FMC2, 2022.2 — **Prova 3.2**

(Turma T56 do Thanos) — (points: 52; bonus: $8^\flat$; time: 64')

Nome:

2022-12-16

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.[3]

X. **Escolha até 2 dos $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{L}, \mathbf{B}$.**[4]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \,\}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.
RESPOSTA.

(26 + $8^\flat$) **C**

Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria $\mathcal{C}$.

(6) DEFINIÇÃO.

(20) **C2.** Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...

($8^\flat$) ...e que terminais são identidades para os produtos.

ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$(\forall x, y, z)\,[\, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,] \iff (\forall x, y, z)\,[\, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\,]\,.$$

Demonstração.

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \ \ \& \ \ c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

Demonstração.

(26) # B

Consideramos aqui álgebras booleanas com complementos unários.

(8) **B1.** Defina o que significa que duas algebras booleanas são homomórficas e o que isomórficas para um leitor que nunca viu essas noções na vida.
Definições.

(18) **B2.** Enuncie e demonstre um critério de homomorfismo entre álgebras booleanas (basta ser pelo menos pouco «mais barato» que a definição—não procure achar o mais barato possível!)
Enunciado.

Demonstração.

Só isso mesmo.

Rascunho