(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam $a, b : G$
c

Existência:

Escolho $a^{-1}c$ como testemunho

Cale:

$a(a^{-1}c) = (aa^{-1})c$ [(ass)]

$= \cancel{e}\,c$ [(Inv-R)]

$= c$ [(Id-L)] ✓

Unicidade:

seja t t.q. $at = c$ ✓

Cale

$a^{-1}c = a^{-1}(at)$ [escolho de t]

$= (a^{-1}a)t$ [(ass)]

$= \cancel{e}\,t$ [(inv-L)]

$= t$ [(Id-L)]

✓

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Parte $H_1 \cap H_2$ é e_G-fechado:

Como H_1 e H_2 são subgrupos de $\mathcal{G}$, logo $e_G \in H_1$ e $e_G \in H_2$

Split: -- Yikes?

$e \in H_1$:

Imediato

$e \in H_2$:

Imediato ✓

Parte $H_1 \cap H_2$ é ..?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a : \alpha$ e $n : Nat$.
Vou demonstrar que $a \uparrow_L n = a \uparrow_R n$.
Por indução no n.
Base:

$a \uparrow_L 0 = e$ $[\uparrow_L.1]$ ✓
$= a \uparrow_R 0$ $[\uparrow_R.1]$

P.I.:

$a \uparrow_L (n+1) = (a \uparrow_L n) * a$ $[\uparrow_L.2]$
$= (a \uparrow_R n) * a$ $[h_1]$ ××
$=$ ... (A1)!

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Sejam $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$. Qual teu alvo?
Como $H_1 \leq \mathcal{G}$ e $H_2 \leq \mathcal{G}$ logo $h_1 \in \mathcal{G}.carrier$ e $h_2 \in \mathcal{G}.carrier$.
Logo $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam $a, c \in \mathcal{G}$.

EXISTÊNCIA

Vou mostrar que $(a^{-1}c)$ serve.

Calculamos:

$a(a^{-1}c) = (a\,a^{-1})c$ (Ass)

$= e\,c$ (inv-R)

$= c$ (id-L)

UNICIDADE:

Seja x tal que $ax = c$.

Vou mostrar que $x = (a^{-1}c)$

Calculamos:

$a^{-1}c = a^{-1}(ax)$ (hip)

$= (a^{-1}a)x$ (Ass)

$= e\,x$ (inv-L)

$= x$ (id-L)

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Como H_1, H_2 são subgrupos de $\mathcal{G}$, logo os conjuntos H_1, H_2 são subconjuntos de $\mathcal{G}$.

Seja $a \in H_1$.

Por quê?

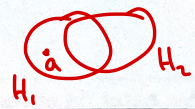
CASO ~~Se~~ $a \in H_2$:

Logo $a \in H_1 \cap H_2$.

Como $H_1 \subseteq \mathcal{G}$ e $H_2 \subseteq \mathcal{G}$, logo $H_1 \cap H_2 \subseteq \mathcal{G}$ (Que?!

CASO ~~Se~~ $a \notin H_2$:

Logo $H_1 \cap H_2$ é vazio.



Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam $a, c : |\mathcal{G}|$.

Parte Existência:

Testemunho $(a^{-1}c)$.

Calculemos:

$a(a^{-1}c) = (aa^{-1})c$ [Ass.]

$= ec$ [Inv-R]

$= c.$ [Id-L]

Parte Unicidade:

Sejam u, v tais que $au = c$ e $av = c$. (h)

Logo $au = av$. [(h).2]

Logo $u = v$. [Can-L]

∎

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**. .

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Parte subconjunto:

"Imediato!" $[|H_1| \,\&\, |H_2| \subseteq \mathcal{G}]$

Parte id:

(por quê?)

Como $e_{\mathcal{G}} \in H_1$ e $e_{\mathcal{G}} \in H_2$, logo $e_{\mathcal{G}} \in H_1 \cap H_2$.

Parte $*$:

Sejam $a, b \in H_1 \cap H_2$.

Parte inv:

Seja $x \in H_1 \cap H_2$.

