(26 + 8♭) **C**

Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria $\mathcal{C}$.

(6) DEFINIÇÃO.

Dizemos que $\mathbb{1}$ é um objeto terminal se e somente se:

$\forall a \overset{!}{\dashrightarrow} \mathbb{1}$

Dizemos que P é produto de A, B se e somente se:

$P = A \times B$?!

$$\begin{tikzcd} & A \times B & \\ A \arrow[ur, "inL"] & & B \arrow[ul, "inR"'] \\ & C \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, dashed, "!"] \arrow[ul, phantom, shift left=3, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & \end{tikzcd}$$

desse tipo de coisas é que o produto é o melhor.

(20) **C2.** Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...

(8♭) ...e que terminais são identidades para os produtos.

ENUNCIADO.

Unicidade de produtos: $(\forall C, C')\,[\,C = A \times B$ e $C' = A \times B \Rightarrow C \cancel{\cong} C'\,]$
(com objetos A, B fixados)

Verifique que na Set:
(i) $A \times B$, $B \times A$ são produtos dos A, B.
(ii) $A \times B \neq B \times A$ (em geral)

DEMONSTRAÇÃO.

Unicidade:

Sejam C, C' t.q. $C = A \times B$ e $C' = A \times B$.

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \ \&\ c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

Escritas assim essas justificativas ficou muito confuso!

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam c, x, y t.q. $c \wedge x = c \wedge y$ & $c \vee x = c \vee y$.

Como $c \wedge x = c \wedge y$ logo $c \wedge x = (c \wedge x) \vee (\cancel{c \vee y}\ c \wedge y)$. [idem]

Como $c \vee x = c \vee y$ logo $c \vee x = (c \vee x) \vee (c \vee y)$. [idem]

Calc:

$x \wedge (c \vee x) = x$

$x \wedge ((c \vee x) \vee (c \vee y)) = (x \wedge (c \vee x)) \vee (x \wedge (c \vee y))$

$= (x \vee (x \wedge (c \vee y))$ [abs]

↯ ??

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \,\}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Demonstremos $\ker\varphi \leq A$. Temos $\varphi(0_A) = 0_B$, logo $0_A \in \ker\varphi$ e $\ker\varphi \neq \emptyset$.
Sejam $x, y \in \ker\varphi$. Calculamos:
$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = 0_B\,\varphi(y^{-1}) = 0_B$$
Logo $xy^{-1} \in \ker\varphi$, donde $\ker\varphi \leq A$ pelo one-test.

Demonstremos que $\ker\varphi$ absorve a multiplicação.
Sejam $k \in \ker\varphi$ e $a \in A$. Calculamos:
$$\varphi(ka) = \varphi(k)\varphi(a) = \underbrace{0_B\varphi(a) = 0_B}_{\text{(zero absorve)}}$$
Logo, $ka \in \ker\varphi$.
A demonstração de $ak \in \ker\varphi$ é similar. Logo, $\ker\varphi \trianglelefteq A$.

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.
RESPOSTA.

Cuidado: Tua notação sendo multiplicativa dá impressão que tu não tá se referindo à parte aditiva do anel!

Escrevemos: $\varphi(x-y)$
em vez de: $\varphi(xy^{-1})$.

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

DEMONSTRAÇÃO.

$x = (c \vee x) \wedge x$
$= (c \vee y) \wedge x = (c \wedge x) \vee (y \wedge x)$
$= (c \wedge y) \vee (y \wedge x)$
$= ((c \wedge y) \vee y) \wedge ((c \wedge y) \vee x)$
$= y \wedge ((c \vee x) \wedge (y \vee x))$
$= ((y \wedge c) \vee (y \wedge x)) \vee (y \vee x)$
$= (y \wedge c) \vee (y \wedge x)$
$= y \wedge (c \vee x)$
$= y \wedge (c \vee y) = y$

usei de rascunho

$a \overset{\wedge}{\vee} (a \overset{\vee}{\wedge} b) = a$

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \;\&\; c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

