ded]

Criminal

«Similar»

Só isso mesmo.

Lemma 1. Seja R anel. $(\forall a,b\in R)\,[-(ab)=(-a)b=a(-b)]$

Sejam $a,b\in R$.

Basta demonstrar $(-a)b+ab=0$ e $a(-b)+ab=0$. ✓

Calc:
$$\begin{aligned}(-a)b+ab &= (-a+a)b && [\text{RDist-R}]\\ &= 0b && [\text{RInv}]\\ &= 0 && [\text{R0}]\end{aligned}$$
✓

Calc:
$$\begin{aligned}a(-b)+ab &= a(-b+b) && [\text{RDist-L}]\\ &= a0 && [\text{RInv}]\\ &= 0 && [\text{R0}]\end{aligned}$$

Lemma 2. Seja R anel booleano. $(\forall a,b\in R)\,[ab=(-b)a]$

Sejam $a,b\in R$.

Me esqueci kkkk

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E3.

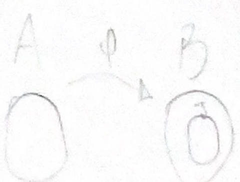
Quero demonstrar que para todo $d \neq 0$, existe ~~um~~ d', t.q $dd' = 1$.
Seja $d \in D$, t.q $d \neq 0$. ✓
Seja $n \in \mathbb{N}$, t.q. $D \setminus \{0\} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, pois D é finito. ✓
Note que $dd_i = dd_j \xRightarrow{(RCL)} d_i = d_j \Rightarrow i = j$. ← escrito assim parece rascunho
onde precisou?
Logo $D \setminus \{0\} = \{dd_1, dd_2, \dots, dd_n\}$.
Como $1 \in D \setminus \{0\}$, logo $dd_u = 1$, para algum $u \in \{1, \dots, n\}$.
∎
(Cadê o inverso do d?) ✓

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam A, B anéis, $\varphi : A \to B$ homo e $J \trianglelefteq B$.
Parte Subgrupo: Lema 1.
Sejam $i \in \varphi^{-1}[J]$ e $a \in A$.
Logo, $\varphi(ia) = (\varphi i)(\varphi a) \in J$ (J ideal de B). pulou
~~Logo, $\varphi(ai) = (\varphi a)(\varphi i) \in J$ (J ideal de B).~~ «similar»
∎

Só isso mesmo.



$\varphi^{-1}[J] = \{a \in A \mid \varphi a \in J\}$ $\varphi a \in J$ $\varphi 0_A = 0_B$ $ia \in \varphi^{-1}[J]$ $\varphi(ia) \in J$

Lema 1:

habitado: $0_B \in J$ $(J \trianglelefteq B)$, logo ?? $\varphi(0_A) = 0_B$ (φ homo).

Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$, logo $\underbrace{(\varphi a)(\varphi b^{-1})}_{\text{deveria ser } a-b \text{ em vez de } ab^{-1}} = \varphi(ab^{-1}) \in J$ $(J \leq B)$,

logo $ab^{-1} \in \varphi^{-1}[J]$.

∎

a-b !

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E3 .

Seja $d \neq 0 \in D$.
Preciso demonstrar d possui inverso.
Como D finito, logo sejam $d_1, d_2, \ldots, d_n$ todos os distintos membros de $D\cancel{\setminus}\{0\}$.
Considere os $dd_1, dd_2, \ldots, dd_n$. $\boxed{\ldots}$
Temos $dd_i = dd_j \Rightarrow d_i = d_j \Rightarrow i = j$. [$\boxed{\text{def}}$ dom.cancelamento]
Logo $D\cancel{\setminus}\{0\} = \{dd_1, dd_2, \ldots, dd_n\}$
Como $1 \in D\cancel{\setminus}\{0\}$, logo $1 = dd_x$ para algum $x \in \{1, \ldots, n\}$.
Logo, para algum $x \in \{1, \ldots, n\}$, d_x é inverso de d.