Como H_1 e H_2 são inv-fechados, logo $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

ficou obscuro

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

θ. Cancelamento-L

$(\forall a,b,c)[\cancel{ac = bc}\,[ca = cb \Rightarrow a = b]$

Demons:

Sejam $a,b,c : |G|$, t.q. $ca = cb$.$^{(h)}$

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
a = ea &= (c^{-1}c)a && [\text{Id-L}, \text{Inv-L}\ c] \\
&= c^{-1}(ca) && [\text{Ass}] \\
&= c^{-1}(cb) && [(h)] \\
&= (c^{-1}c)b && [\text{Ass}] \\
&= eb && [\text{Inv-L}] \\
&= b. && [\text{Id-L}]
\end{aligned}
$$

∎

θ. Func-App

$(\forall \alpha,\beta.T_\alpha)$

$(\forall f : \alpha \to \beta)[a = a' \Rightarrow fa = fa']$

$(\forall a,a')$

Demons:

Sejam $f : \alpha \to \beta$ e $a, a' : \alpha$, t.q. $a = a'$.$^{(h)}$

Calculemos:

$$fa = fa'. \quad [(h)]$$

∎

Ou

?

(TINTA!)

θ. Can-L

$(\forall a,b,c)[ca = cb \Rightarrow a = b]$

Demons:

Sejam $a,b,c : |G|$, t.q. $ca = cb$.

Logo $c^{-1}(ca) = c^{-1}(cb)$. [Func-App $\lambda x.c^{-1}x$]

Logo $(c^{-1}c)a = c^{-1}(cb)$. [Ass]

Logo $ea = c^{-1}(cb)$. [Inv-L]

Logo $a = c^{-1}(cb)$. [Id-L]

Logo $a = (c^{-1}c)b$. [Ass]

Logo $a = eb$. [Inv-L]

Logo $a = b$. [Id-L]

∎

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

$\vdash (\forall a, n)[\, a \uparrow_L n = a \uparrow_R n \,]$

Seja $a : \alpha$.

Indução no n.

Caso $n = 0$:

$a \uparrow_L 0 = e$

$a \uparrow_R 0 = e$

Caso $n = m+1$: estranho

Seja m t.q. $a \uparrow_L m = a \uparrow_R m$.

Calc: ...

#continua na direita

Caso $n = m+1$:

Calc:

$a \uparrow_L (m+1) = (a \uparrow_L m) * a$

$= (a \uparrow_R m) * a$

$a \uparrow_R (m+1) = (a \uparrow_R m) * a$ ✗

$a * (a \uparrow_R m)$

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Parte ($H_1 \cap H_2$ é hab.).

Como $H_1 \leq G$ e $H_2 \leq G$, logo $e \in H_1$ & $e \in H_2$.

Logo $e \in H_1 \cap H_2$

Parte ($H_1 \cap H_2$ é G-fechado):

Sejam $a, b \in G$ t.q. $a, b \in H_1 \cap H_2$

Logo $a, b \in H_1$ & $a, b \in H_2$. – pulou!

Logo $a * b^{-1} \in H_1$ & $a * b^{-1} \in H_2$. [$H_1 \leq G$ & $H_2 \leq G$] ?)

Logo $a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2$. [Critérion "one test"]

cadê?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

a^n $^n a$

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

a^n

Demonstração de _____.

Sejam a: Ar e n: Nat.
Indução no n.
$(n = 0)$:
Calculamos:
$a^0 = e$ $(\uparrow_R.1)$
$= {}^0a$. $(\uparrow_L.1)$

$(n = Sk)$:
Calculamos:
${}^{Sk}a = {}^k a a$ $(\uparrow_L.2)$
$= a^k a$ (h.i.)
$= a^{Sk}$. (Lemma 1)

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

que $H_1 \cap H_2$ é um grupo com as ops

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

Demonstração de B1 Vou mostrar que $H_1 \cap H_2$ é grupo com as $G.inv$, $G.op$ $G.id$.

(Ass):
Sejam $a, b, c \in H_1 \cap H_2$.
logo $a, b, c \in H_1$. --- Ext-L
Calculamos:
$(ab)c = a(bc)$ $(H_1.Ass)$.

(Id): qual o alvo?
Seja $x \in H_1 \cap H_2$
logo $x \in H_1$.
logo $ex = x = xe$,
pois H_1 é subgrupo de G.

(inv)
Seja $x \in H_1 \cap H_2$.
logo $x \in H_1$
logo $x^{-1}x = e = xx^{-1}$,
pois H_1 é subgrupo de G

Vou mostrar que $H_1 \cap H_2 \subseteq |G|$.
Seja $x \in H_1 \cap H_2$, logo $x \in H_1$
e logo $x \in |G|$, pois $H_1 \subseteq |G|$.

não é isso que $(\leq)$ significa!

