(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L2 .

$\ominus$ $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq \underbrace{a \wedge (x \vee y)}_{d}$

Basta que $(a \wedge x) \leq d$ & $(a \wedge y) \leq d$.

$(a \wedge x \leq a \wedge (x \vee y))$:

Basta que $a \wedge x \leq a$ & $a \wedge x \leq x \vee y$.

$[(a \wedge x \leq a) \Leftrightarrow (a \wedge x) \vee a = a]$:

Imediato pela absorção.

$[a \wedge x \leq x \vee y) \Leftrightarrow (a \wedge x) \wedge (x \vee y) = a \wedge x]$:

Calculamos:

$(a \wedge x) \wedge (x \vee y) = a \wedge (x \wedge (x \vee y)$ [($\wedge$)-Assoc]

$= a \wedge x$ [Absorção]

$(a \wedge y \leq a \wedge (x \vee y))$:

Similar. ∎

(24) **C** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **C1,C2,C3,C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO C2 .

tendo a operação (×), Construimos os inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ n \mid n', m \in \mathbb{N} \ \& \ n = n' - m \} \quad [ZF4]$$

do nada não temos

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$.
RESPOSTA.

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ...a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L1 .

Sejam a, b, u tais que $a \leq b$. ✓
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
a \vee (u \wedge b) &= (u \wedge b) \vee a && (\text{com.}) \\
&= u \wedge (b \vee a) && (\text{ass.}) \\
&= u \wedge b && (a \leq b)
\end{aligned}
$$

✗ não é!

$$
\begin{aligned}
(a \vee u) \wedge b &= b \wedge (a \vee u) && (\text{com.}) \\
&= (b \wedge a) \vee u && (\text{ass.}) \\
&= a \vee u && (a \leq b)
\end{aligned}
$$

deveria usar "similar"

Logo, temos $u \wedge b \leq a \vee u$, ou seja $(u \wedge b) \wedge (a \vee u) = u \wedge b$.

(24) **C** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **C1,C2,C3,C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO _____ .

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.
RESPOSTA.

Seja ~~$\Phi(x)$~~ ~~uma~~ a classe-função ~~tal que~~ $\Phi(x) \overset{def}{=}$ cl. $\emptyset$ caso $\varphi(x)$, $\{x\}$ caso $\neg\varphi(x)$. (ZF6)
Logo, seja S o conjunto tal que $S = \{\Phi(x) \mid x \in A\}$.
Em seguida, pegue a union set de S. (ZF6)
Fim.

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ...a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L2 .

Sejam $a, x, y \in L$.
Basta que $(a \wedge x) \vee ((y \wedge a) \wedge (a \wedge (x \vee y))) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$ [$\wedge$-ass, $\wedge$-com]
Logo, basta que $(a \wedge x) \vee (y \wedge (a \wedge a) \wedge (x \vee y)) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$ [$\wedge$-ass]
Logo, basta que $(a \wedge x) \vee (a \wedge (y \wedge (x \vee y))) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$ [$\wedge$-ass, $\wedge$-com, $\wedge$-idem]
Logo, basta que $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$ [idem]
Pela reflexividade da $(=)$, imediato.
Qed.

Nem a pau

não faz sentido juntar tanta coisa num passo só, ainda mais tendo uma expressão tão longa!!

(24) **C**

Escolha exatamente ***um*** *dos* **C1**,**C2**,**C3**,**C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO ____ .

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.
RESPOSTA.

Seja Φ o predicado definido por $\Phi(x) = \begin{cases} x, & \text{caso } \varphi(x). \\ \emptyset, & \text{c.c.} \end{cases}$
Temos que Φ define uma class-function. (1)
Logo, $\bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ é o conjunto que queríamos.

Se $\varphi(\emptyset)$ temos prob!

(1) Seja u conjunto.
Caso $\varphi(u)$: uso u como testemunha
Caso contrário: uso $\emptyset$ como testemunha
Unicidade: imediata

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ...a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L3 .

Sejam a, c, c' tq c & c' são complementos de a.
Basta mostrar que $c = c'$, ou seja, $c \leq c'$ & $c' \leq c$.

Parte $c \leq c'$:

$c = c \wedge \top$ [Def $\top$]
$= c \wedge (a \vee c')$ [c' complemento]
$= (c \wedge a) \vee (c \wedge c')$ [Dist]
$= \bot \vee (c \wedge c')$ [c comp]
$= c \wedge c'$

Parte $c' \leq c$:

$c = c \vee \bot$
$= c \vee (a \wedge c')$
$= (c \vee a) \wedge (c \vee c')$
$= \top \wedge (c \vee c')$
$= c \vee c'$

Similar!