(assim, tecnicamente, tu nunca usou esse $\exists$.)

(18) **O** $\varphi[J]^{-1} = \{a \in \mathcal{A} \mid \varphi(a) \in J\}$

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ anéis.
Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo.
Seja J ideal de $\mathcal{B}$.
Preciso demonstrar $\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq \mathcal{A}$.
(Parte $\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$)
Como $J \leq \mathcal{B}$, logo $0 \in J$.
Logo $\varphi(0) \in J$.
Logo $0 \in \varphi^{-1}[J]$, e logo $\varphi^{-1}[J]$ habitado.
Sejam $u, v \in \varphi^{-1}[J]$.
Vou demonstrar $\boxed{uv^{-1}} \in \varphi^{-1}[J]$. $\boxed{u-v}$
Logo $\varphi(u), \varphi(v) \in J$ [def $\varphi^{-1}[\,]$]
Logo $(\varphi(v))^{-1} \in J$ [J (inv)-fech]
Logo $\varphi(v^{-1}) \in J$ [φ resp inv]
Logo $(\varphi u)(\varphi v) \in J$ [J (op) fechado]
Logo $\varphi(uv^{-1}) \in J$. [φ resp op.]
Logo $uv^{-1} \in \varphi^{-1}[J]$. [def $\varphi^{-1}[\,]$]
(Parte absorve mult.)
Seja $p \in \varphi^{-1}[J]$.
Seja $a \in \mathcal{A}$.
Vou demonstrar $pa \in \varphi^{-1}[J]$.
Temos $\varphi(a), \varphi(p) \in J$. [$\varphi$ homo] × donde tirou $\varphi a \in J$?
Temos $\varphi(a)\varphi(p) \in J$. [J (op)-fechado] ×
Logo $\varphi(ap) \in J$ [φ resp op]
Logo $ap \in \varphi^{-1}[J]$.
Similar para pa.

Só isso mesmo.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.

DEMONSTRAÇÃO DA E1.

Proposito?

Sejam R anel booleano e $a \in R$. Como $\underbrace{(-a)^2 = a}$, e $\underbrace{(a) = (a)^2}$, logo $-a = a$. ✓

estão nos dados?

era pra ser $(-a)^2 = -a$?

Tendo isso, calcule!!

$a = (-a)^2$
$= -a$ ■

não; era pra ser $(-,-)$-fechado

$\varphi[A] = \{\varphi a \mid \varphi a \in B\}$

$\varphi[A] = \{\varphi a \mid a \ldots\}$

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.

DEMONSTRAÇÃO.

nome ruim use J

1 Sejam R, S aneis e $\varphi : R \to S$ homomorfismo. Seja $I \trianglelefteq S$.
2 Vou mostrar que $\varphi^{-1}[I] \trianglelefteq R$. Parte $\varphi^{-1}[I] \leq R$: Basta mostrar que
3 o $\varphi^{-1}[I]$ é $(-/-)$-fechado. e habitado. Logo Sejam $a, b \in R$ t.q. $\varphi a, \varphi b \in I$. Como
4 $I \leq S$, logo $\varphi a - \varphi b \in S$, Pois $-(\varphi b)$ tbm pertence na S e logo $a, b \in \varphi^{-1}[I]$, ×
5 pela def da $\varphi^{-1}[I]$. Parte $\varphi^{-1}[I]$ é ideal de R, seguindo? que $\varphi^{-1}[I] \subseteq R$,
6 sejam $\boxed{i} \in \varphi^{-1}[I]$, $r \in R$. Como I é ideal de S, logo $\varphi(i) \cdot \varphi(r) \in I$
7 ... $\in I$. Mas $\varphi(i) \cdot \varphi(r) = \varphi(i \cdot r)$ ...
8 Logo, como $\varphi(ir), \varphi(ri) \in I$, logo $ir \in \varphi^{-1}[I]$ e $ri \in \varphi^{-1}[I]$.

Só isso mesmo.