$(b \overset{\wedge}{\vee} a) \overset{\vee}{\wedge} a = a$

Sejam $c, x, y \in L$ com $c \wedge x = c \wedge y$ e $c \vee x = c \vee y$.
Calculemos:

$x = ((c \vee x) \wedge x)$ [abs]
$= ((c \vee y) \wedge x)$ [hip.]
$= (c \wedge x) \vee (y \wedge x)$ [distrib]
$= (c \wedge y) \vee (y \wedge x)$ [hip]
$= ((c \wedge y) \vee y) \wedge ((c \wedge y) \vee x)$ [distrib]
$= y \wedge ((c \wedge y) \vee x)$ [abs]
$= y \wedge ((c \vee x) \wedge (y \vee x))$ [distrib]
$= y \wedge ((y \vee x) \wedge (c \vee x))$ [comut]
$= (y \wedge (y \vee x)) \wedge (c \vee x)$ [assoc]
$= y \wedge (c \vee x)$ [abs]
$= y \wedge (c \vee y)$ [hip.]
$= y$ [abs]

Logo $x = y$, como queríamos.

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

use HIP pois (HI) lembra demais de... (HI) :P

Demonstração.

Sejam x, y e z membros de L ✓

Suponha $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ [HI]

Calculamos

~~$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \vee (x \wedge y)) \vee (z \vee (x \wedge z)))$~~ ~~[abs y,x e abs z,x]~~

~~$= x \wedge ((y \vee z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$~~ ~~[simb]~~

$x \vee (y \wedge z) = x \vee ((y \vee (x \wedge y)) \wedge z)$ [?] [a∪b]

$= x \vee ((y \vee (x \wedge y)) \wedge (z \vee (x \wedge z)))$ [a∪b]

$= x \vee ((y \wedge z) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$ [simb] → ?

$= x \vee ((y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)))$ [HI]

$= x \vee ((y \wedge z) \vee (x \wedge (y \wedge z) \wedge (y \vee z)))$

$= x \vee (x \wedge \ldots$

$= x$? ← Não tem como. (Por quê?)

não dá. Melhore tua escrita!

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \;\;\&\;\; c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

Demonstração.

!!

(26) **B**

Seja $\langle B\ ;\ \vee, \wedge, 0, 1, ' \rangle$ uma álgebra booleana.

(8) **B1.** Defina o que significa que duas algebras booleanas são homomórficas e o que isomórficas para um leitor que nunca viu essas noções na vida.

DEFINIÇÕES.

precisa mais que isso

Sejam B_a e B_b duas algebras booleanas e seja $\varphi : B_a \to B_b$. Dizemos que elas são homomórficos se $[\varphi 1_a = 1_b$ e $\varphi 0_a = 0_b]$ e $(\forall b_a, b_a^* \in B_a)[\varphi(b_a \wedge_a b_a^*) = (\varphi b_a) \wedge_b (\varphi b_a^*)$ e $\varphi(b_a \vee_a b_a^*) = (\varphi b_a) \vee_b (\varphi b_a^*)]$ e $(\forall b_a \in B_a)[\varphi(b_a') = (\varphi b_a)'^b]$. Serão isomórficos se a recíproca for verdadeira, para algum $\varphi : B_b \to B_a$

(18) **B2.** Enuncie e demonstre um critério de homomorfismo entre álgebras booleanas (basta ser pelo menos pouco «mais barato» que a definição—não procure achar o mais barato possível!)

ENUNCIADO.

Sejam B_a e B_b álgebras booleanas. Dizemos que são homomórficos se dada $\varphi : B_a \to B_b$ $(\forall b_a, b_a^* \in B_a)[\varphi(b_a \wedge_a b_a^*) = (\varphi b_a) \wedge_b (\varphi b_a^*)$ & $1_b = (\varphi 0_a)'^b$ & $\varphi(b_a \vee_a b_a^*) = (\varphi b_a) \vee_b (\varphi b_a^*)]$

isso parece muito desrespeitoso! olha!

