
Nome:

2023-07-19

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- IX. **Escolha exatamente dois problemas (letras) para resolver.**³

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \quad (\text{ZF1})$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \quad (\text{ZF2})$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \quad (\text{ZF3})$$

Separation (schema).

Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \quad (\text{ZF4})$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \quad (\text{ZF5})$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a)) \quad (\text{ZF6})$$

Infinity.

$$\exists i (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \quad (\text{ZF7})$$

Replacement (schema).

Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a , a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \quad (\text{ZF8})$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset) (\exists d \in a) [d \cap a = \emptyset] \quad (\text{ZF9})$$

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

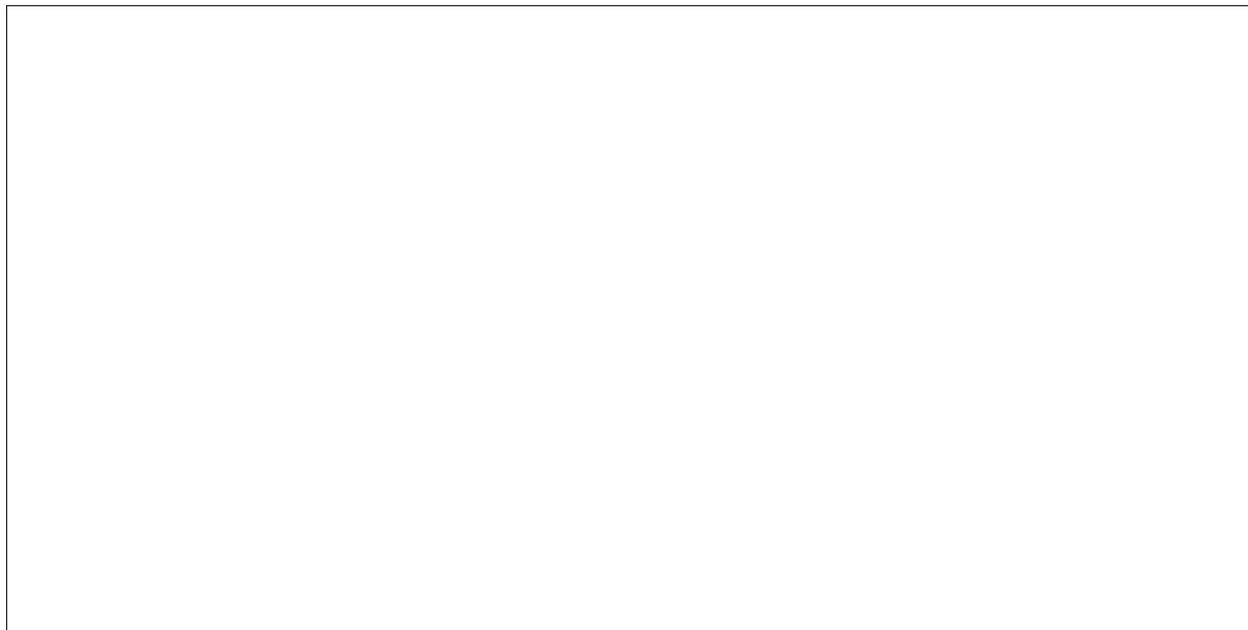
²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) **E**

Seja $f : A \rightarrow B$. Demonstre: f épica $\implies f$ sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO.



(24) **L**

Escolha exatamente um dos L1,L2,L3

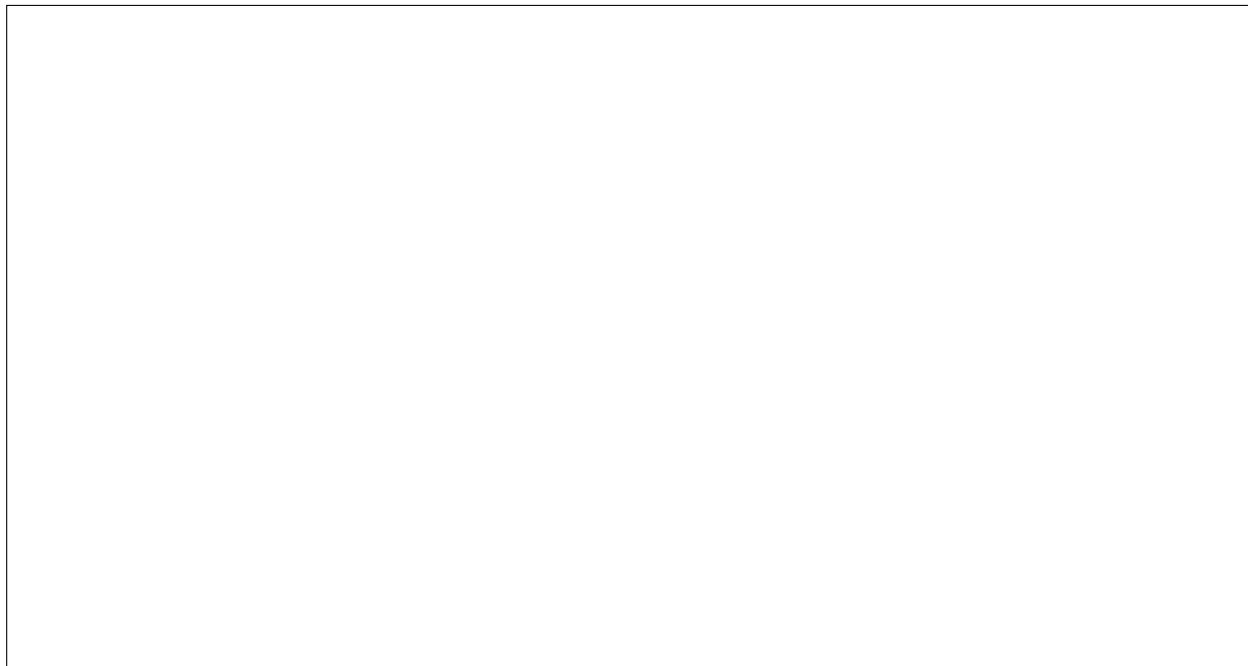
Seja L reticulado. Demonstre ...