9 Na Linha 6: tbm é usado que $\varphi(i) \in I$, pela escolha do I.

nome péssimo!!

Seja R anel Booleano, logo $(\forall p,q)[p+p=(p+p)^2]$.

Sejam $p,q \in R$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
p+p = (p+p)^2 &= (p+p)(p+p) \\
&= p^2+p^2+p^2+p^2 \\
&= p+p+p+p \\
&[= 0.]
\end{aligned}
$$

Sry.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.

DEMONSTRAÇÃO DA E3.

Alvo: $(\forall d \neq 0)(\exists d')[d d' = 1]$.
Seja $d \in D$ t.q. $d \neq 0$.
Sejam $d_1, d_2, \dots, d_n$ os membros de $D \setminus \{0\}$.
Considere os $dd_1, dd_2, \dots, dd_n$.
grrr...
Temos que $dd_i = dd_j \Rightarrow d_i = d_j \Rightarrow i = j$. [D é um domínio de canc.]
Logo $D \setminus \{0\} = \{dd_1, dd_2, \dots, dd_n\}$.
Como $1 \in D \setminus \{0\}$, logo $dd_u = 1$ para algum $u \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Testemunho d_u.
nunca foi introduzido no escopo NameError: quem é u?

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ anéis e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Seja $J \trianglelefteq \mathcal{B}$.
Parte ($\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$):
grmf...
$\varphi^{-1}[J]$ não vazio:
Como $e \in \mathcal{A}$ e $\varphi(0) \in \mathcal{B}$
Logo $\varphi e \in J$ $[J \trianglelefteq \mathcal{B}]$
×
$\varphi^{-1}[J]$ é "\"-fechado: — (_-_)-fechado
Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo $\varphi(a), \varphi(b) \in J$.
Calc: $\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b^{-1})$
$= (\varphi a)(\varphi b)^{-1}$
$\in J$ $[\varphi(a) \in \mathcal{B}$ e $J \trianglelefteq \mathcal{B}]$
Logo $ab^{-1} \in \varphi^{-1}[J]$

Parte ($\varphi^{-1}[J]$ absorve a mult.):
Seja $i \in \varphi^{-1}[J]$.
Seja $a \in \mathcal{A}$.
Calc: $\varphi(ai) = (\varphi a)(\varphi i)$
$\in J$ $[J \trianglelefteq \mathcal{B}]$?
Logo $ai \in \varphi^{-1}[J]$.
~~Calc: $\varphi(ia) = (\varphi i)(\varphi a)$~~
~~$\in J$ $[J \trianglelefteq \mathcal{B}]$~~
~~Logo $ia \in \varphi^{-1}[J]$.~~
«Similar.»

Só isso mesmo.

$\varphi^{-1}[J] = \{ i \in \mathcal{A} \mid \varphi(i) \in J \}$

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E1.

i.

Seja $a \in R$.
Basta mostrar que $a + a = 0$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
a+a &= (a+a)^2 && [R \text{ anel bool}] \\
&= (a+a)(a+a) \\
&= (a+a)a + (a+a)a && [R\text{-Distr L}] \\
&= (a^2+a^2)+(a^2+a^2) && [R\text{-Distr R}] \\
&= a^2+a^2+a^2+a^2 && [R\text{-Assoc}] \\
&= a+a+a+a && [R \text{ anel bool}]
\end{aligned}$$

Logo, temos que $a+a=0$ pelas resoluções únicas.

ii.

Sejam $x, y \in R$.
Quero $xy = yx$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
xy &= -yx && [TJ] \\
&= yx && [E1.i]
\end{aligned}$$

(18) **O**

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

~~Parte~~
Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo.
Logo, seja J um ideal de $\mathcal{B}$.

