(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square \times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$(\cancel{\forall n \in \mathbb{N}})[\cancel{succ}(n^2+2n)+1 = (\underset{n+1}{\cancel{succ\, n}})^2]$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam A, B, D conjuntos.
Sejam $f : A \to B$
$(\Rightarrow)$
Sejam $g, h : D \to A$ t.q. $f \circ g = f \circ h$. ✓
Seja $d \in D$. ✓
Pela escolha de h, g, temos $(f \circ g)\, d = (f \circ h)\, d$. ✓
Logo, temos $f(g\,d) = f(h\,d)$. ✓
Logo, como f é injetora, temos $g\,d = h\,d$. ✓

$(\Leftarrow)$
Sejam $x, y \in A$ t.q. $fx = fy$ ✓
Como $x = id_A x$ & $y = id_A y$, logo $f(id_A x) = f(id_A y)$. ✓
Logo, $(f \circ id_A)\, x = (f \circ id_A)\, y$. ✓ Observe que isso poderia obter de substituindo f por $f \circ id_A$.
Como f é L-cancelável, logo $id_A x = id_A y$. X
aqui confundiu.
Para quais f, g, h tu tá tentando aplicar o dado f L-cancelável?
Logo, $x = y$.
Q.E.D.

$\{x \mid A \in \mathcal{A}, x \in P_A\}$

(34) D

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A \in \mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(Par-1)
Suponha que $\emptyset \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$.
Logo, seja $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\emptyset \in P_A$
Como P_A é partição de A, logo $\emptyset \notin P_A$
contradição
(Par-2)
Sejam $n, p \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$
Sejam $A_n, A_p \in \mathcal{A}$ t.q. $n \in P_{A_n}$ e $p \in P_{A_p}$
Seja $k \in n \cap p$

Como $k \in n$, logo $k \in \bigcup P_{A_n}$ (1)
Logo, como P_{A_n} é partição de A_n, temos
$\bigcup P_{A_n} = A_n$.
Logo, $k \in A_n$.
Analogamente, temos $k \in A_p$.
Logo, $k \in A_n \cap A_p$
Como A_n, A_p são partes de $\mathcal{X}$, eles são disjuntos
contradição.
(PAR-3)

$(\subseteq)$:
Seja $x \in \bigcup(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A)$
Seja $a \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ t.q. $x \in a$
Seja $A \in \mathcal{A}$ t.q. $a \in P_A$
temos $A \subseteq X$, logo $\bigcup P_A \subseteq X$

(18) E

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies$ $g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies$ $g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies$ f injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies$ g injetiva.

temos $a \in$

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ____ .

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square \times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$(x+1)^2 = (x^2+2x)+1$

(alguém viu essas parenteses nessa identidade no E.M./F.?)

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$):

Suponha f injetora.

Sejam D : Set e $g, h : D \to A$ tq $f \circ g = f \circ h$ ✓

Seja $d \in D$. ✓

Como $\boxed{f(g\,d) = f(h\,d)}$, logo $g\,d = h\,d$. [f injetora] ✓

↳ essa igualdade não está nos teus dados.

C

($\Leftarrow$):

Suponha f L-cancelável

Sejam $a, a' \in A$ tq $f\,a = f\,a'$.

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

$\boxed{\text{Demonstração}}$/Refutação.

esses nomes facilitam confundir que $A, B \in \mathcal{A}$.

$(\emptyset \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A)$:
Suponha que $\emptyset \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$.
por que (')?
Logo, seja $A' \in \mathcal{A}$ t.q $\emptyset \in P_{A'}$.
Contradição. [$P_{A'}$ partição de A']

$(\bigcup(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A) = X)$:
$(\subseteq)$:
Seja $p \in \bigcup(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A)$. ✓
mas tu não tens $p \in \bigcup_A P_A$.
Seja $A' \in \mathcal{A}$ t.q $p \in P_{A'}$. ✗
Logo $p \subseteq A$. Logo $p \in X$. [$A \subseteq X$]
type error? conjunto?
[$\subseteq$ transitividade]

$(\supseteq)$:
Similar.

$(\forall A, B \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A)\,[A \cap B \text{ hab} \Rightarrow A = B]$.
Sejam $\boxed{A, B} \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ t.q $A\cap B$ hab. ✓
Sejam $A', B' \in \mathcal{A}$ t.q $A \in P_{A'}$ e $B \in P_{B'}$. ✓
Seja $c \in A \cap B$. [$A\cap B$ hab] ✓ ...
$(\subseteq)$:
Seja $a \in A$.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

Demonstração/Refutação da ____ .

Demonstração/Refutação da ____ .

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square\times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"'] \end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

X

$Id = square \circ succ$?! ... $\sqrt{(n+1)}$??

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

(=>):
sejam $x, y \in A$. → Qual teu alvo e o que é esta linha, exatamente?
sejam $g, h : \boxed{B} \to A$. Por que B?
suponha $f \circ g = f \circ h$. pulou o $(f\circ g)x = (f \circ h)x$.
Logo $f(g(x)) = f(h(x))$.
Logo $g(x) = h(x)$ [por f injetora]
Logo $g = h$.

type error: $x \in A$
$g, h : B \to A$.

