(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1.

A $\mathbb{C}(M)$ terá um único objeto, o ~~{~~☺~~}~~

??

A setas serão todos os membros do M. $(\lambda x x)$

A operação será a composição (∘). isso é válido

A Identidade será a Id. em qualquer Cat.

O objetivo aqui é definir as (∘) e Id.

M2.

Coresponde ao homomorfismo de Monoides.

cadê a tradução?

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$. Se φ respeita operação então φ é homomorfismo. Ou seja: $(\forall G \xrightarrow{\varphi} H)[(\forall a, b \in G)[\varphi(ab) = (\varphi a)(\varphi b)] \Rightarrow \varphi \text{ homo}]$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha φ respeita op.

Resp-Id:

Calc:

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G)$$
$$= (\varphi e_G)(\varphi e_G)$$

Logo $\varphi e_G = e_H$ pelas Id-baratas.

resp-inv:

Seja $g \in G$, logo $g^{-1} \in G$, pois G é um grupo.

Calc:

$$e_H = \varphi(e_G)$$
$$= \varphi(g g^{-1})$$
$$= (\varphi g)(\varphi(g^{-1}))$$

Logo $\varphi(g^{-1})$ só pode ser o inverso de φg, ou seja, $(\varphi g)^{-1}$ [Inv-baratas]. ∎

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Vou demonstrar $\ker\varphi \leq A$. (Por one-test)

Habitado:

$e_B = \varphi(e_A)$ [(φ homo).id]

Logo $e_A \in \ker\varphi$. ✓

Div-fechado:

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

Calc:

$$\begin{aligned}
\varphi(ab^{-1}) &= (\varphi a)(\varphi(b^{-1})) && [\varphi \text{ homo.}*] \\
&= e_B\,(\varphi(b^{-1})) && [\text{kernel}] \\
&= \varphi(b^{-1}) \\
&= (\varphi b)^{-1} && [\varphi \text{ homo. inv}] \\
&= e_B^{-1} && [\text{Kernel}] \\
&= e_B
\end{aligned}$$

✓

Vou demonstrar $\ker\varphi \trianglelefteq A$, ou seja, $(\forall k \in \ker\varphi)(\forall a \in A)[aka^{-1} \in \ker\varphi]$.

Sejam $k \in \ker\varphi$ e $a \in A$.

Calc:

$$\begin{aligned}
\varphi(aka^{-1}) &\overset{\dots}{=} (\varphi a)(\varphi k)(\varphi a^{-1}) \;✓ \\
&= (\varphi a)\, e_B\, (\varphi a^{-1}) \;✓ \\
&= (\varphi a)(\varphi a^{-1}) \;✓ \\
&= \varphi(aa^{-1}) \;✓ \\
&= \varphi(e_A) \;✓ \\
&= e_B \;✓
\end{aligned}$$

Logo $aka^{-1} \in \ker\varphi$. ∎

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Vou demonstrar $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

Habitado:

Seja e_G a Id do $\mathcal{G}$ e $g \in \mathcal{G}$.

Calc: $g e_G g^{-1} = g g^{-1}$

$= e_G$

Logo $\mathrm{Inn}(\mathcal{G})$ é hab.

Div-fechado:

Sejam $a, b \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$ e $g \in \mathcal{G}$

Calc:

$(\varphi a)(\varphi b^{-1}) = (gag^{-1})(gb^{-1}g^{-1})$

$= ga(g^{-1}g)b^{-1}g^{-1}$

$= gaeb^{-1}g^{-1}$

$= gab^{-1}g^{-1}$.

$= \varphi(ab^{-1})$

Vou demonstrar $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

Seja $x \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$.

Calc:

□

Só isso mesmo.

✗ confundiu aqui!

Quais são os membros dos $\mathrm{Inn}(\mathcal{G})$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$?

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

$\mathbb{C}[M]$:

O objeto seria a carinha feliz e as setas seriam os membros do monóide, t.q. a id de M seria a seta id do ~~$\mathbb{C}[M]$~~ ☺. E a composição das setas se comporta como a op de M. ✓

Functor de $\mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}[N]$:
O functor seria uma tradução das setas das cats, que acabaria por levar o (!)-objeto de $\mathbb{C}[M]$ para o (!)-objeto de $\mathbb{C}[N]$ que respeita o comportamento da primeira, logo seria um homomorfismo de monóides. ?

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ grupos e $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Se φ respeita a operação, então φ é homo.
(Ou seja, $(\forall a,b : \mathcal{G})[\varphi(a *_{\mathcal{G}} b) = (\varphi a) *_{\mathcal{H}} (\varphi b)] \Rightarrow \varphi e_{\mathcal{G}} = e_{\mathcal{H}}$ & $(\forall a : \mathcal{G})[\varphi(a^{-1}) = (\varphi a)^{-1}]$ & $(\forall a,b : \mathcal{G})[\varphi(a \cdot b) = (\varphi a)(\varphi b)]$

DEMONSTRAÇÃO.

Parte φ resp id:
Basta demonstrar que $(\forall a)[(\varphi a)(\varphi e) = (\varphi a) = (\varphi e)(\varphi a)]$
Seja $a : \mathcal{G}$.
Calculamos:
$$(\varphi a)(\varphi e) = \varphi(a \cdot e) \quad [\varphi \text{ resp op}]$$
$$= \varphi a. \quad [e \text{ é a } \mathcal{G}\text{-idR}]$$

aproveite a promoção!

$$(\varphi e)(\varphi a) = \varphi(e \cdot a) \quad [\varphi \text{ resp op}]$$
$$= \varphi a. \quad [e \text{ é a } \mathcal{G}\text{-idL}]$$

Parte φ resp inv:
Basta demonstrar $(\forall a)[(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = e_H = (\varphi a^{-1})(\varphi a)]$
Seja $a : \mathcal{G}$.
Calculamos:
$$(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = \varphi(a \cdot a^{-1}) \quad [\varphi \text{ resp op}]$$
$$= \varphi e_G \quad [\mathcal{G}\text{-inv-R}]$$
$$= e_H \quad [\varphi \text{ resp id}]$$ ✓

$$(\varphi a^{-1})(\varphi a) = \varphi(a^{-1} \cdot a) \quad [\varphi \text{ resp op}]$$
$$= \varphi e_G \quad [\mathcal{G}\text{-invL}]$$
$$= \varphi e_H \quad [\varphi \text{ resp id}]$$

Parte φ resp op:
Imediato.
∎

(9) **K**

Escolha um dos **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Parte $\ker\varphi \subseteq \mathcal{A}$.

Trivial.

Parte $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$. & (habitado)

Basta demonstrar $(\forall a,b)[ab^{-1} \in \ker\varphi]$ (ONE-TEST)

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

Calculamos.

$$\begin{aligned} \varphi(ab^{-1}) &= (\varphi a)(\varphi b^{-1}) && [(\varphi \text{ homo}).\text{op}] \\ &= (\varphi a)(\varphi b)^{-1} && [(\varphi \text{ homo}).\text{inv}] \\ &= e \cdot (\varphi b)^{-1} && [a \in \ker\varphi] \\ &= e \cdot e^{-1} && [b \in \ker\varphi] \\ &= e. && [(\mathcal{B} \text{ group}).\text{invR}] \end{aligned}$$

(Como φ homo, logo $e \in \ker\varphi$).