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam B_a e B_b álgebras booleanas

Seja $\varphi : B_a \to B_b$

Sejam $a_1, a_2 \in B_a$.

Suponha que $[\varphi(a_1 \wedge_a a_2) = (\varphi a_1) \wedge_b (\varphi a_2)$ & $\varphi(a_1 \vee_a a_2) = (\varphi a_1) \vee_b (\varphi a_2)]$ & $[1_b = (\varphi 0_a)']$

A parte φ respeita $\vee$ e $\wedge$ é imediata.

~~logo $\varphi(a_1') = \varphi(a_1 \wedge$~~

~~Como $a_1' = a_1 \vee 0$~~

Como $a_1 = a_1 \vee 0_a$, logo $\varphi(a_1 \vee 0_a) = \varphi a_1$

calculando:

$(\varphi a_1)' = \varphi(a_1 \vee 0_a)'$

$= (\varphi a_1 \vee_b (\varphi 0_a))'$

$= (\varphi a_1)' \wedge_b 1_b$

$= (\varphi a_1)'$

Só isso mesmo.

(26) **R**

de onde?

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \overset{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Como φ é um homomorfismo, logo $\varphi(0_A) = 0_B$.
Logo, como $0_A \in \ker \varphi$, temos que $\ker \varphi$ é habitado.
Sejam $a, b \in \ker \varphi$.
Temos $b^{-1} \in \ker \varphi$.
Logo $ab^{-1} \in \ker \varphi$.

Sejam $k \in \ker \varphi$ e $a \in A$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi(ka) &= (\varphi k)(\varphi a) && (\varphi \text{ homo}) \\ &= 0_B\, \varphi(a) && (\text{def ker}) \\ &= \varphi(0_A)(\varphi a) \\ &= \varphi(0_A a) = \varphi(0_A) = 0_B\end{aligned}$$

Similarmente, temos que $\varphi(ak) = 0_B$.

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.
RESPOSTA.

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \;\&\; c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam c, x, y. ✓

Suponha que $c \wedge x = c \wedge y$ e $c \vee x = c \vee y^{(1)}$ ✓

Calculamos:

$c \vee x = x$ [?!]

$c \vee y = y$ [?!]

Logo $x = y$ (pela 1).

(26) **R**

não misture notação aditiva e multiplicativa!!

Neste contexto parece significar subanel.

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ anéis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \overset{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Vou mostrar que $\mathrm{Ker}\,\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

Temos que $\varphi(0_A) = 0_B$ pois φ resp id, logo $0_A : \mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\in$!

kerφ é um conjunto.

Sejam $a, b : A$.

Calc: $\varphi(a +_A b^{-1})$
$= (\varphi a) +_B (\varphi b^{-1})$ [φ resp +]
$= 0_B +_B (\varphi b^{-1})$ [escolha de a]
$= 0_B +_B (\varphi b)^{-1}$ [φ resp inv]
$= 0_B +_B 0_B^{-1}$ [escolha de b]
$= 0_B$ ■

Sejam $r : A$ e $k : \mathrm{Ker}\,\varphi$. Vou mostrar que $rk : \mathrm{Ker}\,\varphi$.
Basta demonstrar que $\varphi(r \cdot_A k) = 0_B$.
Calc: $\varphi(r \cdot_A k)$
$= \varphi r \cdot_B \varphi k$ [φ resp ·]
$= \varphi r \cdot_B 0_B$ [esc. de k]
$= 0_B$ [(abs)]

Demonstrar que $kr : \mathrm{Ker}\,\varphi$ é similar a demonstração anterior. ■

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.
RESPOSTA.