(<=):
sejam $x, y \in A$. ✓
suponha $f(x) = f(y)$. ✓
sejam $g, h : B \to A$.
Logo $f \circ g = f \circ h$. [$g, h = f^{-1}$] donde chegou esse dado?
f é invertível por quê?
Logo $g = h$.
~~Calculamos~~,

não é um cálculo

$f(x) = f(y)$

$g(f(x)) = h(f(y))$ [$\underset{?}{f\circ g} = \underset{?}{f \circ h}$] & $f(x) = f(y)$]??

$g \circ f(x) = h \circ f(y)$

$Id_A(x) = Id_A(y)$ [~~g=h~~ $f^{-1} \circ f = Id_A$]

$x = y$ ∎

D.

(34) **D**

os membros / são partição de A

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A \in \mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

$(\forall A)\ P_A \subseteq \wp X$

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (i).

suponha f, g injetivas.
sejam $x, y \in A$ t.q...
$\boxed{\text{Logo } f(x), f(y) \in B}$.
suponha $g \circ f(x) = g \circ f(y)$.
Logo $g(f(x)) = g(f(y))$. ✓
Logo $f(x) = f(y)$. [por g injetiva] ✓
Logo $x = y$. [por f injetiva] ✓

Não faz sentido explicitar isso aqui! Qual o objetivo??

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (iii).

suponha $g \circ f$ bijetiva
sejam $x, y \in A$
suponha $f(x) = f(y)$. {(1)}
seja $c \in C$ tal que $g \circ f(x) = c$.
Logo $g(f(x)) = c$.
Logo $g(f(y)) = c$. [(1)]
Logo $x = y$ [por $g \circ f$ injetiva]

? pulou dois passos aqui

qual o sentido de dar um novo nome para o $(g \circ f)x$?

"Logo $g(fx) = g(fy)$" em vez de

(12) **O**

$(Sn)^2 = Sn^2$

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square \times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

n $\quad n \times n \quad (n^2, 2n) \quad n^2+2n$

$S(n^2+2n) = (Sn)^2$

$Sn \quad (Sn)^2 \quad n^2+2n$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$(\forall n \in \mathbb{N})[(Sn)^2 = S(n^2+2n)]$

E.M/F.!

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$):

Seja $d \in D$, tal que $(f \circ g)d = (f \circ h)d$. → Mas isso não significa $f \circ g = f \circ h$. Além disso, o d não é arbitrário membro do D.

Logo $f(gd) = f(hd)$ [0.1].

Logo $gd = hd$ [f injetora].

($\Leftarrow$):

Quem é D?

Sejam $x, y \in A$, tais que $fx = fy$.

Logo sejam $d, d' \in D$, tais que $x = gd$ e $y = hd'$.

Logo $f(gd) = f(hd')$.

Logo $(f \circ g)d = (f \circ h)d'$ [0.1].

Logo $gd = hd'$ [hip]. X

Logo $x = y$.

Para quais D, g, h aplicou? Conseguiu $f \circ g = f \circ h$?

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$x \in F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

$fx = x$

Demonstre as igualdades seguintes

$\iff (\exists y \in F)[x = fy]$ $\quad\quad\quad$ $\iff [fx = x]$

$$x \in f[F] = F \qquad\qquad x \in f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

Demonstração de $f[F] \subseteq F$.

Seja $x \in f[F]$. ✓
Logo seja $y \in F$, tal que $fy = x$. ✓
Logo $fy = y$. ✓
Logo $y = x$. ✓ justificativas??
Logo $x \in F$. ✓

Demonstração de $f[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$
Logo $fx = x$.
Imediato. ✓ justificativas??

Demonstração de $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Suponha f injetiva.
Seja $x \in f^{-1}[F]$. ✓
Logo $fx \in F$. ✓
Logo $f(fx) = fx$. ✓
Logo $fx = x$ [f injetiva]. ✓
Logo $x \in F$. ✓

...

Demonstração de $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
Logo $fx = x$.
Logo $fx \in F$. ✓ ...

Só isso mesmo.

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma “identidade” para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square \times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}
$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
RESPOSTA.

$(\forall a \in \mathbb{N})[\, (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \,]$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
DEMONSTRAÇÃO.

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

($\emptyset \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$):
Suponha $\emptyset \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$.
Logo, seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $\emptyset \in P_A$.
Contradiction. ✓

($\bigcup\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A = X$):
($\subseteq$):
Seja $a \in \bigcup\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$.
Logo, seja $K \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ tal que $a \in K$.
Logo, seja $A' \in \mathcal{A}$ tal que $K \in P_{A'}$.
Logo, $a \in X$. ✓ [Como $A' \in \mathcal{A}$, logo $A' \subseteq X$. Além disso, $K \in P_{A'}$, logo $K \subseteq A'$, ou seja $K \subseteq X$.]

