FMC2, 2024.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova CFR1.1
(points: 38; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2024-04-05

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(12) **A**

(4) **A1.** Defina a interseção de uma $\mathcal{I}$-família de conjuntos.
DEFINIÇÃO.

Seja $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma $\mathcal{I}$-família de conjuntos. Sua interseção $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ é o conjunto de todos os x que pertencem a todos os integrantes da família; em símbolos:

$$x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \overset{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \mathcal{I})\,[\,x \in A_i\,].$$

(8) **A2.** Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto, A um conjunto, e $(B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma $\mathcal{I}$-família de conjuntos.
Demonstre: $A \cap \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}}(A \cap B_i)$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $t \in A \cap \bigcup_i B_i$.
Logo $t \in A$ e $t \in \bigcup_i B_i$.
Logo seja k tal que $t \in B_k$.
Como $t \in A$ e $t \in B_k$, logo $t \in A \cap B_k$.
Logo $t \in \bigcup_i (A \cap B_i)$.

(8) **B** *Escolha **uma** das* **B1**, **B2**

(6) **B1.** Defina o produto binário de tipos.
(8) **B2.** Defina a soma binária de tipos.
DEFINIÇÃO.

B1.
$(\times)$-F:

$$\frac{\alpha : \mathsf{Type} \qquad \beta : \mathsf{Type}}{\alpha \times \beta : \mathsf{Type}}$$

$(\times)$-E:

$$\frac{w : \alpha \times \beta}{w\,.\,\mathsf{l} : \alpha} \qquad \frac{w : \alpha \times \beta}{w\,.\,\mathsf{r} : \beta}$$

$(\times)$-I:

$$\frac{a : \alpha \qquad b : \beta}{\langle a, b\rangle : \alpha \times \beta}$$

$(\times)$-β:

$$\langle a, b\rangle\,.\,\mathsf{l} = a \qquad \langle a, b\rangle\,.\,\mathsf{r} = b$$

$(\times)$-η:

$$\langle w\,.\,\mathsf{l}, w\,.\,\mathsf{r}\rangle = w.$$

B2.
$(+)$-F:

$$\frac{\alpha : \mathsf{Type} \qquad \beta : \mathsf{Type}}{\alpha + \beta : \mathsf{Type}}$$

$(+)$-I:

$$\frac{a : \alpha}{\mathsf{l}\,.\,w : \alpha + \beta} \qquad \frac{b : \beta}{\mathsf{r}\,.\,w : \alpha + \beta}$$

$(+)$-E:

$$\frac{w : \alpha + \beta \qquad f : \alpha \to \gamma \qquad g : \beta \to \gamma}{\mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,y \mapsto g\ y \end{Bmatrix} : \gamma}$$

$(+)$-β:

$$\mathtt{case}\ \mathsf{l}\,.\,a\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} = f\ a$$

$$\mathtt{case}\ \mathsf{r}\,.\,b\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} = g\ b.$$

$(+)$-η

$$\mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto \mathsf{l}\,.\,x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto \mathsf{r}\,.\,x \end{Bmatrix} = w$$

(18) # C

(6) **C1.** Defina funções F, G que estabelecem: $\delta^{\alpha+\beta} \cong \delta^\alpha \delta^\beta$

RESOLUÇÃO.

$$F : (\alpha+\beta \to \delta) \to (\alpha \to \delta) \times (\beta \to \delta)$$
$$F\ h \quad = \langle \lambda\, a\,.\, h\ (\mathsf{l}\,.\,a), \lambda\, b\,.\, h\ (\mathsf{r}\,.\,b) \rangle$$

$$G : (\alpha \to \delta) \times (\beta \to \delta) \to (\alpha+\beta \to \delta)$$
$$G\ \langle f, g \rangle \quad = \lambda\, w\,.\, \mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix}$$

(6) **C2.** Defina funções F, G que estabelecem: $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}+1$.

RESOLUÇÃO.

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}+1 & &G : \mathbb{N}+1 \to \mathbb{N} \\ &F\ \mathsf{O} \quad = \mathsf{r}\,.\,\star & &G\ (\mathsf{l}\,.\,n) \quad = \mathsf{S}\ n \\ &F\ (\mathsf{S}\ n) \quad = \mathsf{l}\,.\,n & &G\ (\mathsf{r}\,.\,\_) \quad = \mathsf{O} \end{aligned}$$

(6) **C3. Escolha uma** das tuas respostas dos **C1**, **C2** e demonstre o que precisa ser demonstrado para estabelecer o isomorfismo desejado.

DEMONSTRAÇÃO DA (AMBAS) .