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

0. lemma 1 $(\forall a : \alpha)(\forall n : Nat)[a^n a = a^{Sn}]$.

Sejam $a : \alpha$, $n : Nat$

Indução no n.

$(n = 0)$:

Calculamos:

$$a^0 a = ea \quad (\uparrow R.1)$$
$$= a. (id)$$
$$a^{S0} = aa^0 \quad (\uparrow R.2)$$
$$= ae \quad (\uparrow R.1)$$
$$= a. (id)$$

$(n = Sk)$:

Calculamos:

$$a^{Sk} a = (aa^k)a \quad (\uparrow R.2)$$
$$= a(a^k a) \quad (*.Ass)$$
$$= a(a^{Sk}) \quad (h.i.)$$
$$= a^{S(Sk)} \quad (\uparrow R.2).$$

$\blacksquare$

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**. $\forall (t, t') _ \& \; t = t'$

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

Demonstração de A1.

Sejam a, c.

Parte existência:

Calculemos: $a(a^{-1}c)$

$= (aa^{-1})c$ [ass $a a^{-1} c$]

$= ec$ [Inv R a]

$= c$ [I/L c]

(Uso $(a^{-1}c)$ como testemunho)

Parte unicidade.

Sejam t, t'. t.q.:

Suponha $at = c$.

Suponha $at' = c$.

Logo $at = at'$

Logo $a^{-1}(at) = a^{-1}(at')$. [op a^{-1}]

Logo $(a^{-1}a)t = (a^{-1}a)t'$. [ass]

Logo $et = et'$. [Inv L a]

Logo $t = t'$.

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

Demonstração de B2. $|\bigcap \mathscr{H}| \subseteq |\mathcal{G}|$ & $\bigcap \mathscr{H}$ grupo

Parte $|\bigcap \mathscr{H}| \subseteq |\mathcal{G}|$:

Seja $h \in \bigcap \mathscr{H}$.

Logo $(\forall H \in \mathscr{H})[h \in H]$.

⋮

Parte $\bigcap \mathscr{H}$ é grupo:

↳ TypeError

não é isso o que tu precisa demonstrar.

?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \quad [1.L] \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e \quad [1.R]$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \quad [2.L] \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n). \quad [2.R]$$

$$a^{n+1} = {}^{n}a * a \qquad\qquad a^{n+1} = a * a^{n}$$

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Indução:
Base:
calc: $a \uparrow_L 0 = e$ [1.L]
$a \uparrow_R 0 = e$

Passo indutivo
Sesa n: Nat tq $a \uparrow_L n = a \uparrow_R n$.
calc:
$a \uparrow L (n+1) = (a \uparrow_L n) * a$ [2.L]
$= (a \uparrow_R n) * a$ [hi]
$= a \uparrow_R (n+1)$ [θ]

$^{n}a = {}^{n}a * a$
$= a^{n} * a^{1}$

?

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

$x \in \quad \subseteq x \in \mathcal{G}$

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Como $H_1, H_2 \leq G$, logo $H_1 \neq \emptyset$ e $H_2 \neq \emptyset$
Vou mostrar que $H_1 \cap H_2$ é $(*)$-fechado
Sesa $a, b \in H_1 \cap H_2$.
Logo $a, b \in H_1$ e $a, b \in H_2$. [def $\cap$]
Logo $ab \in H_1$ e $ab \in H_2$ [$H_1, H_2 \leq G$]
Logo $ab \in H_1 \cap H_2$. [def $\cap$]
Vou mostrar que é $^{-1}$a fechado
Sesa $a \in H_1 \cap H_2$.
Logo $a \in H_1$ e $a \in H_2$. [def $\cap$]
Logo $a^{-1} \in H_1$ e $a^{-1} \in H_2$. [$H_1, H_2 \leq G$]
Logo $a^{-1} \in H_1 \cap H_2$. [def $\cap$]

pulou

ignorou a op da id.

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

$(a \uparrow_R n) * a = a \uparrow_R (n+1)$

Base $(a \uparrow_R 0) * a = e * a = a$

$a \uparrow_R (0+1) \cancel{=} (a \uparrow_R 0) * a$ $\quad a * (a \uparrow_R 0)$

$= e * a$

$= a$

cadê o P.I.?