($\supseteq$):
Seja $x \in X$. ✓
Logo, seja $A' \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A'$. ✓ [$\mathcal{A}$ é uma partição]
Seja $K \in P_{A'}$ tal que $x \in K$. ✓ [$P_{A'}$ é uma partição] ...?

($(\forall X, Y \in \bigcup\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A)[X \cap Y \text{ hab} \Rightarrow X = Y]$):
Sejam $X, Y \in \bigcup\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ tais que $X \cap Y$ hab.
Seja $K \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ t.q. $X \in K$.
Seja $K' \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ t.q. $Y \in K'$.
Seja $A_x \in \mathcal{A}$ t.q. $K \in P_{A_x}$.
Seja $A_y \in \mathcal{A}$ t.q. $K' \in P_{A_y}$.
Logo, $P_{A_x} \cap P_{A_y}$ hab. [$X \cap Y$ hab]
Contradiction.

?

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injetiva;
(ii) f, g sobrejetivas $\Longrightarrow$ $g \circ f$ sobrejetiva;
(iii) $g \circ f$ bijetiva $\Longrightarrow$ f injetiva;
(iv) $g \circ f$ bijetiva $\Longrightarrow$ g injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (i).

Sejam f, g injetivas. ✓
Sejam $a, a' \in A$ tais que $(g \circ f)a = (g \circ f)a'$. ✓
Como g inj, logo $fa = fa'$. ✓ pulou $g(fa) = g(fa')$.
Como f inj, logo $a = a'$. ✓

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (ii).

Sejam f, g sobrejetivas.
Seja $c \in C$.
Como g sobre, logo seja $b \in B$ tal que $gb = c$. ✓
Como f sobre, logo, seja $a \in A$ tal que $fa = b$. ✓
Logo, $g(fa) = c$. ✓
"gb"

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rr, "square \times double"] & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}
$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$(\forall n \in \mathbb{N})[(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1]$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (i).

Suponha f, g injetivas

Sejam $x, y \in A$ t.q. $(g\circ f)x = (g\circ f)y$

Calculamos:

$(g\circ f)x = (g\circ f)y \iff g(fx) = g(fy)$ [$\circ$]

$\iff fx = fy$ [g injetiva], [g função]

$\iff x = y$ [f injetiva], [f função]

Não calcule com Props!

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (ii).

Suponha f, g sobrejetivas

Seja $c \in C$ ✓

Logo seja $b \in B$ t.q. $gb = c$ [g sobrej.] ✓

Logo seja $a \in A$ t.q. $fa = b$ [f sobrej.] ✓

Testemunho a ✓

Calc:

$(g\circ f)a = g(fa)$ ✓ [$\circ$]

$= gb$ ✓ [escolha do a]

$= c$ ✓ [escolha do b]

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Seja $y \in f[F]$ (1)
Logo seja $p \in F$ t.q. $fp = y$ [f-imagem da F]
Logo p é fixpoint da f. [pelo (1)]
Logo $fp = p$
Temos $fp = p$ & $fp = y$, logo $p = y$ (2)
Logo $y \in F$ [pelos (1) & (2)]

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Seja $p \in F$
Logo $fp \in f[F]$ (1) [pela definição de f-imagem]
Como $p \in F$, logo p é fixpoint da f
Logo $fp = p$ (2)
Logo $p \in f[F]$ [pelos (1) e (2)]

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Vou solicitar que f é injetiva
Seja $x \in f^{-1}[F]$
Logo $fx \in F$ [f-preimagem da F]
Logo fx é fixpoint da f
Logo $f(fx) = fx$
Logo $fx = x$ [f injetiva]
Logo x é fixpoint da f
Logo $x \in F$

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $p \in F$
Logo $fp = p$ [p é fixpoint da f]
Logo $fp \in F$ (1) [pois $fp = p$ & $p \in F$]
Logo $p \in f^{-1}[F]$ [pela definição de f-preimagem]

Só isso mesmo.

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square\times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$\lambda x.x$ $\quad A \to B$ t.q $A \subseteq B$?!?

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

(=>) Suponha $f\circ g = f \circ h$.
Seja $d \in D$.
Logo, $(f\circ g)d = (f\circ h)d$.
Logo, $f(gd) = f(hd)$
Logo, $gd = hd$ [f é injetora] ✓

(<=)

f L-cancelável

Sup f injetora
$(\forall a, a')[fa = fa' \Rightarrow a = a']$
Sejam $a, a' \in A$ t.q $fa = fa'$.

Id$_D$

(=>)
Seja $d \in D$.
Como f é injetora, logo f tem inversa
~~$(f\circ g)$~~$d = (f\circ h)d$
$f(gd) = f(hd)$
$f^{-1}f(gd) = f^{-1}f(hd)$

Id$_D$ gd = Id$_D$ hd
$gd = hd$

$(\forall d \in D)[gd = hd]$

Sup f injetora
-- $(\forall a, a')[fa = fa' \Rightarrow a = a']$
Seja $d \in D$
$(f\circ g)d = (f\circ g)d$
$f(gd) = f(hd)$
Logo $gd = hd$ [f é injetora]

$\lambda x.x$ $\quad A \to B$ t.q $A \subseteq B$

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A \in \mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

- (i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;
- (ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;
- (iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;
- (iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (i).