C1.

$$\begin{aligned}
&(F \circ G)\ \langle f, g \rangle \\
&= F\ (G\ \langle f, g \rangle) && ((\circ).1) \\
&= F \left(\lambda\, w\,.\, \mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} \right) && (G.1) \\
&= \Big\langle \lambda\, a\,.\, \left(\lambda\, w\,.\, \mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} \right) (\mathsf{l}\,.\,a) \\
&\quad , \lambda\, b\,.\, \left(\lambda\, w\,.\, \mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} \right) (\mathsf{r}\,.\,b) \Big\rangle && (F.1) \\
&= \Big\langle \lambda\, a\,.\, \mathtt{case}\ \mathsf{l}\,.\,a\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} \\
&\quad , \lambda\, b\,.\, \mathtt{case}\ \mathsf{r}\,.\,b\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto f\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto g\ x \end{Bmatrix} \Big\rangle && ((\to)\text{-}\beta) \\
&= \langle \lambda\, a\,.\, f\ a, \lambda\, b\,.\, g\ b \rangle && ((+)\text{-}\beta) \\
&= \langle f, g \rangle && ((\to)\text{-}\eta)
\end{aligned}$$

Para demonstrar $(G \circ F)\ h = h$ seguimos a definição desta $(=)$ e logo precisamos mostrar:

$$(\forall w : \alpha+\beta)\,[\,((G \circ F)\ h)\ w = h\ w\,]$$

Seja $w : \alpha + \beta$.
Separamos em casos a partir da construção de w:

$$\begin{aligned}
&((G \circ F)\ h)\ (\mathsf{l}\,.\,u) \\
&= (G\ (F\ h))\ (\mathsf{l}\,.\,u) && ((\circ).1) \\
&= (G\ \langle \lambda\, a\,.\, h\ (\mathsf{l}\,.\,a), \lambda\, b\,.\, h\ (\mathsf{r}\,.\,b) \rangle)\ (\mathsf{l}\,.\,u) && (F.1) \\
&= \left(\lambda\, w\,.\, \mathtt{case}\ w\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto (\lambda\, a\,.\, h\ (\mathsf{l}\,.\,a))\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto (\lambda\, b\,.\, h\ (\mathsf{r}\,.\,b))\ x \end{Bmatrix} \right) (\mathsf{l}\,.\,u) && (G.1) \\
&= \mathtt{case}\ \mathsf{l}\,.\,u\ \mathtt{of}\ \begin{Bmatrix} \mathsf{l}\,.\,x \mapsto (\lambda\, a\,.\, h\ (\mathsf{l}\,.\,a))\ x \\ \mathsf{r}\,.\,x \mapsto (\lambda\, b\,.\, h\ (\mathsf{r}\,.\,b))\ x \end{Bmatrix} && ((\to)\text{-}\beta)) \\
&= (\lambda\, a\,.\, h\ (\mathsf{l}\,.\,a))\ u && ((+)\text{-}\beta) \\
&= h\ (\mathsf{l}\,.\,u) && ((\to)\text{-}\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((G \circ F)\ h)\ (\mathsf{r}\,.\,v) \\
&\overset{\cdots}{=} h\ (\mathsf{r}\,.\,v) \qquad \text{(Similar.)}
\end{aligned}$$

C2.
Primeiramente demonstramos

$$(\forall w : \mathbb{N}+1)\,[\,(F \circ G)\ w = w\,]\,.$$

Seja $w : \mathbb{N}+1$. Separamos em casos a partir da construção de w:

$$\begin{aligned}
&(F \circ G)\ (\mathsf{l}\,.\,n) \\
&= F\ (G\ (\mathsf{l}\,.\,n)) && ((\circ).1) \\
&= F\ (\mathsf{S}\ n) && (G.1) \\
&= \mathsf{l}\,.\,n && (F.2) \\
&(F \circ G)\ (\mathsf{r}\,.\,\star) \\
&= F\ (G\ (\mathsf{r}\,.\,\star)) && ((\circ).1) \\
&= F\ \mathsf{O} && (G.2) \\
&= \mathsf{r}\,.\,\star && (F.1)
\end{aligned}$$

Agora falta demonstrar

$$(\forall n : \mathbb{N})\,[\,(G \circ F)\ n = n\,]\,.$$

Seja $n : \mathbb{N}$. Separamos em casos a partir da construção de n:

$$\begin{aligned}
&(G \circ F)\ \mathsf{O} \\
&= G\ (F\ \mathsf{O}) && ((\circ).1) \\
&= G\ (\mathsf{r}\,.\,\star) && (F.1) \\
&= \mathsf{O} && (G.2) \\
&(G \circ F)\ (\mathsf{S}\ k) \\
&= G\ (F\ (\mathsf{S}\ k)) && ((\circ).1) \\
&= G\ (\mathsf{l}\,.\,k) && (F.2) \\
&= \mathsf{S}\ k && (G.1)
\end{aligned}$$

Só isso mesmo.