Parte $(\forall a \in \ker\varphi)[(\forall g \in \mathcal{A})[gag^{-1} \in \ker\varphi]]$

Sejam $a \in \ker\varphi$ & $g \in \mathcal{A}$.

Basta demonstrar que $\varphi(gag^{-1}) = e_{\mathcal{B}}$

Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(gag^{-1}) &= (\varphi g)(\varphi a)(\varphi g^{-1}) && [\text{Ass } \varphi \text{ pres op}] \\ &= (\varphi g)e_{\mathcal{B}}(\varphi g^{-1}) && [a \in \ker\varphi] \\ &= (\varphi g)(\varphi g^{-1}) && [\mathcal{B}\text{-id}] \\ &= \varphi(gg^{-1}) && [\varphi \text{ resp } \varphi] \\ &= \varphi e_{\mathcal{A}} && [\mathcal{A}\text{-invR}] \\ &= e_{\mathcal{B}}. && [\varphi \text{ resp id}] \end{aligned}$$

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}). \quad (\circ, \mathrm{id}, {}^{-1})$$

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$

Seja $\varphi \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$.

Logo, $(\exists g)[\varphi = (g\text{-}g^{-1})]$ [def. $\in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$]

Seja g t.q. $\varphi = g\text{-}g^{-1}$.

Basta demonstrar que $\varphi' = g^{-1}\text{-}g$ é inv de φ.

Seja $a \in \mathcal{G}$.

Calculamos:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \varphi')a &= \varphi(\varphi' a) \\ &= \varphi(g^{-1}ag) \\ &= gg^{-1}agg^{-1} \\ &= eae \\ &= a. \end{aligned}$$

similar!

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi)a &= \varphi'(\varphi a) \\ &= \varphi'(gag^{-1}) \\ &= g^{-1}gag^{-1}g \\ &= eae \\ &= a. \end{aligned}$$

Parte $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$

Basta demonstrar $(\forall \varphi, \phi \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G}))[\varphi \circ \phi^{-1} \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})]$.

Sejam $\varphi, \phi \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$.

Sejam g e h t.q. $\varphi = g\text{-}g^{-1}$ & $\phi^{-1} = h^{-1}\text{-}h$. [1-inv Aut($\mathcal{G}$)]

Testemunho o gh^{-1}. [$g \cdot h^{-1} \in \mathcal{G}$]

Seja $a \in \mathcal{G}$.

Calculamos:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi^{-1})a &= \varphi(\phi^{-1}a) \\ &= \varphi(h^{-1}ah) \\ &= gh^{-1}ahg^{-1} \\ &= gh^{-1}a(gh^{-1})^{-1}. && \left[\begin{matrix}(ab)^{-1} = (b^{-1}a^{-1}) \\ (a^{-1})^{-1} = a\end{matrix}\right] \end{aligned}$$

Parte $(\forall \psi \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G}))[(\forall \phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}))[\phi\psi\phi^{-1} \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})]]$

Só isso mesmo.

Sejam $\psi \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$ & $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

Seja g t.q. $\psi = g\text{-}g^{-1}$.

Seja $a \in \mathcal{G}$.

Calculamos:

$$\begin{aligned} (\phi\psi\phi^{-1})a &= (\phi\psi)(\phi^{-1}a) \\ &= \phi(g(\phi^{-1}a)g^{-1}). \quad \ldots? \end{aligned}$$

ϕ & φ são variações da mesma letra, phi

ψ é outra letra, psi

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1: Objetos: $*$
Setas: Uma para cada $x \in |M|$.
id: e
$(\circ)$: $f \circ g = f *_M g$.

M3: Objetos: $*$
Setas: Uma para cada $x \in |S|$ e uma seta s.
$(\circ)$: $f \circ g = f * g$
id: s.

M2: É uma tradução dos objetos e setas, que respeita sua estrutura:
Seja $F: \mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}[N]$. F é um functor sse
$F(*_M) = *_N$
$F(e_M) = e_N$
$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
> Logo functor nas cats de monoides correspondem a homomorfismos de monoides.

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam G e H grupos.
Seja $\varphi: G \to H$.
φ resp a op $\Rightarrow \varphi$ é homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha φ respeita a operação.
Basta demonstrar φ respeita a id e o inv.
φ respeita id:
Calculemos:
$\varphi e_H = \varphi(e_G e_G)$
$= \varphi(e_G) \cdot \varphi(e_G)$ [φ respeita a op]
Logo φe_G é uma H-id.
Logo $\varphi e_G = e_H$.

φ respeita o inv:
Seja $g \in G$.
Calculemos:
$\varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g g^{-1})$
$= \varphi e_G$
$= e_H$
Logo $\varphi(g^{-1})$ é inverso de $\varphi(g)$.
Logo $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ [unicidade de inv]

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

quem é N?

faltou o $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$.

Basta demonstrar que $(\forall g)[gNg^{-1} \in \ker\varphi]$

type error?

Sejam $n \in \ker\varphi$, $g \in G$.

Basta demonstrar que $\varphi(gNg^{-1}) = e_{\mathcal{B}}$. matemática é case-sensitive

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(gNg^{-1}) &= \varphi(g)\cdot\varphi(N)\cdot\varphi(g^{-1}) && [\varphi\text{-homo}]\\
&= \varphi(g)\cdot e_{\mathcal{B}}\cdot\varphi(g^{-1}) && [N \in \ker\varphi]\\
&= \varphi(g)\cdot\varphi(g^{-1})\\
&= \varphi(gg^{-1}) && [\varphi\text{-homo}]\\
&= \varphi\, e_{\mathcal{A}}\\
&= e_{\mathcal{B}} && [\varphi\text{-homo}]
\end{aligned}
$$

✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$:

Seja $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$. ✓

Logo seja $g \in G$ t.q. $\varphi = g\_g^{-1}$. ✓

Logo φ endo. (OK?)

φ-iso: o que significa «iso»??

Sobrej:

Seja $g_y \in G$.

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
g_y &= e\, g_y\, e\\
&= g g^{-1} g_y g g^{-1}
\end{aligned}
$$

✓

Logo $\varphi(g^{-1} g_y g) = g_y$.

Inj:

Sejam $a, b \in G$ t.q. $\varphi a = \varphi b$.

Logo $gag^{-1} = gbg^{-1}$.

(Logo $g^{-1}gag^{-1}g = g^{-1}gbg^{-1}g$)

Logo $a = b$. ✓

Logo $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$. Invoco o [SubNorm] e [Inner(G)SubG]. ∎

Só isso mesmo.

f

[SubNorm] $(\forall f \in Aut(G))[g f g^{-1} \in Inn(G)]$ $\forall x \in G$

Seja $f \in Aut(G)$.

Logo $(\varphi \circ f) \in Inn(G)$. X

[$Inn(G)$ SubG]

$Inner(G)$ respeita a op: ?? x op-fechado

Sejam $f, h \in Inner(G)$

Sejam g, g' t.q. $f = g\_g^{-1}$ e $h = g'\_g'^{-1}$.