~~Sejam f, g injetivas~~ Suponha f, g injetivas.
Sejam a, a' t.q. $(g \circ f) a = (g \circ f) a'$. ✓
Logo, $g(fa) = g(fa')$. ✓
Logo, $fa = fa'$ [g é injetiva] ✓
Logo, $a = a'$ [f é injetiva] ✓

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA (ii).

Suponha f, g sobrejetivas.
Seja $c \in C$. ✓
Logo, seja $b \in B$ t.q. $gb = c$. [g é sobrejetiva] ✓
Logo, seja $a \in A$ t.q. $fa = b$. [f é sobrejetiva] (1) ✓
Como $gb = c$, logo $g(fa) = c$ [por (1)] ✓
Logo $(g \circ f) a = c$. ✓

Sejam a, a' tq $(g \circ f) a = (g \circ f) a'$
Logo ~~$(g \circ f)$~~ $g(fa) = g(fa')$
Logo $fa = fa'$ [g é injetiva]
Logo, $a = a'$ [f é injetiva]
f sobre $(\forall b \in B)(\exists a)[fa = b]$ g sobre $(\forall c)(\exists b)[gb = c]$

$(\forall a, a')\ [(g \circ f) a = (g \circ f) a' \Rightarrow a = a']$
Sup f, g sobrejetivas
Seja $c \in C$.
Logo, seja $b \in B$ tq $gb = c$. [g é sobre]
Logo, seja $a \in A$ t.q $fa = b$. [f é sobre] 2
~~Logo~~ Como, $gb = c$, logo $g(fa) = c$ ~~[...]~~ (2)]
Logo $(g \circ f) a = c$.

$(\forall c)(\exists a)[(g \circ f) a = c]$
$g(fa) = c$

Sejam $a, a' \in A$.
Logo, $fa = fa'$

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square\times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"] \end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
RESPOSTA.

$\left(square \circ succ\,(x) = succ \circ (+) \circ square \times double \circ \Delta(x) \right) \iff (x+1)^2 = x^2+2x+1$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
DEMONSTRAÇÃO.

$\Rightarrow$) Suponha f injetora
Sejam D conjunto e $g,h : D \to A$
suponha $f \circ g = f \circ h$
Seja $x \in D$
temos $(f\circ g)(x) = (f \circ h)(x)$
temos $f(g(x)) = f(h(x))$
Logo, $g(x) = h(x)$ [f injetora]
Logo $g = h$

$\Leftarrow$) Suponha f L-cancelável
Sejam $x, y \in A$
suponha $fx = fy$
Tome $d \in \boxed{D}$ e $g,h : D \to A$
Temos $g(d) : A$ e $h(d) : A$
tome $x = g(d)^{(1)}$ e $y = h(d)^{(2)}$
Temos $f(g(d)) = f(h(d))$
temos $(f \circ g)(d) = (f \circ h)(d)$
Temos $gd = hd$ $\boxed{[f \text{ L-cancelável}]}$
Logo $x = y$ [por 1 e 2]

Quem é D?
É teu dado o universal
$(\forall D)(\forall g,h : D \to A)[\varphi(D,g,h)]$ e para usar este dado
tu precisa aplicá-lo
em D (e g (e h)).

(veja reclamações anteriores)

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Não temos nada disso.

Suponha $y \in f[F]$ ✓
Seja ~~Temos~~ $x \in F$ tq. $fx = y$ (1)
temos x é fixpoint de f
Logo $fx = x$ (2)
Logo $x = y$ [Por 1 e 2]
Logo $y \in F$ ✓

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Suponha $y \in F$ ✓
$\boxed{\text{~~Temos~~ } x \in F \text{ tq. } fx = y}$
temos $fy = y$ [y é fixpoint]
Logo $y \in f[F]$ [def de $f[F]$]

O que serve essa linha? Não temos x no escopo e nem faria sentido declarar um tal x, pois o y (que está no escopo sim) já serve (satisfaz o que tu queres aqui).

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Suponha f injetiva
Suponha $x \in f^{-1}[F]$ ✓
Logo ~~temos~~ $fx \in F$ ✓
Temos $\boxed{fx = a \text{ com } a \in A}$
Logo $a \in F$ (por quê?)
Logo $fa \in F$ (por quê?)

Logo $fx = fa$?
Logo $x = a$ [F injetivo] ✓
Logo $x \in F$ ✓

esse "com" parece com a "vírgula mágica". Tá afirmando que existe tal a? ... que todo a faz tal coisa? ... tá declarando um tal a?

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Suponha $x \in F$
Logo ~~temos~~ $fx = x$ [x é fixpoint]
Logo $fx \in F$ ✓

Não faz sentido dar um novo nome para o fx. Use fx mesmo!