$(x \vee z) \wedge x = x$ | $(y \vee z) \wedge y = y$ | $(z \vee y) \wedge z = z$

$(x \wedge z) \vee x = x$ | $(y \wedge z) \vee y = y$ | $(z \wedge y) \vee z = z$

$(x \wedge y) \vee x = x$ | $(y \vee x) \wedge y = y$ | $(z \vee x) \wedge z = z$

$(x \vee y) \vee x = x$ | $(y \wedge x) \vee y = y$ | $(z \wedge x) \vee z = z$

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam L reticulado e $x, y, z : L$.

($\Rightarrow$) Suponha que (1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Calc: $x \vee (y \wedge z)$

$= ((x \wedge z) \vee x) \vee (y \wedge z)$ [(abs)]

$= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z)$ [(com)]

$= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$ [(ass)]

$= x \vee ((x \wedge z) \vee (z \wedge y))$ [(com)]

$= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y))$ [(com)]

$= x \vee (z \wedge (x \vee y))$ [(1)]

= (... não sei pra onde vai!

nem eu!

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Suponha que (2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Calc: $x \wedge (y \vee z)$

$= ((x \vee z) \wedge x) \wedge (y \vee z)$ [(abs)]

$= x \wedge ((x \vee z) \wedge (y \vee z))$ [assoc & com]

$= x \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y))$ [com & com]

$= x \wedge (z \vee (x \wedge y))$ [(2)]

$= \dots$

essa teria sido gratuita fechando a ($\Rightarrow$).

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \ \& \ c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

aqui tens algum sinal que tá pelo menos aproximando pelo menos alguma parte do outro lado?

$x \vee (((z \vee x) \wedge z) \wedge (x \vee y))$

$x \vee (((x \vee z) \wedge z) \wedge (x \vee y))$

$x \vee ((x \vee z) \wedge z \wedge (x \vee y))$

$x \vee (((z \wedge x) \vee z) \wedge (x \vee y))$

$x \vee (((x \wedge z) \vee z) \wedge (x \vee y))$

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \,\}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

$0_B \in \ker\varphi$, pela def. de $\ker\varphi$. Não! X

Logo $\ker\varphi$ habitado.

$\varphi a = 0_B = \varphi b$!!

Sejam $a, b \in \ker_\varphi$. Logo

TYPE ERROR!

Logo sejam $x, y \in A$, t.q. $\varphi x = a$ e $\varphi y = b$.

~~Dem~~ Basta demonstrar que $ab^{-1} \in \ker\varphi$.

Calculamos:

$\cancel{ab^{-1}} = (\varphi x) + (\varphi y)^{-1}$

$\varphi(x - y)$

$= 0_B + (\varphi y)^{-1}$ [Pela escolha do x]

$= 0_B + (\varphi y^{-1})$ [Pela φ-resp inv]

$= 0_B + (0_B^{-1})$ [Pela escolha do y]

$= 0_B$

use notação aditiva..!!

Seja $a \in A$.

Seja $k \in \ker\varphi$.

Logo, seja $x \in A$, t.q. $\varphi x = k$.

Calculamos:

$a \cdot k = a \cdot (\varphi x)$

$= a \cdot 0$ [Pela escolha do x]

$= 0$ [Pelo zero anulador]

$k \cdot a = (\varphi x) \cdot a$

$= 0 \cdot a$

$= 0$

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.
RESPOSTA.

Escrever "similar" aqui não é opcional mas sim obrigatório!

Não faz sentido isso. Desenhe!

Carlos

C

(26 + 8♭) **C** Faltou escrever umas palavrinhas aqui..!

Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria $\mathscr{C}$.

(6) DEFINIÇÃO.

$$\begin{tikzcd}
A & P \arrow[l, "outL"'] \arrow[r, "outR"] & B \\
 & C \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[u, dashed] \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A & \forall B \arrow[l, dashed, "!"']
\end{tikzcd}$$

Terminal

(20) **C2.** Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...

(8♭) ...e que terminais são identidades para os produtos.

ENUNCIADO.