Calculemos:

$$\begin{aligned} f \circ h &= f(g'\_g'^{-1}) \\ &= gg'\_g'^{-1}g^{-1} \\ &= gg'\_(gg')^{-1} \\ &\in Inner(G) \end{aligned}$$ ✓

$e \in Inner(G)$:

Tome a $f = e\_e^{-1}$.

$f = id$. ✓

$Inner(G)$ inv:

Seja $f \in Inner(G)$.

Seja g t.q. $f = g\_g^{-1}$.

Tome $f^{-1} = g^{-1}\_g$. ✓

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1. $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ será definida por:

$\mathrm{Obj}(\mathbb{C}[\mathcal{M}]) \stackrel{\text{def}}{=} M$, onde M é o carrierset de $\mathcal{M}$

$\mathrm{Arr}(\mathbb{C}[\mathcal{M}]) \stackrel{\text{def}}{=} (*)$, onde $(*)$ é a operação de $\mathcal{M}$??

M2. O ? functor da $\mathbb{C}[\mathcal{M}] \to \mathbb{C}[\mathcal{N}]$ corresponde a um ? homomorfismo de $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$. (Como?)

M3. Não definiria, pois não existiria a "seta" identidade.

então bora inventar uma tal seta!

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam G, H grupos. Seja $\varphi : G \to H$. Se φ respeita a operação, então φ é um homomorfismo

DEMONSTRAÇÃO.

$\vdash (\forall a,b \in G)[\varphi(ab) = (\varphi a)(\varphi b)] \Rightarrow \varphi$ homomorfismo

Suponha que φ respeita a operação. Sejam G, H grupos. Seja $\varphi : G \to H$

Parte φ respeita a id:

Temos que $\varphi(ee) = (\varphi e)(\varphi e)$.
Logo $\varphi e = (\varphi e)(\varphi e)$.
Logo $\varphi e = e$ ✓

Parte φ respeita os inversos:

Temos que $\varphi(aa^{-1}) = (\varphi a)(\varphi a^{-1})$.
Logo $\varphi e = (\varphi a)(\varphi a^{-1})$.
Logo $e = (\varphi a)(\varphi a^{-1})$. — [$\varphi$ resp. id]
Logo $(\varphi a)^{-1} = (\varphi a)$. — [!-inv] ✓

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

$\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall a \in \mathcal{A})[a(\ker\varphi)a^{-1} \subseteq \ker\varphi]$

$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid \varphi a = e\}$

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

Demonstração de K1.

Parte $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$:

Parte $\ker\varphi$ hab:

Como φ homo, logo $\varphi e = e$. Logo $e \in \ker\varphi$. ✓

Parte $\ker\varphi$ (/)-fechado:

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

Logo $\varphi a = e = \varphi b$.

Calc:

$\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b)^{-1}$ — [φ homo]

$= e \cdot e^{-1}$

$= ee = e$

Logo $ab^{-1} \in \ker\varphi$. Pelo "one test" $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$. ✓

□

Parte $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$:

Sejam $a \in A$ & $x \in \ker\varphi$. $\vdash axa^{-1} \in \ker\varphi$ ($\iff \varphi(axa^{-1}) = e$)

Calc:

$\varphi(axa^{-1}) = (\varphi a)(\varphi x)(\varphi a)^{-1}$ — [(φ homo)x3]

$= (\varphi a)e(\varphi a)^{-1}$ — [$x \in \ker\varphi$]

$= (\varphi a)(\varphi a)^{-1}$

$= e$

Logo $axa^{-1} \in \ker\varphi$. ∎ ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$. $\vdash (\forall g)[g\,\mathrm{Inn}(\mathcal{G})g^{-1} \subseteq \mathrm{Inn}(\mathcal{G})]$

Demonstração.

faltou o ($\leq$) & ($\subseteq$)

Seja $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ auto.

Seja $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ inner.

Seja $g \in \mathcal{G}$ t.q. $\varphi = \lambda x . gxg^{-1}$.

Basta demonstrar que $(\exists g' \in \mathcal{G})[\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \lambda x . g'xg'^{-1}]$.

Vou demonstrar que (ψg) serve:

Seja $x \in \mathcal{G}$.

Calc:

$(\psi\circ\varphi\circ\psi^{-1})x = \psi(\varphi(\psi^{-1}x))$

$= \psi(g(\psi^{-1}x)g^{-1})$

$= (\psi g(\psi^{-1}x))(\psi g^{-1})$ — [ψ auto]

$= (\psi g)(\psi^{-1}x)(\psi g)^{-1}$ — [ψ auto] ∎ ✓

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1.

Obj: {☹}
Arr: x t.q $x \in |M|$
Comp: $(f \circ g) = x * y$
Ass: $(x*y)*z = x*(y*z)$
Id: $x * e_M = x = e_M * x$

✓

M2. O functor precisa respeitar a composição e a identidade.
Logo, um functor da categoria $\mathbb{C}[M]$ para $\mathbb{C}[N]$ precisa respeitar a operação e a identidade.
Logo, o functor aqui é um homomorfismo de monóides.

✓

M3. Seja S semigrupo.
Como S não possui identidade na estrutura.
Logo não tem como definir uma categoria a partir de S.

x

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam A, B grupos e $\varphi : |A| \to |B|$:
✓ φ respeita a op $\Rightarrow$ φ homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha φ respeita a op. ✓
Basta demonstrar que φ respeita id e φ respeita a inv. ✓
Seja $a \in |A|$ ✓
Logo $\varphi(aa^{-1}) = (\varphi a)(\varphi a^{-1})$ ✓
Logo $(\varphi(aa^{-1}))^{-1} = ((\varphi a)(\varphi a^{-1}))^{-1} = (\varphi a^{-1})^{-1}(\varphi a)^{-1} = (\varphi a)(\varphi a)^{-1} = e_B$.
o que tu usou aqui?
Logo φ respeita os inversos.
Logo $\varphi(aa^{-1}) = (\varphi a)(\varphi a)^{-1} = e_B$.
Como $aa^{-1} = e_A$, logo $\varphi(e_A) = e_B$. ✓

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Parte ($\ker\varphi \leq \mathcal{A}$):
Como $\varphi(e_A) = e_B$, logo $e_A \in \ker\varphi$.
Logo $\ker\varphi$ habitado.
Sejam $a, b \in \ker\varphi$.
Temos que $\varphi(b^{-1}) = (\varphi b)^{-1} = e_B^{-1} = e_B$?
Logo $b^{-1} \in \ker\varphi$.
Vou mostrar $\varphi(ab^{-1}) = e_B$
Calc: $\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b^{-1})$
$= (\varphi a)(\varphi b^{-1})$
$= e_B e_B^{-1}$
$= e_B$

Parte ($\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$):
Como $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$.
Vou demonstrar $\ker\varphi$ é fechado pelos conjugados.
Seja $g \in G$.
Seja $k \in \ker\varphi$.
Basta demonstrar que $\varphi(gkg^{-1}) = e_B$.
Calc: $\varphi(gkg^{-1}) = (\varphi g)(\varphi k)(\varphi g)^{-1}$
$= (\varphi g)\, e_B\, (\varphi g)^{-1}$
$= (\varphi g)(\varphi g)^{-1}$
$= e_B$.