Só isso mesmo.

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square\times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
RESPOSTA.

$$\boxed{(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1}$$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$).

$d \in D$

Sejam $g, h : D \to A$ t.q. $f \circ g = f \circ h$.

Seja $a \in A$. Qua

type errors

Temos $(f \circ g)a = (f \circ h)a$.

logo $f(ga) = f(ha)$.

logo $ga = ha$. [f injetiva]

logo $g = h$.

($\Leftarrow$):

Sejam $a, a' \in A$ t.q. $fa = fa'$.

~~Temos~~ $\cancel{f(id_A\, a) = f(id_A\, a')}$.

Temos $f(k_a\, a) = f(k_{a'}\, a')$ X ← Não sabemos quais são as $k_a, k_{a'}$ sem especificar dom!

logo $(f \circ k_a)a = (f \circ k_{a'})a'$.

logo $f \circ k_a = f \circ k_{a'}$ X ← por quê?

logo $k_a = k_{a'}$. [hipótese]

logo $k_a\, a = k_{a'}\, a$.

logo $a = a'$.

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Seja $x \in f[F]$. ✓ ↗parece esquecido ✓
logo seja $y \in F$ t.q $fy = x$.
Como y fixpoint f logo $y = x$.
logo $x \in F$. ✓
$fy = y$
ou calcule: $(y = fy = x)$

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
logo x é fixpoint f, ou seja, $fx = x$. ✓
Imediato. ✓

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Suponha f injetiva ✓
Seja $x \in f^{-1}[F]$. ✓
logo $fx \in F$. ✓ justifique!
logo $f(fx) = fx$ ~~f~~.
Mas $fx = fx$ e logo $x = fx$. [f injetiva]

Quê?!

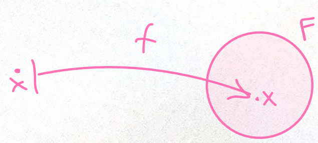
DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
logo $fx = x$. ← Não acabou aqui o $f^{-1}[F] \ni x$?
Basta demonstrar $fx \in F$, ou seja, $f(fx) = fx$.
Temos $f(fx) = fx = x$. ?
Imediato ?

???

Como? E, não era esse teu alvo, supostamente?

Só isso mesmo.



$(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2) = (x+1)^2$

← Grrr...

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square\times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

Resposta.

$\underbrace{\text{Produtos notaveis}}$ $[(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2]$

? ?

(?? parece propaganda :)) donde chegou esse b aí?

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

Demonstração.

G partição de X $\qquad$ P_A é uma partição de uma partição

as união das Partições das Partições

(34) **D**

melhor usar $\bar{A}$ ou $\underline{A}$ ou $\mathbb{A}$, …, se tiver dificuldade com $\mathcal{A}$

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

$G \to A$ caligráfico

DEMONSTRAÇÃO/~~REFUTAÇÃO~~.

Seja A e B partições distintas de G, então existe $a \in A$ e $b \in B$ tal que $a \cap b$ é habitado, caso contrario $A = B$. ← Nada disso faz sentido..

Como $A \in \bigcup_{A\in G} P_A$ e $B \in \bigcup_{A\in G} P_A$, Sabemos que teriamos elementos disjuntos nessa união, refutando $\bigcup_{A\in G} P_A$ como partição de X

nessa qual?

qual parte da def?

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\Longrightarrow$ $g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\Longrightarrow$ f injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\Longrightarrow$ g injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ii.

$\cancel{(g\circ f)a}$ $\quad (g\circ f)x = g(fx) \quad x \in A$

$(g\circ f)x$ é sobrejetiva

$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x') \Longrightarrow g(f(x)) \neq g(f(x'))$

Pela Sobrejetividade de f $\quad$ Pela Sobrejetividade de g

sobrejetividade?!

isso nem parece demonstração

Demonstrações são textos, que "compilam" em português matemático!

~~DEMONSTRAÇÃO~~/REFUTAÇÃO DA iV.

~~Para a g∘f ser bijetiva, precisamos que todos os B que tenham uma representação em f(a) tal que a ∈ A, sejam unicos~~

g é injetiva pois todo c tal que $c \in C$ precisa de uma representação em $g(f(a))$ tal que $a \in A$.

Não faz sentido nem o que tá escrito nem a idéia (que seria tentar "demonstrar" que algo satisfaz uma definição, apenas repetindo tal definição.

$\Delta_A : A \to A \times A$

(12) **O** $\Delta_{\mathbb{N}}$

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "square \times double"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$\boxed{\lambda x .\ succ\ x + square\ x = \Delta x (\lambda y.\ square_y\ double_y)(succ\ x)}$

??

difícil acreditar que essa foi a "identidade" lecionada no E.M./F.

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Sejam g: B → C e h: C → D~~

Sejam $B \xrightarrow{g} C$ e $C \xrightarrow{h} D$. Mas isso não significa $f \circ g = f \circ h$.