θ $a^n a^{m+1} = a^{n+m+1}$??

Indução no m

Base $a^n \cdot a^0 = a^n \cdot e = a^n$

$a^{n+0} = a^n$

PI

Seja k Nat tq $a^n a^k = a^{n+k}$

Calc: $a^n a^{(k+1)} \cancel{=} a^n (a^k a)$ $\quad$ {def a^k} $\quad = a^n(a a^k)$

$\boxed{\text{assoc}}$ $\cancel{=} a^{n+k} a$ $\quad$ [hi]

a sumiu $\cancel{=} a^{n+k+1}$ $\quad$ [def a^k]

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam $a, c, \boxed{t, t'} : \alpha$ $\mathcal{G} : (\alpha; *, e, \mathrm{inv})$

suponha que $at = c^{(1)}$ e $at' = c^{(2)}$

Calculemos:

$at = c$ (1)

$at = at'$ [(2)]

$a^{-1}(at) = a^{-1}(at')$ [inv[-a]] [?]

$et = et'$ [IIL]

$t = t'$

teu alvo não é um ∀∀∀∀ mas um ∀∀. Tu ta confundindo o seja... com declarações em certas linguagens de programação.

O objetivo de um «seja x : Int.» não é apenas estabelecer um tipo para a "variável" 'x', como parece que tu considera aqui.

O «seja x : Int» solicita um inteiro e escolhe o nome 'x' para referir a ele.

isso é uma lista de Props, não um cálculo.

Isso é uma tentativa apenas para a unicidade. Faltou a existência!

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

(Abuso de gerúndio)

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Sendo H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$ $H_1 \leq \mathcal{G}$ e $H_2 \leq \mathcal{G}$ (1)

Logo $H_1 \cap H_2 \leq H_1$ e $H_1 \cap H_2 \leq H_2$ tá confundindo ($\leq$) com ($\subseteq$)

Então $H_1 \cap H_2 \leq H_1 \leq \mathcal{G}$

e $H_1 \cap H_2 \leq H_2 \leq \mathcal{G}$ X

Logo $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$ [transitividade] ?

(Veja o que significa ($\leq$))

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam $a, c \in \mathcal{G}$.

Existência:
Como $a, c \in \mathcal{G}$, pela (G0), $(\exists t)[at = c]$. X

Unicidade:
Sejam u, v t.q. $au = c = av$. (1)
Calc:
$au = c$ [(1)]
$= av$ [(1)]

Logo $u = v$. [(G-L) a u v]

faltou

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Como $H_1, H_2 \leq \mathcal{G}$, logo $H_1 \cap H_2$ é hab.
Logo, seja $x \in H_1 \cap H_2$.
Como $x \in H_1 \cap H_2$ e $x \in \mathcal{G}$, logo $(H_1 \cap H_2) \subseteq \mathcal{G}$. ?? X
Basta demonstrar $(H_1 \cap H_2)$ é $(*)$-fechado. — tem três ops no $\mathcal{G}$!
Seja e a identidade do $\mathcal{G}$.
Como e é a identidade do $\mathcal{G}$, logo e é a id de H_1 e H_2. X
Logo $e \in (H_1 \cap H_2)$. X
H_1, H_2 são conjuntos.
Basta demonstrar $(x * e) \in (H_1 \cap H_2)$. X
Calc:
$x * e = x$ [(G-2)]
logo $(x\,e) \in (H_1 \cap H_2)$.

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

1. (OCL) $(\forall a, x, y)[ax = ay \Rightarrow x = y]$

Sejam a, x, y t.q. $ax = ay$ .. ?

X

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

$(\forall n)(\forall a)[\,{}^{n}a = a^{n}\,]$

Indução: $\boxed{\text{Seja } a.}$

Base:

Calc.:

$$\begin{aligned} {}^{0}a &= e && [({}^{n}a.1)] \\ &= a^{0} && [(a^{n}.1)] \end{aligned}$$

P.I.:

Seja k, t.q. ${}^{k}a = a^{k}$. (HI)

Calc.:

$$\begin{aligned} {}^{k+1}a &= {}^{k}a * a && [({}^{n}a.2)] \\ &= a^{k} * a && [(HI)] \\ &= a^{k+1} && [(P\text{-}Sum)] \end{aligned}$$

$\blacksquare$

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(Id)-fechado:

Como H_1, H_2 são subgrupos, logo $\underbrace{a\ id}_{e} \in H_1 \cap H_2$. $e \in H_1$ & $e \in H_2$, logo

(Inv)-fechado:

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(P-Sum): $(\forall n)(\forall m)(\forall a)[a^{n+m} = a^n \cdot a^m]$

Sejam n, a.

