
Nome:

2022-12-16

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- IX. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.³
- X. Escolha até 2 dos **R, C, L, B**.⁴

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam \mathcal{A}, \mathcal{B} anéis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in \mathcal{A} \mid \varphi a = 0_{\mathcal{B}} \}$ é um ideal do \mathcal{A} .

DEMONSTRAÇÃO.

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.

RESPOSTA.

(26 + 8^b) **C**

Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria \mathcal{C} .

(6) DEFINIÇÃO.

(20) **C2.** Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...

(8^b) ... e que terminais são identidades para os produtos.

ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

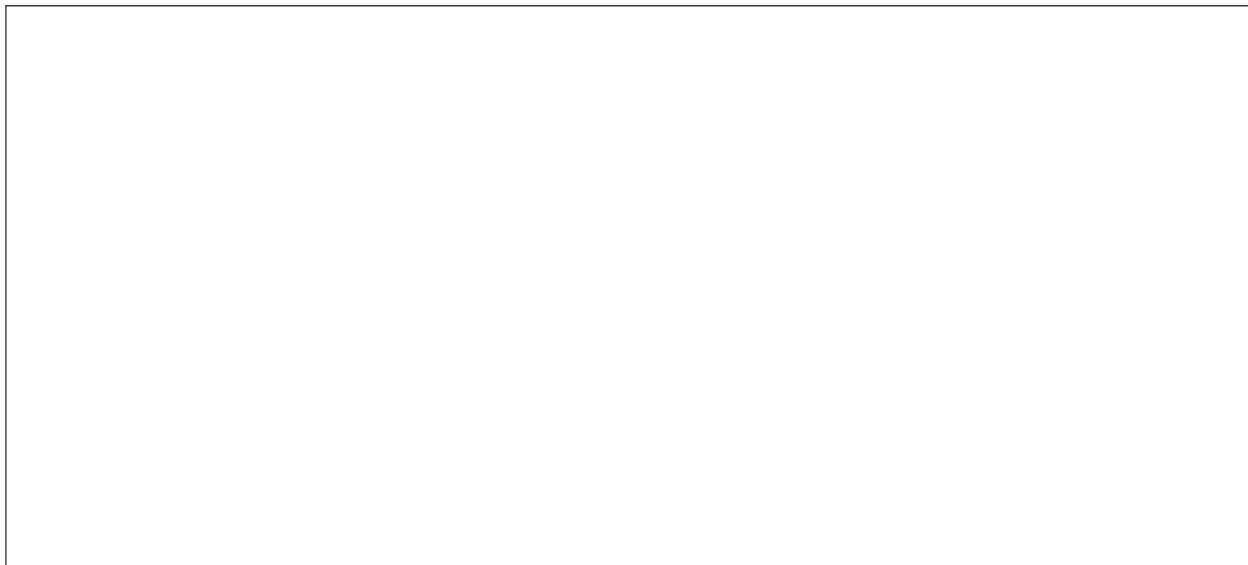
(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$(\forall x, y, z) [x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \iff (\forall x, y, z) [x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)].$$

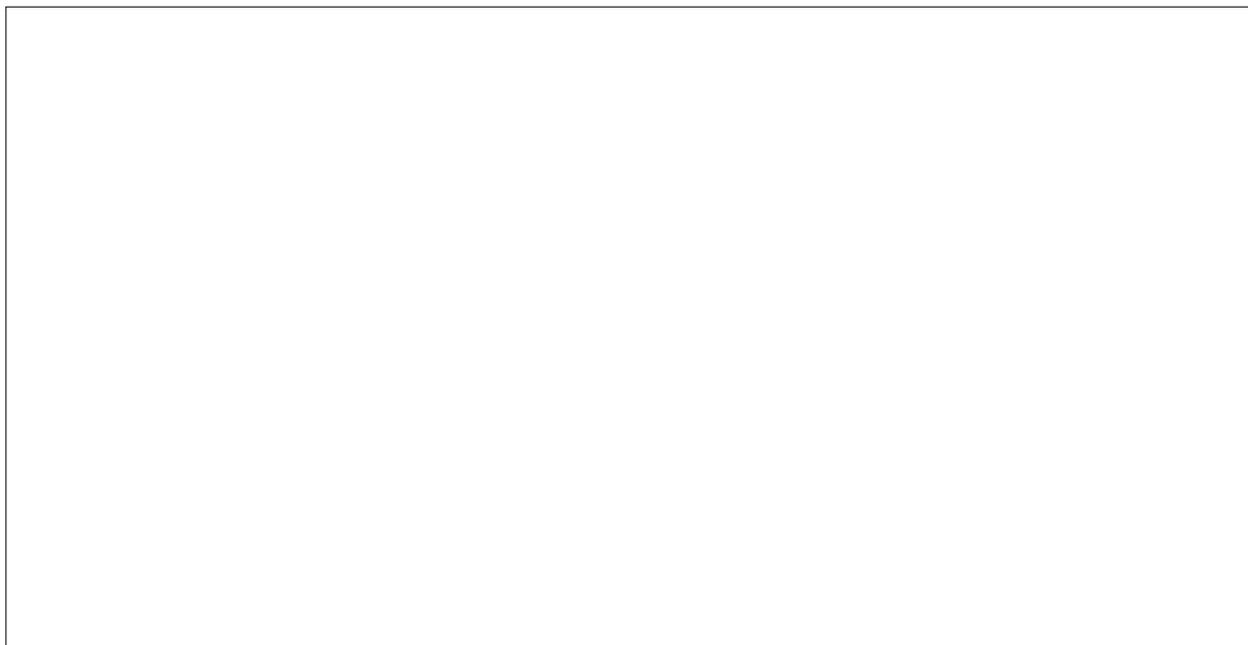
DEMONSTRAÇÃO.



(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \ \& \ c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.



(26) **B**

Consideramos aqui álgebras booleanas com complementos unários.

- (8) **B1.** Defina o que significa que duas álgebras booleanas são homomórficas e o que isomórficas para um leitor que nunca viu essas noções na vida.

DEFINIÇÕES.

- (18) **B2.** Enuncie e demonstre um critério de homomorfismo entre álgebras booleanas (basta ser pelo menos pouco «mais barato» que a definição—não procure achar o mais barato possível!)

ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

RASCUNHO