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

«Seja» só pode ser seguido por nome não por termo

$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte ($\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$):
Sejam $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Inn}(G)$.
Seja $g \in G$ t.q. $\varphi = g \cdot g^{-1}$.
Seja $\boxed{g^{-1}} \in G$ t.q. $\varphi' = g^{-1} \cdot g$.
Seja $x \in G$.
Calc: $(\varphi \circ \varphi')x = \varphi(\varphi' x)$
$= \varphi g x g^{-1}$
$= g^{-1} g x g^{-1} g$
$= x$

?
Logo $(\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_G \in \mathrm{Inn}(G))$.
Sejam $g, h^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$
???
Logo $(g \circ h)^{-1} [I_x](x)[(g \circ h^{-1}) = xx^{-1} = xx^{-1}]$
Logo $(g \circ h) \in \mathrm{Inn}(G)$.

Parte ($\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$):
Seja $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.
Seja $h \in \mathrm{Inn}(G)$.
Logo $(\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}) = (I_g)[(\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}) =$? $\varphi \circ g h g^{-1} a]$.
Logo $(\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}) \in \mathrm{Inn}(G)$.

Parte ($\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$):
Seja $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$.
Como $\varphi : A \to A$.
Logo φ sendo $\boxed{\text{e isso}}$ × donde tirou isso?
Logo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

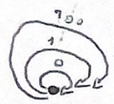
Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathbb{M}]$ onde $\mathbb{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathbb{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathbb{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathbb{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathbb{S}]$?

RESPOSTAS.

M1.
$Obj(\mathbb{C}) = \{\bullet\}$
$Arr(\mathbb{C}) = M$
$0 = *_M$
$1 = e_M$
desemo $(N; +, 0) = M$



M2. ~~O functor seria uma seta~~
Sejam M e N monoides. Um functor seria uma seta de $\mathbb{C}[M]$ para $\mathbb{C}[N]$ que respeita a aloma dos $\mathbb{C}[M]$ na $\mathbb{C}[N]$, ou seja respeita a $0, 1$, etc. que é o mesmo conceito, a partir de sua definição, do homomorfismo de monoides.

M3. Não é possível tendo em vista que não tem a obrigação de ter um e_S, como nos monoides, não sendo possível definir o 1 da $\mathbb{C}[S]$.

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.

ENUNCIADO.

Sejam A, B grupos e $\varphi : A \to B$, ~~φ é um homomorfismo~~ sse φ respeita a $*$, φ é homomorfismo i.e.
$(\forall a, a' \in A)\,[\varphi(a a') = (\varphi a)(\varphi a')] \implies \varphi$ homomorfismo

DEMONSTRAÇÃO.

suponha φ respeita a $*$

Parte respeito $*$:
Immediato

Parte respeito e:
~~seja $a \in A$~~
~~Basta demonstrar que $(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = (\varphi a)(\varphi a)^{-1}$~~
~~seja a~~
~~Calc seja a ... $\varphi(a) = e$~~
~~... seja a ... $\varphi(a) = e$~~
Calc.
~~Basta demonstrar que $\varphi(a e) = \varphi a$~~
Basta mostrar que $(\varphi a)(\varphi e) = \varphi a$ $(\wedge (\varphi e)(\varphi a) = \varphi a)$
Part R
Calc
$(\varphi a)(\varphi e) = \varphi(a e)$ – [respeita a $*$]
$= \varphi(a)$ – [Id-R

Parte L:
similar

Parte respeito a $^{-1}$:
seja $a \in A$
Basta demonstrar $(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = e_B$ $(\wedge (\varphi a^{-1})(\varphi a))$
Parte $(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = e_B$
Calc.
$(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = \varphi(a a^{-1})$ – respeito $*$
$= \varphi e$ – Inv-R
$= e_B$ – respeito e, demonstrando

(Parte $(\varphi a^{-1})(\varphi a) = e_B$
similar)

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Basta demonstrar que $\ker\varphi \subseteq A$ & $\ker\varphi \leq A$ & $\ker\varphi$ é σ_G-fechado

$\ker\varphi \subseteq A$: ← gratuito

seja $a \in \ker\varphi$, ou seja $\varphi a = e_B$ & $a \in A$

logo $a \in A$.

$\ker\varphi \leq A$:

Como φ é homomorfismo $\varphi e_A = e_B$ — e-respeitado

logo $e_A \in \ker\varphi$, logo $\ker\varphi$ é habitado ✓

Pelo one-test, basta demonstrar que $\ker\varphi$ é /-fechado:

sejam $a, v \in \ker\varphi$

Calc:

$$\varphi(av^{-1}) = \varphi(a) *_B \varphi(v^{-1}) \quad \text{— [}\varphi\text{ respeita }*\text{]}$$
$$= \varphi(a) *_B \varphi(v)^{-1} \quad \text{— [}\varphi\text{ respeita }{}^{-1}\text{]}$$
$$= e_B *_B (e_B)^{-1} \quad \text{— [Pela escolha de } a, v\text{]}$$
$$= e_B \quad \text{— [R-Inv do B]}$$

logo $av^{-1} \in \ker\varphi$ ✓

Parte $\ker\varphi$ é σ_G-fechado:

sejam $a \in \ker\varphi$ e $g \in G$

Basta demonstrar que $gag^{-1} \in \ker\varphi$

Calc:

$$\varphi(gag^{-1}) = (\varphi g)(\varphi a)(\varphi g^{-1}) \quad \text{— } \varphi \text{ respeito}$$
$$= (\varphi g)(e_B)(\varphi g^{-1}) \quad \text{— escolha do } a$$
$$= (\varphi g)(e_B)(\varphi g)^{-1} \quad \text{— }{}^{-1}\text{-respeito}$$
$$= (\varphi g)(\varphi g)^{-1} \quad \text{— Id-R}$$
$$= e_B \quad \text{— Inv-R}$$

logo $gag^{-1} \in \ker\varphi$ ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Basta demonstrar $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ & $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ & $\mathrm{Inn}(\mathcal{G})$ é $\sigma_{\mathrm{Aut}(\mathcal{G})}$-fechado ✓

Parte $\subseteq$

seja $f \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$, ou seja $f : G \to G$ & $(\exists g \in G)[f = g - g^{-1}]$

seja g t.q. $f = g - g^{-1}$ ✓

Basta demonstrar que f é endo & f é iso.

f endo:

Imediato

f é iso:

f é homo:

Imediato.

f é invertível:

Escolho $\lambda x. g^{-1} x g$ (h) ? ? não dá pra entender

seja $a \in G$

Basta demonstrar que $(f \circ h)a = a = (h \circ f)a$

Parte $(f \circ h)a = a$

Calc:

$$(f \circ h)a = f(ha) \quad \text{— def}$$
$$= f(g^{-1}ag) \quad \text{— } h$$
$$= gg^{-1}agg^{-1} \quad \text{— } f$$
$$= a \quad \text{— [2x Inv-R, Id-R \& Id-L]}$$

Parte $(h \circ f)$:

similar

~~Continua no lamato~~

Parte $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$:

⋮

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M_1.
$\mathrm{Obj} = \{ ☺ \}$
$\mathrm{Arr} = \{ m \mid m \in |\mathcal{M}| \}$
$(\forall m \in \mathrm{Arr})\,[\,\mathrm{src}(m) = \mathrm{tgt}(m) = ☺\,]$
$\mathrm{id} = e_{\mathcal{M}}$
$A \circ B = A *_{\mathcal{M}} B$
✓

M_2.