Indução:

Base:

Calc.: $a^{n+0} = a^n$

$= a^n$

$= a^n e \quad [(Id)]$

$= a^n a^0 \quad [(a^n.1)]$

P.I.:

Calc.:

$a^{n+(k+1)} = a^{(n+1)+1}$

roubou muito $\cancel{=} a^{(n+k)} * a \quad [(a^n.2)]$

$= (a^n a^k) a \quad [(HI)]$) assoc.!

$= a^n a^{k+1} \quad [(a^n.2)]$

∎

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam $a, c \in G$.
Existência:
Testemunho $a^{-1}c$.
Calc: $a(a^{-1}c) = (aa^{-1})c$ [(G1)]
$= ec$ [(G3)]
$= c$. [(G2)]
Unicidade:
Sejam t, t' tais que $at = c$ e $at' = c$.
Logo $at = at'$.
Logo $aa^{-1}t = aa^{-1}t'$. $\boxed{[(_\, a^{-1} _)]}$ → isso indica função binária!
Logo $(aa^{-1})t = (aa^{-1})t'$. [(G1)]
Logo $et = et'$ [(G3)]
Logo $t = t'$ [(G2)]

Não há função que, aplicando nos dois lados chegaria nessa igualdade!

(14) **B** $u = G$ *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

→ isso não faz sentido, pois $H_1 \cap H_2$ é apenas um conjunto

Basta demonstrar que $\boxed{(H_1 \cap H_2) \text{ respeitam as regras dos subgrupos}}$

aqui tu precisa inferir $e \in H_1$ & $e \in H_2$

Parte identidade:
Seja e a identidade de H_1 herdada de G.
Seja e' a identidade de H_2 herdada de G.
Pela [(!-id)G] temos que $e = e'$.
Logo $e \in (H_1 \cap H_2)$. [$\cap$.1]
Logo $(H_1 \cap H_2)$ possui identidade herdada de G

Parte inverso:
Seja $x \in (H_1 \cap H_2)$.
Logo $x \in H_1$ & $x \in H_2$. [$\cap$.1]
Como H_1 e H_2 são (inv)-fechados, logo $x^{-1} \in H_1$ & $x^{-1} \in H_2$.
Logo $x^{-1} \in (H_1 \cap H_2)$. [$\cap$.1]
Logo $(H_1 \cap H_2)$ é (inv)-fechado

Parte operação.
Sejam $x, x' \in (H_1 \cap H_2)$.
Logo $x, x' \in H_1$ & $x, x' \in H_2$. [$\cap$.1]
Como H_1 e H_2 são (op)-fechados, logo $xx' \in H_1$ & $xx' \in H_2$.
Logo $xx' \in (H_1 \cap H_2)$. [$\cap$.1]
Logo $(H_1 \cap H_2)$ é (op)-fechado.

Logo $(H_1 \cap H_2) \leq G$.

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

definição de interseção ($\cap$.1):

$$x \in A \cap B \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \& \ x \in B$$

Unicidade da identidade:

Seja $a \in G$.

Sejam e, e' tais que $ae = a$ & $ae' = a$.

Cuidado! uma identidade deve "deixar todos em paz", não apenas o seu $a \in G$

Logo $ae = ae'$.

Logo $a^{-1}ae = a^{-1}ae'$. [(a^{-1}_)]

agora sim!

Logo $(a^{-1}a)e = (a^{-1}a)e'$. [(G1)]

Logo $ee = ee'$. [(G3)]

Logo $e = e'$. [(G2)]

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

Demonstração de A1.

Sejam $a, c \in \mathcal{G}$. ✓

Existencia:

Vou demostrar que $a^{-1}c$ serve. ✓

Calculemos:

$$\begin{aligned} at &= a(a^{-1}c) \\ &= (aa^{-1})c \\ &= ec \\ &= c. \end{aligned}$$ ✓

Unicidade:

Sesa $K \in \mathcal{G}$ t.q. $aK = c$. ✓

Vou demonstrar que $K = a^{-1}c$ ✓

Como $aK = c$, logo $a^{-1}(aK) = a^{-1}c$. (Assoc.)