$(\forall P, P')[P$ é produto e P' é produto $\Rightarrow P = P']$

$(\forall A)[T$ é terminal $\Rightarrow A \times T = A]$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{tikzcd}
A & P \arrow[l, "outL"'] \arrow[r, "outR"] & B \\
 & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[d, dashed, "h'"] & \\
 & P' \arrow[uul, bend left, "outL'"] \arrow[uur, bend right, "outR'"'] &
\end{tikzcd}$$

Note que $outL \cdot h = f$

Note que $outL' \cdot h' = f$

Logo $outL \cdot h = outL' \cdot h'$

Logo $h = h'$?! como?

$$\begin{tikzcd}
A & A \times T \arrow[l, "outL"'] \arrow[r, "outR"] & T \\
 & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Como T é terminal, $g = outR$. Logo o diagrama seria visto dessa forma:

$$\begin{tikzcd}
A & A \times T \arrow[l, "outL"'] & \\
 & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & T
\end{tikzcd}$$

nem mesmo src têm!

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \ \& \ c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $c, x, y \in L$ tais que $c \wedge x = c \wedge y$ e $c \vee x = c \vee y$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
x &= (x \vee c) \wedge x && \text{(abs.)} \\
&= (c \vee x) \wedge x && \text{(com.)} \\
&= (c \vee y) \wedge x && \text{(hip.)} \\
&= x \wedge (c \vee y) && \text{(com.)} \\
&= (x \wedge c) \vee (x \wedge y) && \text{(dist.)} \\
&= (c \wedge x) \vee (x \wedge y) && \text{(com.)} \\
&= (c \wedge y) \vee (x \wedge y) && \text{(hip.)} \\
&= (y \wedge c) \vee (y \wedge x) && \text{(2x com.)} \\
&= y \wedge (c \vee x) && \text{(dist.)} \\
&= y \wedge (c \vee y) && \text{(hip.)} \\
&= (y \wedge c) \vee (y \wedge y) && \text{(dist.)} \\
&= (y \wedge c) \vee y && \text{(iden.)} \\
&= y && \text{(abs.)}
\end{aligned}$$

∎

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \overset{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

0_A. pois..?

Temos que $\ker\varphi$ é habitado. $[0_A \in \ker\varphi]$

Temos que $\ker\varphi \subseteq A$ [Trivial]

Vou demonstrar $(\forall x,y \in \ker\varphi)[x-y \in \ker\varphi]$

Sejam $x,y \in \ker\varphi$

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi(x-y) &= (\varphi x) + (\varphi(-y)) && [\varphi \text{ homo}]\\ &= (\varphi x) - (\varphi y) && [\varphi \text{ homo}]\\ &= 0_B - 0_B && [\text{escolhas de } x \text{ e } y]\\ &= 0_B \quad \blacksquare\end{aligned}$$

-- Parte absorve a mult.

Sejam $r \in A$ e $i \in \ker\varphi$

-- Parte $ir \in \ker\varphi$

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi(ir) &= (\varphi i)\cdot(\varphi r) && [\varphi \text{ homo}]\\ &= 0_B \cdot (\varphi r) && [\text{esc. } i]\\ &= 0_B && [?]\end{aligned}$$

-- Parte $ri \in \ker\varphi$

Similar.

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.

RESPOSTA.

(26 + 8^b) **C**

Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria $\mathcal{C}$.

(6) DEFINIÇÃO.

Dizemos que $\xleftarrow{\ell} P \xrightarrow{r}$ é um produto dos A B se P ~~satisfaz~~ fazer o diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} A & P \arrow[l, "\ell"'] \arrow[r, "r"] & B \\ & \forall C \arrow[ul, "\forall f"] \arrow[u, dashed, "!h"] \arrow[ur, "\forall g"'] & \end{tikzcd}$$

Um objeto T é terminal sse

$$\forall A \overset{!}{\dashrightarrow} T$$

(20) **C2.** Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...

(8^b) ...e que terminais são identidades para os produtos.

ENUNCIADO.