M_3.

$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam G, H grupos. Seja $\varphi : |G| \to |H|$
$(\forall a, b \in G)\,[\,\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)\,] \Rightarrow \varphi$ homo ✓

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(\forall a, b \in G)\,[\,\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)\,]$ (1)
-- Parte φ respeita a op
imediato ✓
-- Parte φ respeita a id
Seja $a \in G$
esse a serviu algo que o e não poderia servir?
pela [(1) a, e], tenho $\varphi(a e) = \varphi(a)\varphi(e)$
Logo $\varphi(a) = \varphi(a)\,\varphi(e)$
Logo $\varphi(e) = e$ pela resoluções únicos
-- Parte φ respeita os inv
Seja $a \in G$
Pela [(1) a a^{-1}], tenho $\varphi(a a^{-1}) = \varphi(a)\,\varphi(a^{-1})$
Logo $\varphi(e) = \varphi(a)\,\varphi(a^{-1})$
Logo $e = \varphi(a)\,\varphi(a^{-1})$, pela [$\varphi$ respeita a id]
Logo $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ pela resoluções únicas
✓

$g - g^{-1}$ $h - h^{-1}$
$g - g^{-1} \circ h^{-1} - h$
$gh^{-1} - g^{-1}h$

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

– Porte $\ker\varphi \trianglelefteq A$:

-- Porte $e \in \ker\varphi$:

Pela (φ homo. id), tenho $\varphi(e) = e$ ✓

-- Porte $(\forall a, b \in \ker\varphi)[ab^{-1} \in \ker\varphi]$.

Sejam $a, b \in \ker\varphi$

Calc: $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1})$ [φ homo. op]

$= e \quad \varphi(b)^{-1}$ [$a \in \ker\varphi$, φ homo inv]

$= e \cdot e^{-1}$

$= e$ ✓

-- Porte $\ker\varphi$ é fechado pelos conjugados

Seja $a \in A$

Seja $k \in \ker\varphi$

Calc: $\varphi(a k a^{-1}) = \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1})$

$= \varphi(a) \; e \; \varphi(a)^{-1}$

$= e$ ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\operatorname{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \operatorname{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

– -- $\operatorname{Inn}(G) \subseteq \operatorname{Aut}(G)$

Seja $\varphi \in \operatorname{Inn}(G)$

Preciso φ invertível

Seja $g \in G$ t.q. $\varphi = g - g^{-1}$

tome $\psi = g^{-1} - g$ como testemunha ✓

...?

-- $\operatorname{Inn}(G) \leq \operatorname{Aut}(G)$

-- Porte $e_{\operatorname{Aut}(G)} \in \operatorname{Inn}(G)$

Basta demonstrar $e - e^{-1} = id_G$

-- Porte $(\forall a, b \in \operatorname{Inn}(G))[ab^{-1} \in \operatorname{Inn}(G)]$

Sejam $g, h \in G$ t.q. $a = g - g^{-1}$ & $b = h - h^{-1}$

Basta demonstrar $gh^{-1} - hg^{-1} = ab^{-1}$

...?

-- $\operatorname{Inn}(G)$ fechado pelos conj.

Só isso mesmo.

(9) **M**

obs renal o id

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido? homomorfismo
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?

RESPOSTAS.

Seja $C[M]$ uma categoria com M objetos com φ sendo as suas setas. Temos a $id_M : M \to M$ e a $\circ$ para composição
Satisfazendo as leis da $(\circ)$-Ass e $(id$-unit$)$

?? X

M2 Como $F : C[M] \to \mathbb{C}[M]$ ela corresponde ao conceito de homomorfismo de monoides.

(9) **H**

↗ respeita a op

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.

ENUNCIADO.

Sejam $\mathcal{A} = (A, *_A, inv_A, e_A)$ e $\mathcal{B} = (B; *_B; inv_B; e_B)$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. φ é homomorfismo se respeita a op. Formalmente

$$(\forall x, y \in A)[\varphi(x *_A y) = (\varphi x) *_B (\varphi y)]$$

✓

DEMONSTRAÇÃO.

Falta demonstrar que ele é inv-fechado e e-fechado.

B fechado pela id

Calc

$$\varphi(e_A) = \varphi(e_A e_A)$$
$$= \varphi(e_A)\varphi(e_A)$$

Como $e_B \varphi(e_A) = \varphi(e_A)$, logo $\varphi(e_A) = e_B$ [Resoluções únicas]

✓

B fechado pelas inversas

Seja $x \in A$.
Basta demonstrar $\varphi(x^{-1})$ é um inverso de φx.

Calc:

$$(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = \varphi(x x^{-1})$$
$$= \varphi(e_A)$$
$$= e_B$$

Como $(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = e_B$, logo $\varphi(x^{-1}) = (\varphi x)^{-1}$

✓

(1) Calc

$(a \circ f \circ a^{-1})x$

$= a(f(a^{-1}x))$

$= a(g(a^{-1}x)g^{-1})$

$= ag \cdot a(a^{-1}x) \cdot a(g^{-1})$ [$a \in \mathrm{Aut}\, G$]

$= ag \cdot (aa^{-1})x \cdot a(g^{-1})$

$= ag \cdot x \cdot (ag)^{-1}$

Logo $afa^{-1} \in \mathrm{Inn}\, G$

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Subconjunto: Imediato pela def de $\ker\varphi$.

Subgrupo:

Parte $\ker\varphi$ hab.

Como φ homo, logo $e_A \in \ker\varphi$.

Parte (/)-fechado

Sejam $x, y \in \ker\varphi$.

Basta demonstrar $\varphi(xy^{-1}) = e_B$

Calc:

$\varphi(xy^{-1}) = (\varphi x)(\varphi(y^{-1}))$

$= (\varphi x)(\varphi y)^{-1}$

$= e_B \, e_B^{-1}$ [escolha do x,y]

$= e_B$

$\varphi(aka^{-1}) = e_B$

Normal.

Basta mostrar que o $\ker\varphi$ é fechado pelos seus conjugados

Seja $a \in A$ e $k \in \ker\varphi$.

Basta mostrar $\varphi(aka^{-1}) = e_B$.

Calc

$\varphi(aka^{-1}) = (\varphi a)(\varphi k)(\varphi a^{-1})$

$= (\varphi a)\, e_B\, (\varphi a^{-1})$

$= (\varphi a)(\varphi a^{-1})$

$= (\varphi a)(\varphi a)^{-1}$

$= e_B$

Inn G $\trianglelefteq$ Aut(G)

Seja $f \in \mathrm{Inn}\, G$

Logo seja g tq $f = g - g^{-1}$

Basta mostrar que todos os conjugados da f são inners

Seja $a \in \mathrm{Aut}\, G$.