Logo $eK = a^{-1}c$.

Logo $K = a^{-1}c$. ✓

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

Demonstração de B1.

Como H_1 e H_2 são subgrupos, logo $e \in H_1 \cap H_2$. } ficou escondido o porquê.

Como H_1 e H_2 são $(*_{\mathcal{G}})$-fechados, logo $H_1 \cap H_2$ também é.

Como H_1 e H_2 são inv-fechados, $H_1 \cap H_2$ também é.

tudo isso é quase teu alvo (o enunciado).

Cadê as linhas de código que fazem algo?

So isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e.
Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam a, e.
Existência:
Vale: $a(a'e) = (aa')e$ [(G1)]
$= ee$ [(G3)]
$= e$ [(G2)]
Testemunho $(a'e)$.
Unicidade:
Sejam t, t'. t.q.
Suponha $at = e$ & $at' = e$.
Logo $at = at'$.
Logo $a^{-1}(at) = a^{-1}(at')$.
Logo $et = et'$. [(G3)]
Logo $t = t'$. [(G2)]
■

pulou assoc.

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Sejam $a, b \in H_1 \cap H_2$.
Logo $a, b \in H_1$ & $a, b \in H_2$.
Como $H_1 \leq \mathcal{G}$ & $H_2 \leq \mathcal{G}$, $\boxed{\text{logo } a *_{\mathcal{G}} b \in \mathcal{G}.}$
Logo $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.
■

o que tem a ver?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$\begin{aligned} &1.\ a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e && 1.\ a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e \\ &2.\ a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a && 2.\ a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

~~Sejam a, c.~~
Seja a.

apenas «Base»

$\boxed{\text{Caso Base:}}$
Calculamos:

$a \uparrow_L 0 = e$ [↑L.1]
$= a \uparrow_R 0$ [↑R.1]

Passo Indutivo:
Seja k tal que $a \uparrow_L k = a \uparrow_R k$. [HI]
Calculamos:

$a \uparrow_L (k+1) = (a \uparrow_L k) * a$ [↑L.2]
$= a * (a \uparrow_L k)$ [Lemma 1] ✗
$= a * (a \uparrow_R k)$ [HI].
$= a \uparrow_R (k+1)$ [↑R.2]

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B2 .

~~Seja $H \in \mathscr{H}$. e~~ Seja H um subgrupo de $\mathcal{G}$ tal que $H \in \mathscr{H}$. → Seja $H \in \mathscr{H}$
~~Seja $x \in H$.~~ Seja $x \in \bigcap \mathscr{H}$.
Pela definição da Interseção, temos que $x \in H$.
~~Como H~~ Logo, pela definição de subgrupo, $x \in \mathcal{G}$.

✗ Qual é o alvo aqui?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

Lemma 1 - ~~$(\forall a)[a * a \uparrow$~~

$(\forall a)(\forall k)\,[a * (a \uparrow k) = (a \uparrow k) * a]$

Sejam a e k.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
a^{-1} * (a * (a \uparrow k)) &= (a^{-1} * a) * (a \uparrow k) && [\text{Assoc}] \\
&= e * (a \uparrow k) && [\text{Inv-R}] \\
&= (a \uparrow k) && [\text{Id-R}] \\
&= (a \uparrow k) * e && [\text{Id-L}] \\
&= (a \uparrow k) * (a * a^{-1}) && [\text{Inv-L}] \\
&= ((a \uparrow k) * a) * a^{-1} && [\text{Assoc}]
\end{aligned}
$$

Logo, pelas Resoluções Unicas, temos que $a * (a \uparrow k) = (a \uparrow k) * a$. Inv

(1) Não tem grupo aqui. Logo nem $(\bar{\ }^{-1})$, nem (Res)

(2) Se tivesse, ainda teria um problema:
Aplicou a (Res) em quais argumentos?