(24) **C**

Escolha exatamente **um** *dos* **C1**,**C2**,**C3**,**C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO C2.

Podemos representar os números inteiros como tuplas de números naturais.

Um inteiro z pode ser representado como:
Sejam $x, y, a, b \in \mathbb{N}$.

$$[z]_{\approx} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \approx \langle a, b\rangle\}$$

A relação de equivalência $\approx$ pode ser definida como: $\langle x, y\rangle \approx \langle a, b\rangle \overset{def}{\Leftrightarrow} x + b = a + y$

Dessa forma, definimos o conjunto dos inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{[z]_{\approx} \mid z \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.

RESPOSTA.

Definimos Φ como:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{se } x \text{ respeita } \varphi \\ \emptyset & \text{c.c} \end{cases}$$

Depois utiliza-se o ZF6

como assim? O texto ficou incompleto!

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L3 .

O. $(\forall a, b, c \in L)$ [b, c são complementos de a $\Rightarrow$ $b = c$].
Dem.
Sejam $a, b, c \in L$ t.q. b, c são complementos de a.
Logo $a \wedge b = a \wedge c = \bot$ e $a \vee b = a \vee c = \top$. (I)
Calculemos:

$b = b \wedge (b \vee a)$ [abs].
$= (b \wedge b) \vee (b \wedge a)$ [dist].
$= b \vee (b \wedge a)$ [idem].
$= b \vee (c \wedge a)$ [pelo (I)].
$= (b \vee c) \wedge (b \vee a)$ [dist].
$= (b \vee c) \wedge \top$ [pelo (I)].
$= (b \vee c)$ [$\top$].

$c = c \wedge (c \vee a)$ [abs]
$= (c \wedge c) \vee (c \wedge a)$ [dist]
$= c \vee (c \wedge a)$ [idem].
$= c \vee (b \wedge a)$ [pelo (I)].
$= (c \vee b) \wedge (c \vee a)$ [dist]
$= (c \vee b) \wedge \top$ [pelo (I)].
$= (c \vee b)$ [$\top$].
$= (b \vee c)$. [com].

Similar!!

Como $b = (b \vee c)$ e $c = (b \vee c)$, logo $b = c$.

(24) **C** *Escolha exatamente* **um** *dos* **C1,C2,C3,C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO C1 .

~~Definimos~~ o especificação dos naturais pelo sistema peano, logo:

$\mathcal{N} = (N; S, 0)$.

$S : N \times N \to N$

$0 : N$

quem é??

Além disso, é necessário demonstrar os seguintes:

S injetiva, ou seja $(\forall a, b \in N)[Sa = Sb \Rightarrow a = b]$.

$(\forall a \in A)[0 \notin S[a]]$ ou o zero não é sucessor de ninguém.

O teorema da indução.

$(\forall X \subseteq N)[0 \in X \text{ e } (\forall n)[n \in X \Rightarrow Sn \in X] \Rightarrow X = N]$.

~~Tendo a especificação~~, definimos os naturais, na teoria ZF, para ser:

$I_* = \bigcap \{ L \subseteq I \mid \emptyset \in L \text{ e } (\forall x)[x \in L \to x \cup \{x\} \in L] \}$.

Em que, I é o conjunto infinito, garantido pelo axioma ZF7. A ideia geral do I_* é pegar todos os subconjuntos de I e intersecta-los para retirar membros inúteis (vazios).

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$.

RESPOSTA.

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ...a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L2 .

Sejam $a, x, y \in L$.
Basta demonstrar $a \wedge x \leq a \wedge (x \vee y)$
& $a \wedge y \leq a \wedge (x \vee y)$. ✓
Parte $a \wedge y \leq a \wedge (x \vee y)$:
Basta demonstrar $a \wedge y \leq a$
& $a \wedge y \leq x \vee y$. ✓
Parte $a \wedge y \leq a$:
Calculamos:
$(a \wedge y) \wedge a = (y \wedge a) \wedge a$ [$\wedge$-comm]
$= y \wedge (a \wedge a)$ [$\wedge$-assoc]
$= y \wedge a$ [$\wedge$-Idem].
desnecessário
✓

Parte $a \wedge y \leq x \vee y$:
Calculamos:
$(a \wedge y) \wedge (x \vee y) = (a \wedge y) \wedge (y \vee x)$ [$\vee$-com]
$= a \wedge (y) \wedge (y \vee x)$ [$\wedge$-Ass]
$= a \wedge y$ [Abs].
✓
Parte $a \wedge x \leq a \wedge (x \vee y)$:
Similar.
✓

(24) **C**

Escolha exatamente ***um*** *dos* **C1,C2,C3,C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO C2 .