($\Rightarrow$): por que esses nomes??

Sejam $a \in B$ e $a' \in D$ t.q $(f \circ g)a = (f \circ h)a'$.

Logo, $f(ga) = f(ha')$.

Logo, $ga = ha'$. [f injetora]

Logo, $g = h$. ?! [f injetora] ??

($\Leftarrow$) Sejam $a, a' \in D$ t.q $(h \circ f)a = (h \circ f)a'$.

Logo, $h \circ f = h \circ f$.

Logo, $f = f$.

Mesmo se tivesse chegado nisso corretamente, ele não prestaria nada para tua argumentação (demonstração) já que é uma proposição trivialmente válida que ninguém duvidou aqui...

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

Demonstração/Refutação.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

Demonstração/Refutação da i.

Suponha f, g injetivas.
Seja $a \in A$ t.q $fa = fa$. X
Logo, $g(fa) = g(fa)$. [g injetiva].
Logo, $(g \circ f)a = (g \circ f)a$.
Logo, $\boxed{g \circ f = g \circ f}$ [f injetiva]. X (veja comentário anterior)

Demonstração/Refutação da iii.

Suponha $g \circ f$ bijetiva. X
Sejam $a, a' \in A$ t.q $(g \circ f)a = (g \circ f)a'$. X qual teu alvo?
Logo, $g(fa) = g(fa')$.
Logo, $fa = fa'$ [g bijetiva]
Logo, $\boxed{f = f}$ [f bijetiva]

$f : A \to B$ $\quad$ $(f, g) : A \to B \times C$

$g : A \to C$ $\quad$ $(succ, square)\ 5 = succ\ B,\ square\ C$

$6\ ,\ 25$

(12) **O** 6

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square\times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}$$

Squar o succ = succ o + o squar × double

o quadrado do soma é o mesmo que

$(5,5)\ (squar \times doubl) \Rightarrow$

$5^2, 10$

$(25+10)+1 = \underline{36}$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

Square o Succ = succ o + o Square × double; O quadrado do sucessor de um número é o mesmo que o sucessor do dobro do número somado com o quadrado desse número. $(x+1)^2 = (2x+x^2)+1.$

↑ resposta.

$(x+1)^2 = (2x+x^2)+1$

$6^2 = (2\cdot 5 + 5^2)+1$

$10 + 25 + 1 = \underline{36}$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

$12 + 18 + 24$

$\underline{54}$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(18) **E** $g \circ f : A \to C$. $(\forall a, a' \in g \circ f)[g \circ f\, a = g \circ f\, a' \Rightarrow a = a']$.

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies$ $g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies$ $g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies$ f injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies$ g injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv): ↳ $(\forall c \in C)(\exists a \in A)[(g \circ f)a = c]$.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA I.

Sup. f, g injetivas t.q $(g \circ f)a = (g \circ f)a'$ | Não tem a,a' no teu escopo.

logo $g(fa) = g(fa')$. [def. ∘]

logo $fa = fa'$. [g é injetiva].

logo $a = a'$. [f é injetiva].

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA II.

Sup. f, g sobrejetivas

Seja $c \in C$.

logo seja $b \in B$. t.q $g\,b = c$. [g é sobrejetiva].

logo seja $a \in A$, t.q $f\,a = b$ [f é sobrejetiva].

Vou demonstrar que $(g \circ f)\,a = c$.

Calculamos:

$(g \circ f)\,a = g(fa)$. [def. ∘].

$= g(b)$. [escolha de a].

$= c$. [escolha de c].

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

$+24$
18
42
$+11$
58

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad (f^{-1}_{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Seja $x \in f[F]$
Logo seja $a \in F$ t.q. $x = fa$. [def. $f[F]$]. ✓
Logo $fa = a$. [$a \in F$] ✓
Logo $x = a$. [$fa = a$]. ✓
Logo $x \in F$. [escolha de a] ✓

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
Logo $fx \in f[F]$. [def. $f[F]$].
Logo $fx = x$. [$x \in F$].
Logo $x \in f[F]$. [$fx = x$].
(melhor "Temos" ou "Como $x \in F$, logo $fx = x$.")

$x \in f^{-1}[B]$

$fx = b \in B$

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$. $(\forall x \in A)\exists$

Sup. f injetiva. [H.E]. ✓
Seja $x \in f^{-1}[F]$ ✓
Logo seja $y \in F$ t.q. $fx = y$. [def. $f^{-1}[F]$]. ✓
Logo $y = fy$. [$y \in F$]
Logo $fx = fy$. [escolha de y]. ✓
Logo $x = y$. [f injetiva]. ✓
Logo $x \in F$. [escolha de y]. ✓

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$. ✓
Logo $fx = x$. [$x \in F$]
Logo $fx \in F$. [escolha de x]. ✓
Logo $x \in f_{-1}[F]$. [def. $f_{-1}[F]$].
Logo

Só isso mesmo.