Seja $x \in G$

Calc.

(1) ?

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo. $\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

DEMONSTRAÇÃO.

$\mathrm{Inn}\, G \subseteq \mathrm{Aut}\, G$

Seja $f \in \mathrm{Inn}\, G$.

Logo seja $g \in G$ tq $f = (g - g^{-1})$

Basta mostrar que φ é um homomorfismo.

Sejam $x, y \in \mathrm{Im}\, G$

Calc

$f(x)f(y) = ((g - g^{-1})x)((g - g^{-1})y)$

$= (gxg^{-1})(gyg^{-1})$

$= gx(g^{-1}g)yg^{-1}$

$= gxyg^{-1}$

$= f(xy)$

. Parte inv-fechado

Seja $f \in \mathrm{Inn}\, G$

Logo seja $g \in G$ tq $f = (g - g^{-1})$

Basta demonstrar que $(g^{-1} - g)$ é inversa da f.

Temos $(g^{-1} - g) = (g^{-1} - (g^{-1})^{-1})$

⋮ ?

$\mathrm{Inn}\, G \leq \mathrm{Aut}(G)$.

• Parte Inn G hab.

Temos $\mathrm{id}_G = (e - e^{-1})$ ou seja id_G é um inner.

Logo $\mathrm{id}_G \in \mathrm{Inn}\, G$

• Parte $\circ$-fechado

Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{Inn}\, G$ vou demonstrar $f_1 \circ f_2$ é um inner

Logo sejam g_1, g_2 tq $f_1 = (g_1 - g_1^{-1})$ e $f_2 = (g_2 - g_2^{-1})$

Tome x arbitrário tq $x \in G$ logo

$(f_1 \circ f_2)x = f_1(f_2 x)$

$= f_1(g_2 x g_2^{-1})$

$= g_1 (g_2 x g_2^{-1}) g_1^{-1}$

$= (g_1 g_2) x (g_2^{-1} g_1^{-1})$

$= (g_1 g_2) x (g_1 g_2)^{-1}$

Logo $f_1 \circ f_2 \in \mathrm{Inn}\, G$

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1:

$\mathrm{Obj} = ☺$ ✓
$\mathrm{Arr} = |\mathcal{M}| = \mathrm{Arr}(☺, ☺)$
$(\circ) = \mathcal{M}.\mathrm{op}$ ✓
$\mathrm{id}_☺ = \mathcal{M}.\mathrm{id}$ ✓

M2:

É uma função de $\mathrm{Obj}(\mathcal{M})$ para $\mathrm{Obj}(\mathcal{N})$ onde respeita as setas? ?X Corresponde na ideia de homomorfismo de monoides.

M3: $\mathrm{Obj} = ☺$
$\mathrm{Arr} = |\mathcal{S}| = \mathrm{Arr}(☺, ☺)$
$(\circ) = \mathcal{S}.\mathrm{op}$
$\mathrm{id}_☺ =$. ?

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$: grupos, $\varphi : |\mathcal{G}| \to |\mathcal{G}'|$. Basta demonstrar que $(\forall a, b \in \mathcal{G})\, [\varphi(a * b) = (\varphi a) *' (\varphi b)]$. ($\varphi$ respeita a op) Mal-escrito!

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam G, G': grupos e $\varphi : |G| \to |G'|$ t.q. φ respeita a op.
Parte φ respeita a id:
Logo $\varphi(1_G * 1_G) = (\varphi 1_G) *' (\varphi 1_G)$. [$G$ grupo $\Rightarrow 1_G \in G$]
Logo $\varphi 1_G = (\varphi 1_G) *' (\varphi 1_G)$. ✓
Logo $\varphi 1_G = 1_{G'}$. [Res-L]
Parte φ respeita os inversos:
Seja $g \in G$.
Basta demonstrar que $\varphi(g^{-1})$ serve como inverso do φg.
Calc: $(\varphi g) *' (\varphi g^{-1}) = \varphi(g * g^{-1})$ [φ respeita a op]
$= \varphi 1_G$
$= 1_{G'}$ [φ respeita a id] ✓

(9) **K**

Escolha um dos **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

~~[illegible]~~ Parte $\ker\varphi \subseteq A$: Imediato. ✓

Parte $\ker\varphi \leq A$:

& habitado!

Basta demonstrar $\ker\varphi$ é $(/)$-fechado. [one test]

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

~~[illegible]~~ Calc: $\varphi(a * b^{-1}) = (\varphi a) * (\varphi(b^{-1}))$ [φ resp op]

$= 1_B * (\varphi b)^{-1}$ [$a \in \ker\varphi$ e φ resp inv]

$= 1_B * 1_B^{-1}$ [$b \in \ker\varphi$]

$= 1_B$ ✓

Parte $\ker\varphi$ é fechado pelos conjugados:

~~Calc.~~ Sejam $a \in A$, $k \in \ker\varphi$.

Calc: $\varphi(a * k * (a^{-1})) = (\varphi a) * (\varphi k) * (\varphi a^{-1})$ [φ resp op]

$= (\varphi a) * 1_B * (\varphi a)^{-1}$ [$k \in \ker\varphi$ e φ resp inv]

$= 1_B$ ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$:

mal escrito!

Basta demonstrar one test. -- $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$

Seja $\psi, \varphi \in \mathrm{Inn}(G)$.

Logo, sejam $g, h \in G$ t.q. $(\psi = (g\_g^{-1}))$ 1 e $(\varphi^{-1} = (h\_h^{-1}))$ 2. [φ invertível]

como saber que φ^{-1} é inner? ✗

~~Calc. $\psi \circ \varphi^{-1} = (g\_g^{-1})$~~ Vou mostrar que gh serve. -- $\psi \circ \varphi^{-1} = (gh\_(gh)^{-1})$

Seja $k \in (G)$.

Calc: $(\psi \circ \varphi^{-1})k = \psi(hkh^{-1})$

$= ghkh^{-1}g^{-1}$

$= (gh)k(hg)^{-1}$

Parte $\mathrm{Inn}(G)$ é fechado pelos conjugados:

Sejam $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$. -- $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$

Se .. ? ✗

Parte $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$:

Seja $\varphi : G \to G$ t.q. φ inner .. ? ✗

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1- Seja $\mathcal{M}$ monóide

$\text{Obj}\ \mathbb{C}[\mathcal{M}] \overset{def}{=} \{☹\}$ ✓

$\text{Arr}\ \mathbb{C}[\mathcal{M}] \overset{def}{=} \{m \mid m \in |\mathcal{M}|\}$ ✓

$id\ \mathbb{C}[\mathcal{M}] \overset{def}{=} id_{\mathcal{M}}$ ✓

$(\circ)\ \mathbb{C}[\mathcal{M}] \overset{def}{=} op_{\mathcal{M}}$ ✓

Como $op_{\mathcal{M}}$ é associativa, logo $(\circ)\ \mathbb{C}[\mathcal{M}]$ é associativa.

M3-

M2. Seja f: functor

$\mathbb{C}[\mathcal{M}] \xrightarrow{f} \mathbb{C}[\mathcal{N}]$

$f(id_{\mathcal{M}}) = id_{\mathcal{N}}$ (f respeita id)

(f respeita op)

?