Chamaremos os inteiros de Z. Seus membros serão 2-tuplas de naturais. ~
Ou seja tendo $n, m \in N$ A $(n,m) \in Z$.
Com x, y, n e $m \in N$ iremos definir todo o resto. Primeiramente a igualdade. ? ?

rel. de equiv? quociente?

$(x,y) = (n,m) \overset{def}{\Leftrightarrow} x + m = n + y$. ✓

Como os Z são um Ring comutativo precisamos definir todas as operações que fazem parte da sua estrutura.

$0 \overset{def}{=} (0,0)$, $1 \overset{def}{=} (1,0)$, $-(x,y) \overset{def}{=} (y,x)$, $(x,y)+(n,m) \overset{def}{=} (x+n, y+m)$,

$(x,y)\cdot(n,m) \overset{def}{=} (xn, ym)$. $(x-y)(n-m) = xn - yn$?

Obviamente é preciso demonstrar que os Axiomas valem e depois os teoremas.

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.
RESPOSTA.

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ...a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L2 .

Basta $a \wedge (x \vee y) \geq a \wedge x$ & $a \wedge (x \vee y) \geq a \wedge y$

Basta $(a \wedge x) \leq a$ & $(a \wedge x) \leq (x \vee y)$

$(a \wedge x) \vee a = a$ [Abs]

$(a \wedge x) \wedge (x \vee y)$
$= a \wedge (x \wedge (x \vee y))$ [Assoc]
$= a \wedge x$ [Abs]

~~Basta $(a \wedge y) \leq a$ & $(a \wedge y) \leq (x \vee y)$~~

~~$(a \wedge y) \vee a$~~
~~$= a$ [Abs.]~~

~~$(a \wedge y) \vee (x \vee y) =$~~
~~$= (a \wedge y) \vee y \vee x$ [Assoc]~~
~~$= (a \wedge y) \vee (y \vee x)$ [Com.]~~
~~$= ((a \wedge y) \vee y) \vee x$ [Assoc]~~
~~$= y \vee x$ [Abs]~~
~~$= x \vee y$ [Com.]~~

similar.

(como arrumar a (com)?.)

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $b \in B$ e $D = \{0, 1\}$.
Sejam $g, h : B \to D$ definidas pelas:

$g(x) = 0$ $\qquad h(x) = \begin{cases} 1, & x = b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Como g e h discordam no B, logo $g \neq h$.
Logo, $g \circ f \neq h \circ f$ [f épica].
Logo, seja $a \in A$ tq. $(g \circ f)a \neq (h \circ f)a$.
Logo, $g(fa) \neq h(fa)$.
Como g e h discordam apenas no b, logo $fa = b$.
Logo, a serve.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L3 .

Sejam $a \in L$ e c, c' complementos de a.
Vou demonstrar que $c = c'$.
Calculamos:

$c = c \vee \bot$ $\qquad [c \geq \bot]$
$= c \vee (a \wedge c')$ [c' complemento]
$= (c \wedge a) \vee (c \wedge c')$ [dist]
$= \bot \vee (c \wedge c')$ [c comp.]
$= (c \wedge c')$ $\qquad [(c \wedge c') \geq \bot]$

Como $c = (c \wedge c')$, logo, pela (idem), $c = c'$.

$c \leq c'$. E $c' \leq c$ similar!

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L2 .

Do nada??

Parte $a \wedge (x \vee y) \geq (a \wedge x)$:
Parte $(a \wedge x) \leq a$:
$(a \wedge x) \vee a = a$ [abs]

Parte $(a \wedge x) \leq (x \vee y)$:
Calculamos:
$(a \wedge x) \vee (x \vee y) = (((a \wedge x) \vee x) \vee y)$ [Assoc($\wedge$)]
$= (x \vee y)$ [abs]

Parte $a \wedge (x \vee y) \geq (a \wedge y)$:
Similar.

(24) **C** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **C1,C2,C3,C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO _____ .

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.
RESPOSTA.

$$\Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \{x\}, & \text{caso } \{x\} \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Logo, temos $\{\Phi(x) \mid x \in A\}$.
Logo, $\bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$.

type error

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L3 .