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e.
Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Para demonstrar $(\forall a, c)(\exists! t)[at = c]$ chamo como testemunha $t = a^{-1}c$

Calculamos: $a(a^{-1}c) = (aa^{-1})c$ (ass)
$= ec$ (inv-R)
$= c$ (id-L)

pra que tanta negatividade na vida?

agora suponha $t' \neq t$ no qual $at' = c$ logo $a^{-1}(at') = a^{-1}c$ (op inv L)

?

logo $(a^{-1}a)t' = t$ [(ass)-L, ($t = a^{-1}c$)-R]
logo $et' = t$ [inv-L]
logo $t' = t$ [id-L]
absurdo, logo para todo t' t. q. $at' = c$, $t' = t$.

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B2 .

temos 2 caso de familia de subgrupos, caso subgrupos de mesmo nível[1] (sem e caso subgrupos relacionados de níveis diferentes[2] ??

??

Caso 1º ou caso a familia contenha o subgrupo trivial:
a interseção sera o sub-grupo trivial pois $(\forall i \in I)(e \in H_i)$ I sendo o index da familia $\mathcal{H}$. sendo um subgrupo valido

quem disse que tem menor?

Caso 2º:
Eu chamo o menor subgrupo dessa lista e esse é a $\bigcap \mathcal{H}$. como ele já é subgrupo, imediato

??

Só isso mesmo.

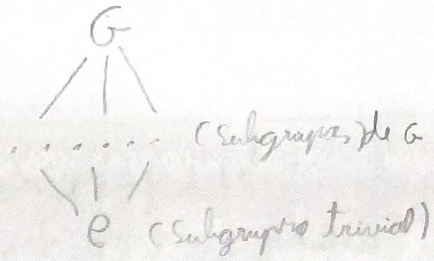
[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

quem disse?

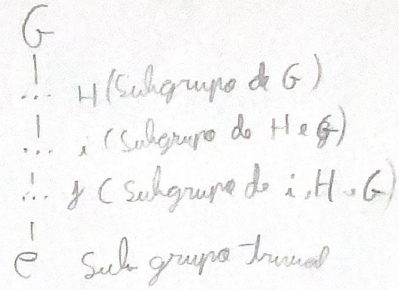
LINHAS DE CÓDIGO. handwaving!

ass: $x(yz) = (xy)z$
inv-R: $xx^{-1} = e$
inv-L: $x^{-1}x = e$
id-L: $ex = x$

B_2 Caso 1



Caso 2



Se para uma familia de conjuntos $\mathcal{A}$ indexada por $i \in I$ t.q. se $i_1 \leq i_2$ então $A_{i_1} \subseteq A_{i_2}$ chamo i' que para qualquer i $i' \leq i$, tenho que $(\forall x \in A_{i'})([\forall A_i][x \in A_i])$ segundo a definição de interseção grande $A_{i'} = \bigcap_{i \in I} A_i$

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

Cuidado.
Aqui não tem nenhuma "linha de comando",
Apenas uma lista de Props.
Tá confundindo o $(\Longrightarrow)$ (que construa props)
com um comando que faz algo para inferir algo.

Precisa começar escrever (e postar!) demonstrações.

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1 .

Identidade: $e \in H_1 \wedge e \in H_2 \Longrightarrow e \in H_1 \cap H_2$.

por quê?

Inverso: $(\forall g)[\,g \in H_1 \Longleftrightarrow g^{-1} \in H_1\,]$

$(\forall g)[\,g \in H_2 \Longleftrightarrow g^{-1} \in H_2\,]$

$(\forall g)[\,g \in H_1 \cap H_2 \Longleftrightarrow g^{-1} \in H_1 \cap H_2\,]$.

Operação $(*)$: $(\forall g_1, g_2)[\,g_1, g_2 \in H_1 \Longrightarrow g_1 * g_2 \in H_1\,]$

$(\forall g_1, g_2)[\,g_1, g_2 \in H_2 \Longrightarrow g_1 * g_2 \in H_2\,]$

$(\forall g_1, g_2)[\,g_1, g_2 \in H_1 \cap H_2 \Longrightarrow g_1 * g_2 \in H_1 \cap H_2\,]$.

$H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

DEMONSTRAÇÃO DE A2.

Sejam $x : \mathbb{N}$, $a : \alpha$.

Indução ~~(a natural)~~ no x.