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

φ homo $\boxed{\Leftarrow}$ $\Longrightarrow$ φ respeita a identidade $\left(\varphi : A \to B,\ \varphi 1_A = 1_B\right)$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $A \xrightarrow{\varphi} B$ homomorfismo. – o ponto é começar com algo aparentemente menos forte (e.g. respeita op) e conseguir algo mais forte (e.g. respeita tudo).

Seja $b \in B$ tq $\varphi(b) = 1_B$.

Calc: $\varphi(1_A) = \varphi(1_A)1_B$
$= \varphi(1_A)\varphi(b)$
$= \varphi(1_A b)$
$= \varphi(b)$
$= 1_B$

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

(Parte $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$)
Como $\varphi(e) = e$, logo $\ker\varphi$ habitado. ✓
Sejam $a, b \in \ker\varphi$. ✓
Vou demonstrar $ab^{-1} \in \ker\varphi$. [one test] ✓
Calc: $\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)\cdot(\varphi b^{-1})$ ✓ [φ homo]
$= e \cdot (\varphi b^{-1})$ ✓ [$a \in \ker\varphi$]
$= (\varphi b)^{-1}$ [φ homo]
$= e^{-1}$ [$b \in \ker\varphi$]
$= e$
Logo $ab^{-1} \in \ker\varphi$.
(Parte $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$)
Seja $g \in \mathcal{A}$.
Basta demonstrar $\ker\varphi$ é fechado ~~nos~~ conjugados.
Calc: $\varphi(geg^{-1}) = (\varphi g)\cdot(\varphi e)\cdot(\varphi g^{-1})$
$= (\varphi g)\cdot e \cdot (\varphi g^{-1})$
$= (\varphi g)\cdot(\varphi g^{-1})$
$= (\varphi g)\cdot(\varphi g)^{-1}$
$= e$
Logo $geg^{-1} \in \ker\varphi$. ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

Endo & Iso / invertível

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

$(\exists f)[\varphi \circ f = 1 = f \circ \varphi]$

DEMONSTRAÇÃO.

Arbitrário!

(Parte $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$)
Seja $\varphi : \mathrm{End}(G)$. quem é?
Como $\varphi(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e$, logo φ inner. ✗
Logo $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$.
Logo $\mathrm{Inn}(G)$ habitado.
Vou demonstrar pelo one test.
Seja

assim todo endo seria inner

(Parte $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$)
Seja $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$.
Basta demonstrar φ invertível.
Seja $\psi \in \mathrm{Inn}(G)$. ← isso não faz sentido.
Logo seja g tq $\psi = g - g^{-1}$. Qual é o alvo?
⋮
?

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1:
. Objetos: {☺} ✓
. Setas: elementos do M. ~
. id: identidade do M. ~
. o: operação do M. ✓
. Ass: operação do monóide é associativa ✓
. Id: Lei identidade do monóide. ✓

M2: $\varphi: C[M] \to C[N]$ é um functor sse respeita a identidade e a operação. isso é um Monoid-homo.
Corresponde ao conceito de homo de monoide. ~

M3:

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam $A = (A; *; e_A; ^{-1})$ e $B = (B; \cdot; e_B; ^{-1})$ grupos e $\varphi: A \to B$. φ é um homo sse φ respeita a operação: $\varphi(a*b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. ✓

DEMONSTRAÇÃO.

Respeita identidade:
Calc.: $\varphi(a)\varphi(e_A) = \varphi(a e_A)$
$= \varphi(a)$
Mas, $\varphi(a) e_B = \varphi(a)$.
Logo, $\varphi(e_A) = e_B$. [Res-Unicos]

✓

Respeita inversos:
Seja $a \in A$. Basta demonstrar que $\varphi(a^{-1})$ é o inverso de φa.
Calc.: $\varphi a \varphi(a^{-1}) = \varphi(a a^{-1})$
$= \varphi(e_A)$
$= e_B$ [Resp a Id.]

✓

∎

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1 .

Parte $\ker\varphi \leq A$:

Parte habitado: temos $\varphi(e_A) = e_B$, pois φ é homo. ✓

Parte op-fechado:

Sejam $a, b \in \ker\varphi$, basta demonstrar que $(\varphi a)(\varphi b)^{-1} = e_B$.

Calc.: $(\varphi a)(\varphi b)^{-1} = (\varphi a)(\varphi b^{-1})$

$= \varphi(ab^{-1})$ [(1)]

$= e_B$

temos $\varphi(b^{-1}) = \varphi(b)^{-1} = e_B^{-1} = e_B$, logo $b^{-1} \in \ker\varphi$. (1) ✓

Basta demonstrar que $\ker\varphi$ é conjugado fechado.

Sejam $a \in A$ e $k \in \ker\varphi$.

Basta demonstrar que $\varphi(aka^{-1}) = e_B$.

Calc.: $\varphi(aka^{-1})$

$= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1})$ [φ homo]

$= \varphi(a)e_B\varphi(a^{-1})$ [esc. do k]

$= \varphi(a)\varphi(a^{-1})$

$= \varphi(aa^{-1})$ [φ homo]

$= \varphi(e_A) = e_B$ [φ homo]

■ ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Subgrupo:

habitado: homomorfismo trivial. ?

op-fechado:

Sejam φ_1 e φ_2.

Sejam $\varphi \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$ e ψ auto.

Basta demonstrar que $\psi\varphi\psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1 - Uma categoria $\mathbb{C}(\mathcal{M})$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide é uma categoria onde seus objetos são conjuntos e suas setas são todas as f tais que $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{M}$ e f respeita a operação e a identidade. ✗

M2 - Um functor de $\mathbb{C}(\mathcal{M})$ para $\mathbb{C}(\mathcal{N})$ é uma função $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ que respeita a estrutura dos monóides, ou seja, respeita a operação e a identidade, i.e., para toda ~~seta~~ função de $\mathbb{C}(\mathcal{N})$ é possível defini-la utilizando uma composição de φ com alguma função de $\mathbb{C}(\mathcal{M})$.

$$(\forall \mathcal{N} \xrightarrow{f} \mathcal{N})(\exists \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M})[\varphi \circ g = f]$$

não faz sentido!

O conceito conhecido é o de homomorfismos entre monóides.

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam $G = (G; *_G, 1_G, -^{-1_G})$ e $\mathcal{H} = (H; *_H, 1_H, -^{-1_H})$ grupos e $\varphi : G \to H$.
Dizemos que φ é um homomorfismo se φ respeita a operação. Ou seja,
$(\forall g, g' \in G)[\varphi(g *_G g') = \varphi(g) *_H \varphi(g')]$ ✓

DEMONSTRAÇÃO.

Precisamos demonstrar que a φ respeita a identidade e os inversos.

