FMC2, 2024.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova IEA.1
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2024-04-05

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(14) **A** *Escolha um dos* **A1**, **A2**.

(8) **A1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Demonstre: $(\forall a, c)\,(\exists! t)[\,at = c\,]$.

(14) **A2.** Seja $(*) : \alpha \times \alpha \to \alpha$ operação binária, associativa e com identidade e. Demonstre que $(\uparrow_{\mathrm{L}}) = (\uparrow_{\mathrm{R}})$, onde $(\uparrow_{\mathrm{L}}), (\uparrow_{\mathrm{R}}) : \alpha \times \mathbb{N} \to \alpha$ definidas recursivamente pelas:

$$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} 0 = e$$
$$a \uparrow_{\mathrm{L}} (n+1) = (a \uparrow_{\mathrm{L}} n) * a \qquad\qquad a \uparrow_{\mathrm{R}} (n+1) = a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} n).$$

Demonstração de (ambas) .

A1. Sejam $a, c \in G$. Existência: Calculamos:

$$\begin{aligned} a(a^{-1}c) &= (aa^{-1})c && \text{(ass.)} \\ &= ec && \text{(invL)} \\ &= c && \text{(idR)} \end{aligned}$$

Unicidade: Seja t tal que $at = c$.
Basta demonstrar que $t = a^{-1}c$. Calculamos:

$$\begin{aligned} a^{-1}c &= a^{-1}(at) && \text{(escolha de } x\text{)} \\ &= (a^{-1}a)t && \text{(ass)} \\ &= et && \text{(inv)} \\ &= t && \text{(id)} \end{aligned}$$

A2. Sejam $a : \alpha, n : \mathbb{N}$. Por indução no n.
Bases $n := 0, 1$: Temos

$a \uparrow_{\mathrm{L}} 0 = e = a \uparrow_{\mathrm{R}} 0$;
$a \uparrow_{\mathrm{L}} 1 = (a \uparrow_{\mathrm{L}} 0)a = ea = a = ae = a(a \uparrow_{\mathrm{R}} 0) = a \uparrow_{\mathrm{R}} 1$.

Passo indutivo: Seja $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \geq 2$ e:

$$\begin{aligned} a \uparrow_{\mathrm{L}} (k-1) &= a \uparrow_{\mathrm{R}} (k-1) && \text{(HI1)} \\ a \uparrow_{\mathrm{L}} (k-2) &= a \uparrow_{\mathrm{R}} (k-2). && \text{(HI2)} \end{aligned}$$

Precisamos demonstrar que $a \uparrow_{\mathrm{L}} k = a \uparrow_{\mathrm{R}} k$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} a \uparrow_{\mathrm{L}} k &= (a \uparrow_{\mathrm{L}} (k-1)) * a && ((\uparrow_{\mathrm{L}}).2) \\ &= (a \uparrow_{\mathrm{R}} (k-1)) * a && \text{(HI1)} \\ &= (a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} (k-2))) * a && ((\uparrow_{\mathrm{R}}).2) \\ &= a * ((a \uparrow_{\mathrm{R}} (k-2)) * a) && (\mathcal{G}.\text{ass}) \\ &= a * ((a \uparrow_{\mathrm{L}} (k-2)) * a) && \text{(HI2)} \\ &= a * (a \uparrow_{\mathrm{L}} (k-1)) && ((\uparrow_{\mathrm{L}}).2) \\ &= a * (a \uparrow_{\mathrm{R}} (k-1)) && \text{(HI1)} \\ &= a \uparrow_{\mathrm{R}} k && ((\uparrow_{\mathrm{R}}).2) \end{aligned}$$

(14) **B** *Escolha um dos* **B1**, **B2**.

(8) **B1.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $\mathcal{G}$. Demonstre: $H_1 \cap H_2 \leq \mathcal{G}$.

(14) **B2.** Seja $\mathcal{G}$ grupo. Seja $\mathscr{H}$ uma família de subgrupos de $\mathcal{G}$.[3] Demonstre: $\bigcap \mathscr{H} \leq \mathcal{G}$.

Demonstração de (ambas) .

B2. Parte $\bigcap \mathscr{H}$ é id-fechado:
e pertence a todos os membros da $\mathscr{H}$ (pois todos são subgrupos), logo $e \in \bigcap \mathscr{H}$.

Parte $\bigcap \mathscr{H}$ é op-fechado:
Sejam $a, b \in \bigcap \mathscr{H}$, ou seja a pertence a todos os membros de $\mathscr{H}$ e similarmente sobre o b.
Para mostrar $ab \in \bigcap \mathscr{H}$, basta mostrar que ab pertence a um arbitrário membro da $\mathscr{H}$.
Seja $H \in \mathscr{H}$. Pela escolha do a temos que $a \in H$, e similarmente $b \in H$.
Como $H \leq \mathcal{G}$, logo H é op-fechado, e logo $ab \in H$.
Logo $ab \in \mathscr{H}$.

Parte $\bigcap \mathscr{H}$ é inv-fechado:
Seja $a \in \bigcap \mathscr{H}$, ou seja a pertence a todos os membros de $\mathscr{H}$.
Para mostrar $a^{-1} \in \bigcap \mathscr{H}$, basta mostrar que a^{-1} pertence a um arbitrário membro da $\mathscr{H}$.
Seja $H \in \mathscr{H}$. Pela escolha do a temos que $a \in H$.
Como $H \leq \mathcal{G}$, logo é inv-fechado, e logo $g^{-1} \in H$.

B1. Caso especial do **B2** com $\mathscr{H} = \{H_1, H_2\}$. (Para demonstrar em forma direta, basta substituir o $\bigcap \mathscr{H}$ por $H_1 \cap H_2$ e frases como «(todos) os membros da $\mathscr{H}$» por «H_1, H_2».)

Só isso mesmo.

[3]Considere que o tipo dos membros de $\mathscr{H}$ é $\mathsf{Set}\ \mathcal{G}$.

Lemmata