L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$

L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$

L3. ... a unicidade de complementos de membros de L , supondo que L é distributivo.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .



(24) **C**

Escolha exatamente um dos C1,C2,C3,C4

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.

Construa os números. . .

(21) **C1.** . . . naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.

(16) **C2.** . . . inteiros, tendo os naturais.

(16) **C3.** . . . racionais, tendo os inteiros.

(24) **C4.** . . . reais, tendo os racionais.

ESBOÇO DETALHADO DA CONSTRUÇÃO _____ .

(34) **R**

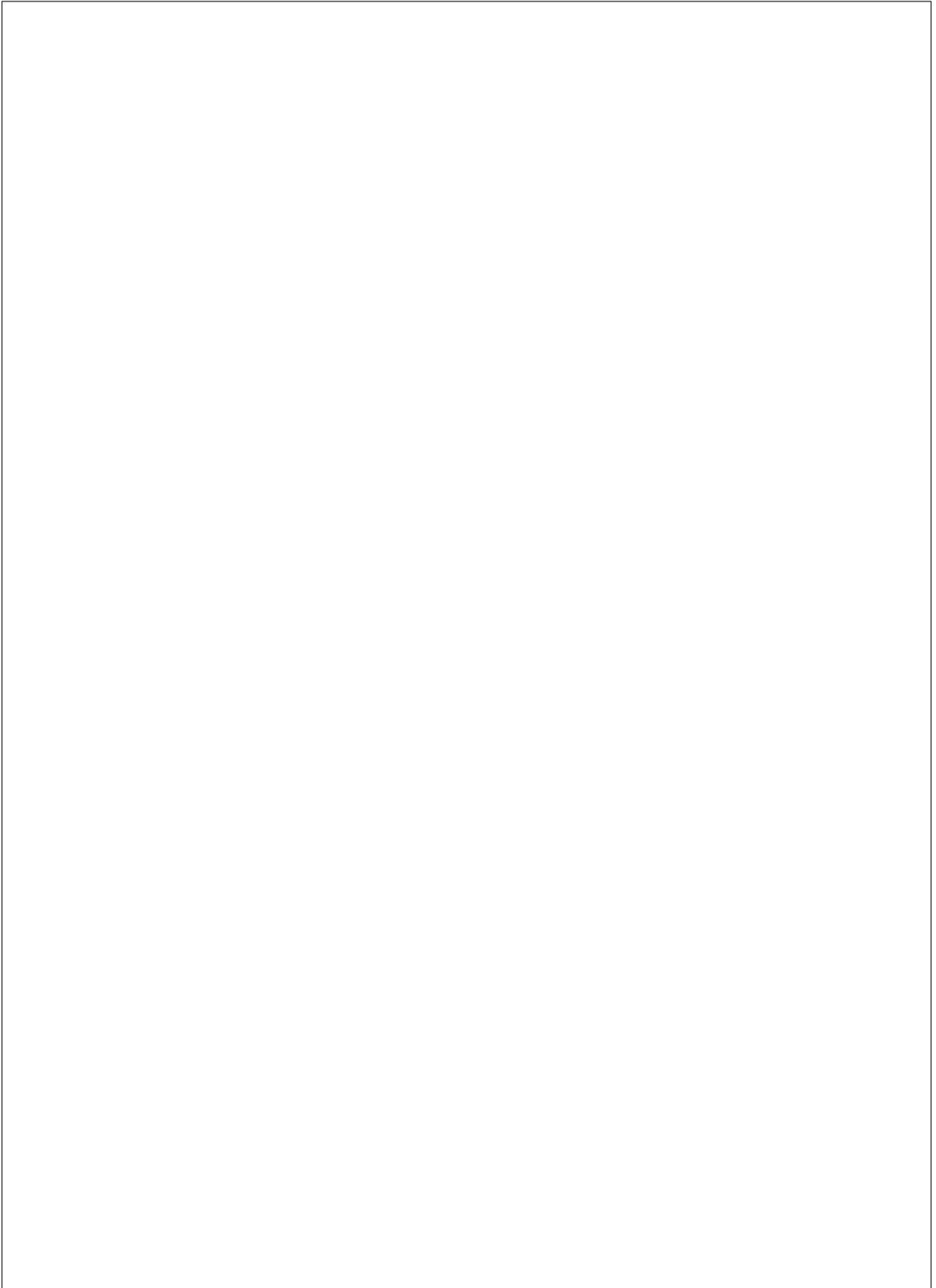
Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.

Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$.

RESPOSTA.

Só isso mesmo.

LEMMATA



RASCUNHO