Sejam $a, x, y \in L$ t.q. x e y são complementos de a.
Logo:
$x = x \wedge (a \vee x)$ [abs]
$= x \wedge \top$ [x complemento de a]
$= x \wedge (a \vee y)$ [y complemento de a]
$= (x \wedge a) \vee (x \wedge y)$ [L dist]
$= \bot \vee (x \wedge y)$ [x complemento de a]
$= x \wedge y$
Logo $x \leq y$.
Similarmente, $y \leq x$.
Logo $x = y$. [antisim]

(24) **C** *Escolha exatamente* **um** *dos* **C1**,**C2**,**C3**,**C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO ~~C1~~ .

~~Precisamos demonstrar que os naturais existem, isto, encontrar ~~a estrutura~~ um modelo para $P=(N;0,S)$ t.q $0 \notin S[N]$, $S: N \to N$, $0: N$ e ~~Ut~~ $(\forall C \subseteq N)[0 \in C \ \& \ C$ é S-cl $\Downarrow$ $C = N]$~~

~~Pelo Infinity solicite I.~~
~~Considere $\mathcal{S} = \{X \in PI \mid \emptyset \in X$ e X é $(+)$-cl$\}$.~~
~~Tome $N := \bigcap \mathcal{S}$, $S := \{\langle x, x^+\rangle \in N \times N \mid x \in N\}$, $0 := \emptyset$.~~

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.

RESPOSTA.

Seja Φ class function def pela $\Phi(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{caso } \varphi(x) \\ \emptyset, & \text{c.c.} \end{cases}$

Temos $\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ conjunto. [Replacement]

~~Tomando~~ $\bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$. use o union!

Seja $x \in A$ t.q $\varphi(x)$.

Temos $\Phi(x) = \{x\}$.

Como $\{x\} \in \{\Phi(x) \mid x \in A\}$ e $x \in \{x\}$, logo $x \in \bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$.

.. E se $\neg\varphi(x)$?

Só isso mesmo.

(21) **E**

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **L** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DO L3 .

Sejam a, u, v t.q. u e v são complementos do a.

Calculamos:

$u = u \wedge \top$ [$\top$ (n)-Id]
$= u \wedge (a \vee v)$ [v complemento a]
$= (u \wedge a) \vee (u \wedge v)$ [dist]
$= \bot \vee (u \wedge v)$ [u comp do a]
$= u \wedge v$ [$\bot$ (v)-Id]

Como $u = u \wedge v$ então $u \leq v$

Similarmente temos $v = u \wedge v$ e

Portanto $v \leq u$.

Logo $u = v$. [$\leq$ - Anti-Symm].

(24) **C** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **C1,C2,C3,C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números...

(21) **C1.** ...naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** ...inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** ...racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** ...reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO _____ .

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$.
RESPOSTA.

Defina a class-function Φ da seguinte maneira:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{caso } \varphi(x) \rightarrow \text{SINGLETON} \\ \emptyset & \text{c.c} \rightarrow \text{ZF2} \end{cases}$$

Logo, a partir do ZF8 temos que $\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ é conjunto.
A partir do ZF6 temos que $\bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ é conjunto. Temos que $\bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ serve como $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$. (LEMMATA)

Só isso mesmo.

Unicidade do vazio

Sejam X, Y t.q. X, Y vazios. Vou demonstrar $X = Y$

$\Rightarrow$ Seja $c \in X$. Contradição | $\Leftarrow$ Seja $c \in Y$. Contradição

Singleton

Seja a conjunto, Pela ZF3 temos $\{a, a\}$ conjunto. Pelo ZF1 temos $\{a, a\} = \{a\}$, ou seja, $x \in \{a, a\} \Leftrightarrow x = a$.

$(\forall a)\ [a \in \bigcup\{\Phi(x) \mid x \in A\} \Longleftrightarrow a \in A \ \& \ \varphi(a)]$

Seja a conjunto

$(\Rightarrow)$

Logo seja $c \in \{\Phi x \mid x \in A\}$ t.q. $a \in c$.

Logo $c \neq \emptyset$. Logo $c = \{a\}$ pela def. de Φ. Logo $a \in A$ e $\varphi(a)$. Pela def. de Φ.

$(\Leftarrow)$

Temos $\Phi a \in \{\Phi x \mid x \in A\}$

Como φa Logo $\Phi a = \{a\}$

Como $a \in \{a\} \in \{\Phi x \mid x \in A\}$ então $a \in \bigcup\{\Phi x \mid x \in A\}$.

$\square$