Parte $\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$:

confundiu pre-imagem com função inversa! :-/

Sejam $b, b' \in J$ tais que $\varphi^{-1}(b) = a$ e $\varphi^{-1}(b') = a'$ para algum $a, a' \in \mathcal{A}$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(1_B) &= 1_A \\
\varphi^{-1}(bb') &= \varphi^{-1}(b)\varphi^{-1}(b') && [\varphi^{-1} \text{ resp } (\cdot)] \\
&= aa' && [\text{Pela escolha de } b, b'] \\
\varphi^{-1}(b+b') &= \varphi^{-1}(b)+\varphi^{-1}(b') && [\varphi^{-1} \text{ resp } (+)] \\
&= a+a'
\end{aligned}$$

Como 1_A, aa' e $a+a' \in \varphi^{-1}[J]$, logo $\varphi^{-1}[J] \leq \mathcal{A}$.

Parte $\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq \mathcal{A}$:

Sejam $j \in J$ e $b \in B$.
Preciso mostrar que $\varphi^{-1}(jb) \in \varphi^{-1}[J]$ e $\varphi^{-1}(bj) \in \varphi^{-1}[J]$.
~~Sabemos que $jb \in J$, logo $\varphi^{-1}[jb] \in \varphi^{-1}[J]$.~~
~~Similarmente, temos~~

Só isso mesmo.

TJ. Seja R um anel booleano.
$(\forall p,q \in R)[pq = -qp]$

Sejam $x, y \in R$.
Basta mostrar que $pq + qp = 0$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
p+q &= (p+q)^2 && [R \text{ anel bool}] \\
&= (p+q)(p+q) \\
&= (p+q)p + (p+q)q && [RDL] \\
&= (p^2 + qp) + (pq + q^2) && [RDR] \\
&= p^2 + qp + pq + q^2 && [R\text{-Assoc}] \\
&= p + qp + pq + q && [R \text{ Anel bool}] \\
&= p + q + pq + qp && [RACom]
\end{aligned}$$

Logo, temos $pq + qp = 0$ pelas resoluções únicas.

(18) **E** *Escolha 1 dos* **E1**, **E2**, **E3**.

D.I. = Domínio de integridade
D.C. = Dom. cancelam...

E1. Seja R anel booleano. Demonstre: (i) $a = -a$; (ii) R comutativo.
E2. Seja R anel booleno. Todo $x \neq 0, 1$ é um zerodiv.
E3. Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
DEMONSTRAÇÃO DA E3 .

Seja $d \neq 0$. onde usou?
Considere o conjunto $(d\cdot)[D]$. dD é uma notação melhor
Como $d \in D$, logo $(d\cdot)[D] = D$. ✗
Logo $1 \in (d\cdot)[D]$.
Como $(d\cdot)$ é injetiva e endo, $[d.I \Leftrightarrow d.C]$ tá nos dados?
logo $(d\cdot)$ é sobrejetiva.
Logo seja d' tal que $dd' = 1$.
Escolho d'.
∎

(18) **O**

confundiu grupos & normais com rings & ideais.

Homomorfismos de anéis refletem ideais.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ anéis.
Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Seja $J \trianglelefteq \mathcal{B}$.
Parte $\leq$:
Sejam $y, y' \in J$.
Logo $\varphi^{-1}y, \varphi^{-1}y' \in \varphi^{-1}[J]$.
Calculemos:
$$(\varphi^{-1}y)\cdot(\varphi^{-1}y')^{-1} = (\varphi^{-1}y)\cdot(\varphi^{-1}(y')^{-1}) = \varphi^{-1}(y(y')^{-1})$$
Como $y(y')^{-1} \in J$, logo $\varphi^{-1}(y(y')^{-1}) \in \varphi^{-1}[J]$.

Parte $\trianglelefteq$:
Sejam $g, j \in J$.
Logo $\varphi^{-1}g, \varphi^{-1}j \in \varphi^{-1}[J]$.
Calculemos:
$$(\varphi^{-1}g)(\varphi^{-1}j)(\varphi^{-1}g)^{-1} = \varphi^{-1}(gjg^{-1}) \quad [gjg^{-1} \in J]$$
$$\in \varphi^{-1}[J] \quad [J \trianglelefteq \mathcal{B}]$$

Só isso mesmo.