Parte φ respeita a identidade:
Seja g tal que $\varphi(g) = 1_H$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(1_G) &= \varphi(1_G) *_H 1_H && [\text{H-IdR}] \\
&= \varphi(1_G) *_H \varphi(g) && [\text{Escolha de } g] \\
&= \varphi(1_G *_G g) && [\varphi \text{ resp. op}] \\
&= \varphi(g) && [\text{G-IdL}] \\
&= 1_H && [\text{Escolha de } g]
\end{aligned}$$

✓

Parte φ respeita os inversos:
Seja $g \in G$.
Temos que $1_H = \varphi(1_G) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$. (I)
Assim como, $1_H = \varphi(g)\varphi(g)^{-1}$. (II)
Pelas 1 e 2, segue que $\varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1}$.
Logo, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

✓

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker \varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Parte $\ker\varphi \overset{?}{\subseteq} A$: Imediato pela definição da função

Parte $\ker\varphi \leq A$:

Sabemos que $\varphi(1_A) = 1_B$, logo $\ker\varphi$ é habitado.

Basta utilisar o one-test:

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

Queremos mostrar que $ab^{-1} \in \ker\varphi$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(ab^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(b^{-1}) && [\varphi \text{ resp op}] \\
&= 1_B\,\varphi(b^{-1}) && [\text{Escolha de } a] \\
&= \varphi(b^{-1}) && [B\text{-Id}] \\
&= \varphi(b)^{-1} && [\varphi \text{ resp inv}] \\
&= 1_B^{-1} && [\text{Escolha de } b] \\
&= 1_B
\end{aligned}
$$

✓

Parte $\ker\varphi \trianglelefteq A$:

Sejam $k \in \ker\varphi$ e $a \in A$.

Basta demonstrar que $aka^{-1} \in \ker\varphi$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) && [\varphi \text{ resp op}] \\
&= \varphi(a)\,1_B\,\varphi(a^{-1}) && [\text{Escolha de } k] \\
&= \varphi(a)\varphi(a^{-1}) && [B\text{-Id}] \\
&= \varphi(aa^{-1}) && [\varphi \text{ resp op}] \\
&= \varphi(1_A) && [A\text{-Inv}] \\
&= 1_B
\end{aligned}
$$

✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\operatorname{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \operatorname{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1. Seja $\mathcal{M} = (M ; e, *)$. Temos $\{☺\}$ os objetos de $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$, um Arrow $e : ☺ \to ☺$ e pra cada $x \in M$ um arrow $x : ☺ \to ☺$ e $*$ como a composição.

M2. Corresponde ao conceito de homomorfismo de monoides.

como?

M3.

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Seja A, B grupos.
Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo.
$(\forall A' \leq A)(\exists \varphi' : A' \to B)[\varphi'$ é um homomorfismo$]$. ?! X

DEMONSTRAÇÃO.

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K2.

Parte $\Rightarrow$

Suponha $\operatorname{Ker}\varphi$ é um singleton.

Logo $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_A\}$. ($\varphi$ respeita identidade)

Logo $\varphi(e_A) = e_B$. (φ respeita identidade)

o alvo é: φ injetiva

Parte $\Leftarrow$

Suponha φ injetiva.

Logo $\varphi(e_A) = e_B$. (φ respeita identidade)

Logo $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_A\}$. ?

■ X

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\operatorname{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \operatorname{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1 ⇝ Os membros do |M| serão setas de um único objeto para ele mesmo. Haverá apenas um objeto nessa categoria. Dadas duas setas S, S', a comp delas será o retorno dado pela operação do monóide, que é associativa. A seta identidade corresponderá ha e_M. ✓

M2 ⇝ É um homomorfismo de monóide como?

M3 ⇝ Nem teria como saber isso, garantidamente, pois nem há id num semigrupo. ...e?

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Sejam G, H grupos. Se F é um functor de G p/ H, então F é um homomorfismo. ✗

DEMONSTRAÇÃO.

para ser aceitável deveria definir as $\mathbb{C}[G]$.

Mas não seria interessante como critério (compare com o que encontramos nas aulas).

(9) **K** *Escolha um dos* **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

Demonstração de ________ .

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

Demonstração.

Só isso mesmo.

(9) **M**

M1. Defina a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ onde $\mathcal{M}$ é um monóide.
M2. Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. O que é um functor da categoria $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para a categoria $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$? Corresponde a qual conceito já conhecido?
M3. Se em vez de monóide era um semigrupo $\mathcal{S}$, como definarias a $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$?
RESPOSTAS.

M1: $\mathcal{M}=(M;*,e)$
$Obj(\mathbb{C})=\{M\}$
$arr(\mathbb{C})=M$
$src(f)=M=tgt(f)$
$Id=e$
$x\circ y=x*y$

M2: Um functor de $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ para $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ é uma função que preserva a estrutura do $\mathcal{M}$ no $\mathcal{N}$, (a operação e a identidade), corresponde ao homomorfismo de $\mathcal{M}$ para $\mathcal{N}$,

não; isso é um Monoid-homo

M3: $\mathcal{S}=(S;*)$
$Obj(\mathbb{C})=\{S\}$
$arr(\mathbb{C})=S$
$src(f)=S=tgt(f)$
$x\circ y=x*y$

..e qual seria a id_S?

(9) **H**

Enuncie e demonstre um critério interessante de homomorfismo para grupos.
ENUNCIADO.

Seja $\varphi: A \to B$
φ homo $\iff (\forall x,y\in A)[\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)]$

DEMONSTRAÇÃO.

$(\Rightarrow)$:
imediato.
$(\Leftarrow)$:
Parte $\varphi(e_A)=e_B$:
Calc:
$\varphi(e_A)$
$=\varphi(e_Ae_A)$
$=\varphi(e_A)\varphi(e_A)$
Logo, $\varphi(e_A)=e_B$
Parte $\varphi(x^{-1})=(\varphi(x))^{-1}$
Seja $x\in A$.

Basta demonstrar que
$\varphi(x)\varphi(x^{-1})=e_B$.
Calc:
$\varphi(x)\varphi(x^{-1})$
$=\varphi(xx^{-1})$
$=\varphi(e_A)$
$=e_B$
$\blacksquare$

(9) **K**

Escolha um dos **K1**, **K2**.

Seja homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$.

K1. $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

K2. $\ker\varphi$ é um singleton $\iff$ φ injetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE K1.

Parte $\ker\varphi \leq A$:

Sejam $x, y \in \ker\varphi$.

Basta demonstrar que $\varphi(xy^{-1}) = e_B$.

Calc:

$\varphi(xy^{-1})$

$= \varphi(x)\varphi(y^{-1})$

$= e_B\,\varphi(y)^{-1}$

$= e_B^{-1}$

$= e_B$ ✓

□

(habitado?)

Parte $\ker\varphi \trianglelefteq A$:

Basta demonstrar que $\ker\varphi$ é fechado pelos conjugados, ou seja, $\varphi(ana^{-1}) = e_B$

$\forall a \forall n \ldots$

Sejam $a \in A$, $n \in \ker\varphi$.

Calc:

$\varphi(ana^{-1})$

$= \varphi(a)\varphi(n)\varphi(a^{-1})$

$= \varphi(a)\, e_B\, \varphi(a^{-1})$

$= \varphi(a)\varphi(a^{-1})$

$= \varphi(aa^{-1})$

$= \varphi(e_a)$

$= e_B$

∎ ✓

(9) **I**

Seja $\mathcal{G}$ grupo.

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.