Base:

Calc: $a^0 = e$ $[(\uparrow_R).1]$

$= a^0 a$ $[(\uparrow_L).1]$

Passo Indutivo:

Calc: $a^{Sx+1} = a^{Sx} a$ $[(\uparrow_R).2]$

$= a(a^x a)$ $[Sx = 1+x$ Pela $\mathbb{N}$-com$]$

$= a(a^x a)$ $[H.I.]$

Calc: $a^{Sx+1} = a^{Sx} a$ $[(\uparrow_L).2]$ e $[Sx \equiv x+1]$

$= (a^x a)a$ $[*\text{-assoc}]$

$= a(a^x a)$

donde chegou?

estranha essa mistura

roubou

qual é rem.?

escreva teu alvo na forma $(\forall n)[\varphi(n)]$. Percebe o prob?

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

e escolha uma notação só (por exemplo 'S_-').

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DE B1.

Seja $h \in H_1 \cap H_2$.

Como H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$, logo $S.id \in H_1 \cap H_2$.(1) H_1 & $e \in H_2$.

Como $H_1 \leq \mathcal{G}$, logo $S.inv\ h \in H_1$.

Similarmente, ~~logo~~ $S.inv\ h \in H_2$.

Logo $S.inv\ h \in H_1 \cap H_2$.(2)

Logo $H_1 \cap H_2$ é $(S.\cancel{op}\ inv)$-fechado. [lemma.1]

Logo $H_1 \cap H_2$ é S-fechado.

Como $H_1 \subseteq |S|$ e $H_2 \subseteq |S|$, logo $H_1 \cap H_2 \subseteq |S|$.

use e, $^{-1}$, (justap)!

e a op binária?

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

lemma. 1 (A_1, A_2 subgrupos de $S^{(1)}$ => $A_1 \cap A_2$ é $(S.\sigma)$-fechado)

Suponha (1).

Sejam $a, a' \in A_1 \cap A_2$. Logo $a, a' \in A_1$ e $a, a' \in A_2$

Como A_1 é $(S.\sigma)$-fechado, logo $a *_S a' \in A_1$. ✓

Como A_2 é $(S.\sigma)$-fechado, logo $a *_S a' \in A_2$. ✓

Logo $a *_S a' \in A_1 \cap A_2$.

✓

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$. $a^{-1}c$

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e.
Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

Demonstração de A1 .

~~Demonstração~~

Sejam $a, c \in \mathcal{G}$.

existência:

Escolho $a^{-1}c$ como testemunha

Calculamos: $a(a^{-1}c) = (aa^{-1})c$ [(ass) $a\ a^{-1}\ c$]

$= e\,c$ [(inv-R) a]

$= c$ [(id-L) c]

unicidade:

Basta demonstrar $(\forall t)[\,at = c \Rightarrow t = a^{-1}c\,]$

Seja t t.q. $at = c$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ logo $a^{-1}(at) = a^{-1}c$

logo $(a^{-1}a)t = a^{-1}c$, pela [(ass) $a^{-1}\ a\ t$]

logo $e\,t = a^{-1}c$, pela [(inv-L) a]

logo $t = a^{-1}c$, pela [(id-L) t]

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

Demonstração de B2 .

$e_G \in \bigcap \mathcal{H}$

Preciso demonstrar $(\forall h \in \mathcal{H})[\,e_g \in h\,]$

Seja $h \in \mathcal{H}$, ou seja h subgrupo de $\mathcal{G}$

logo $e_g \in h$.

$(\forall a \in \bigcap \mathcal{H})[\,a^{-1} \in \bigcap \mathcal{H}\,]$

Seja $a \in \bigcap \mathcal{H}$, ou seja $(\forall h \in \mathcal{H})[\,a \in h\,]$ ①

Seja $h \in \mathcal{H}$, ou seja, h subgrupo de $\mathcal{G}$ ②

logo, pela ①, $a \in h$.

logo, pela ②, $a^{-1} \in h$.

$(\forall a, a^{-1} \in \bigcap \mathcal{H})[\,a \cdot a^{-1} \in \bigcap \mathcal{H}\,]$

Sejam $a, a^{-1} \in \bigcap \mathcal{H}$ ①

Seja $h \in \mathcal{H}$, ou seja, h subgrupo de $\mathcal{G}$ ②

pela ①, logo, $a, a^{-1} \in h$.

logo, pela ②, $a \cdot a^{-1} \in h$.

Perdão eu não sei fazer o $\mathcal{H}$ bonito :(

Só isso mesmo.

[3] Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é Set $\mathcal{G}$.

\def\H{{\mathscr H}} :)