$f^{-1}[F] \overset{def}{=} \{\, a \in A \mid fa \in F \,\}$

$+24$
12
18
54

65

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square \times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
RESPOSTA.

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
DEMONSTRAÇÃO.

Quem é?

$\Longrightarrow$

Seja $d \in D$
Suponha $(f \circ g)d = (f \circ h)d$
Logo $f(gd) = f(hd)$
Logo $gd = hd$ [f inj]
Logo $g = h$

essa igualdade deveria ser inferida, não suposta!

$\Longleftarrow$

Qual o alvo aqui??!

~~Seja $d \in D$~~
~~Suponha $f(gd) = f(hd)$~~
~~Logo $(f \circ g)d = (f \circ h)d$~~
~~Logo $gd = hd$ [f L-canc]~~

Qual o alvo em cada linha aqui e qual o papel de cada?

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

Demonstração/Refutação.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\Longrightarrow$ $g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\Longrightarrow$ f injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\Longrightarrow$ g injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

Demonstração/Refutação da i.

nome ruim

Sejam $a, b \in A$

Suponha $(g\circ f)a = (g\circ f)b$

Logo $g(fa) = g(fb)$

Logo $fa = fb$ [g inj]

Logo $a = b$ [f inj]

Demonstração/Refutação da iii.

Sejam $a, b \in A$

Suponha $fa = fb$

Logo ~~g(f)~~ $g(fa) = g(fb)$

Logo $(g\circ f)a = (g\circ f)b$

Logo $a = b$ [gof bij]

.inj

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "square \times double"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$(x+1)^2 = (x^2+2x)+1$

(por quê?)

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

$\Rightarrow$)

Seja D um conjunto.

Sejam $g, h : D \to A$ tais que $f \circ g = f \circ h$.

Logo $f(id\, g) = f(id\, h)$. o que significa id_g, id_h ??

Por f injetora, temos $g = h$. [id deixa em paz]. ?

$\Leftarrow$)

Sejam a, a' t.q. $f\, a = f\, a'$.

Logo $f(id\, a) = f(id\, a')$.

Logo $(f \circ id)\, a = (f \circ id)\, a'$. (mesma confusão).

Então $id\, a = id\, a'$. [f L-cancelável]

Logo $a = a'$.

Imediato.

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Seja $x \in f[F]$.
Seja $x' \in F$ t.q. $fx' = x$.
Temos $fx' = x'$. [x' é fixpoint]
Logo $x' = x$.
Imediato.

"Logo $x \in F$." parece melhor aqui, ou, antes:
"Logo $x = x' \in F$." e acabou.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
Logo, $fx = x$.
~~Imme~~diato.

justificativas?
até adicionar: $fx = x \in F$ ajudaria aqui.

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$. ESOLHI INJETIVA AQUI

Seja $x \in f^{-1}[F]$.
Seja $x' \in F$ t.q. $f^{-1}x' = x$ Sequer sabemos se f é invertível.
Temos que $fx' = x'$.
Como $f^{-1}x' = x$, logo $x' = fx$.
Como f é injetiva & $fx = fx'$, logo $x = x'$.
Imediato.

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
Logo $fx = x$.
Logo $f^{-1}(fx) = f^{-1}x$. Estude bem a definição de pré-imagem
Logo $x = f^{-1}x$.
Imediato.

Só isso mesmo.

Pare de terminar tuas demonstrações com "Imediato."!

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square\times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}
$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

O professor ensinou que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$)

Seja D : Set.

Seja $g, h : D \to A$ tq. $f \circ g = f \circ h$.

Seja $d \in D$.

Quero demonstrar que $g(d) = h(d)$.

Temos que $f \circ g = f \circ h$.

Logo, $(f \circ g)\, d = (f \circ h)\, d$.

Logo, $f(g\, d) = f(h\, d)$. [$\circ$]

Logo, $g\, d = h\, d$ [f injetora]

sim!

($\Leftarrow$)

Sejam $x, y \in A$ tq. $fx = fy$.

Logo, $f(id_A\, x) = f(id_A\, y)$. [$id_A$]

Logo, $(f \circ id_A)x = (f \circ id_A)y$. [$\circ$]

Logo, $id_A\, x = id_A\, y$. [f = L-cancel]

Logo, $x = y$. [id_A]

mesma confusão

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Seja $x \in f[F]$.
Logo, seja u $\in F$ tq. $fu = x$.
Como u é um fixpoint da f, logo $fu = u$. [$u \in F$]
donde tirou isso?
Logo, $u = x$.
Logo, $x \in F$.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
Vou demonstrar que $f(x) = x$.
Imediato por x ser fixpoint da f. [$x \in F$]

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Suponha que f é injetiva.
Seja $x \in f^{-1}[F]$, ou seja, $fx \in F$.
Como fx é um fixpoint da f, logo $f(fx) = fx$.
Logo, $fx = x$ [f injetiva].
Logo, $x \in F$.

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $x \in F$.
Como x é um fixpoint da f, logo $fx = x$ [$x \in F$]
Logo, $fx \in F$.