$(\forall A, B, P, P')[P$ é produto dos A B & P' produto dos $A, B \Rightarrow (\exists f : P \to P')[f$ é iso$]]$

$(\forall A)(\forall T)[T$ terminal $\Rightarrow A \times T = A]$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $A, B : \mathrm{Obj}$

Sejam P, P' t.q P e P' são produtos dos A, B.

Sejam $f : P \to P'$, $g : P' \to P$. [P, P' são produtos dos A, B]

Vou demonstrar que f é iso.

Temos $(g \circ f) : P \to P$.

Temos Id_P a única seta $P \to P$.

[Pois P produto]

Logo $(g \circ f) = Id_P$. [unicidade]

Temos $(f \circ g) = Id_{P'}$ [similar]

Logo f é iso.

--- Parte terminal é Id ?!?

confundiu as identidades aqui?

Seja $A : \mathrm{Obj}$. Seja T um terminal.

Temos $Id_A : A \to A$

[$\mathcal{C}$ cat]

Temos $f : A \to T$

[T terminal]

--- Parte $\xleftarrow{\forall h} \forall C \xrightarrow{\forall g}$ ← desenhe!!

Sejam $C : \mathrm{Obj}$, $h : C \to A$

$g : C \to T$.

Temos $(f \circ h) : C \to T$.

[$\mathcal{C}$ cat]

Logo $(f \circ h) = g$ [T terminal].

Contradição. [$(f \circ h) \neq g$] ?!

Aqui faltou um «... t.q ...»!

Seja a^{-1} $\in \ker \varphi$ Demonstraremos que $a + a^{-1} \in \ker$ —a!!

Calculemos $\varphi(a + a^{-1}) = \varphi(a) + \varphi(a^{-1})$ [Homo resp +]

(26) **R** logo ker inv-fechado. $= \varphi(a) + \varphi(a)^{-1}$ [Homo resp inv]

$= 0_B + 0_B$ [escolha de a e a^{-1}]

Responda em **até uma** das:

$= 0_B$ [id]

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in \mathcal{A} \mid \varphi a = 0_B \}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

como φ é homo, então $\varphi(0_A) = 0_B$ pois homo resp id
logo $\ker\varphi \neq \emptyset$. Demonstraremos que $\ker\varphi$ é subgrupo da parte aditiva de $\mathcal{A}$.
Seja $a, a' \in \ker\varphi$ mostraremos que $a + a' \in \ker\varphi$
calculemos: $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ [φ homo resp +]
logo $\ker\varphi$ (+)-fechado $= 0_B + 0_B$ [escolhas de a e a']
$= 0_B$ [id]
Demonstraremos que $\ker\varphi$ absorve a multiplicação:
Seja $k \in \ker\varphi$ e seja $a \in \mathcal{A}$ demonstraremos que ka e $ak \in \ker\varphi$
calculemos: $\varphi(ka) = \varphi(k)\varphi(a)$ [Homo]
$\varphi(ak) \to$ similar. $= 0_B\,\varphi(a)$ [escolha k]
$= 0_B$ [id] Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$

?!

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.

RESPOSTA.

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \iff x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

DEMONSTRAÇÃO.

$(\Leftarrow)$ Seja $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Demonstraremos $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Calculemos: $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge ((y \vee x) \wedge z)$ Ass.

$= x \wedge ((x \vee y) \wedge z)$ com.

$= (x \wedge x) \vee (y \wedge z)$ Ass.

$= x \vee (y \wedge z)$ idem.

$= (x \vee y) \wedge z$ Ass

$= (y \vee x) \wedge z$ com.

$= y \vee (x \wedge z)$ Ass.

$= y \vee (z \wedge x)$ com.

$= (z \vee y) \wedge x$ Ass e com.

Note que $(z \vee y) \wedge x = x \wedge (y \vee z)$

Logo $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ que era o que queríamos demonstrar.

$(\Rightarrow)$ Similar.

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \;\&\; c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.