Só isso mesmo.

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square \times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"']
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
Resposta.

O professor ensinou funções recursivas de $N \rightarrow N$?!

X

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
Demonstração.

Suponha f injetora, logo $f\ (\forall x, y \in A)[f(x) = y]$
assim, podemos

X

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

todas?!

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA i.

Supomha que $f, g, g\circ f$ são imjetivas, logo,
$f: (\forall x\, y \in A)[f(x) = f(y)]$, $g: (\forall x'\, y' \in B)[g(x') = g(y')]$
$g\circ f (\forall x\, y \in A)[g\circ f(x'') = g\circ f(y'')]$, podemos comcluir que
$f(x) = g\circ f(x'')$ já que ambos $\in A$ e que $g(x')$ é diferente de ambos, assim refutamdo

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ii.

Supomha que $f, g, g\circ f$ são ~~(injet)~~ sobrejetoras, logo
$f (\forall b \in B)(\exists a \in A)[f(a) = b]$, $g (\forall c \in C)(\exists b \in B)[g(b) = c]$ e
$g\circ f (\forall c \in C)(\exists a \in A)[g\circ f(a) = c]$, assim $f(a)$, $g\circ f(a) \in A$ e
$g(b) \notin A$ e para ambas fumções serem sobrejetoras elas precisam de uma fumção $\in A$.

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square \times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\ \mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"] \end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
RESPOSTA.

$(x+1)^2 = (x^2 + 2x) + 1$

? ?

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$)
Sejam D : Set
Sejam $g, h : D \to A$
t.q $f \circ g = f \circ h$. (1)
Seja $x \in D$.
Temos $(f\circ g)x = (f \circ h)x$. [(1)]
Logo $f(gx) = f(hx)$. [o-comp]
Logo $gx = hx$. [f injetora]
($\Leftarrow$)
Sejam $a, a' \in A$ t.q $fa = fa'$ (2)
Vou demonstrar que
$f \circ k_a = f \circ k_{a'}$:
Seja x : Unit.

poderia/deveria ser (1). Escopos distintos!

Calculamos:
$(f \circ k_a)x = f(k_a\, x)$ [o-comp]
$= f\,a$ [$(\forall x)[k_a\, x = a]$]
$(f\circ k_{a'})x = f(k_{a'}\, x)$ [o-comp]
$= f\,a'$ [$(\forall x)[k_{a'}\, x = a']$]
$= f\,a$ [(2)]
Como $f \circ k_{a'} = f \circ k_a$, logo
$k_a = k_{a'}$. [f L-cancelável]
Logo $a = a'$.

:) sim!

dom? Parece $k_a, k_{a'} : \mathrm{Unit} \to A$ então!

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathcal{A}}$ uma $\mathcal{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, P_A é uma partição de A. Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ é uma partição de X.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(Par-1)
Suponha $\emptyset \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$
Logo seja $A \in \mathcal{A}$ t.q $\emptyset \in P_A$.
Contradição. [P_A partição de A]

(Par-2)
Sejam $B, C \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A$ t.q
$B \cap C$ hab.
Sejam $A, A' \in \mathcal{A}$ t.q $B \in P_A$ &
$C \in P_{A'}$
Seja $x \in B \cap C$
Como $x \in B \in P_A$, Logo
$x \in \bigcup P_A = A$.
[P_A partição de A]
Similarmente temos
$x \in A'$.
Logo $A = A'$. [$x \in A \cap A'$]

[& $\mathcal{A}$ partição]

Logo $B, C \in P_A$.
Logo $B = C$ [P_A partição & $B\cap C$ hab]

(Par-3) ($\supseteq$) Seja $x \in X$
Queremos $(\exists C \in P_X)(\exists A\in\mathcal{A})[x \in C \in P_A]$
Temos $x \in \bigcup\mathcal{A}$ [$\mathcal{A}$ partição]
Logo seja $A \in \mathcal{A}$ t.q $x \in A$.
Logo $x \in \bigcup P_A$. [P_A partição]
Logo seja $C \in P_A$ t.q $x \in C$.
Temos $x \in C \in P_A$.
($\subseteq$) Suponha $x \in \bigcup(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} P_A)$

não é imediato

Logo sejam $A \in \mathcal{A}$ e $\boxed{C \in P_X}$ t.q
$x \in C \in P_A$ Logo $x \in X$
[$C \subseteq X$]

esse passo ficou
condensado demais

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;

(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;

(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;

(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

(podemos usar o (0)
para justificar
(como?)

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ______ .

Logo seja $C \in \bigcup_A P_A$ (0) t.q. $\boxed{(\exists A \in \mathcal{A})[C \in P_A]}$ (1) & $x \in C$. (2)
Logo (pela (1)) seja $A \in \mathcal{A}$ t.q. $C \in P_A$. (3)
Logo $x \in C \in P_A$ [pelas (2), (3)].

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ______ .

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square\times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
RESPOSTA.

O próprio O. (?) X

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
DEMONSTRAÇÃO.