

---

Nome: Θάνος

Gabarito

---

2022-12-16

### Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$ .<sup>2</sup>
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- IX. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.<sup>3</sup>
- X. Escolha até 2 dos R, C, L, B.<sup>4</sup>

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

<sup>3</sup>Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

<sup>4</sup>Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  anéis e homomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid \varphi a = 0_{\mathcal{B}}\}$  é um ideal do  $\mathcal{A}$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Habitado: como  $\varphi 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{B}}$ , logo  $0_{\mathcal{A}} \in \ker \varphi$ .

Subtração-fechado: Sejam  $k, k' \in \ker \varphi$ . Calculamos:

$$\varphi(k - k') = \varphi k - \varphi k' = 0_{\mathcal{B}} - 0_{\mathcal{B}} = 0_{\mathcal{B}}.$$

Absorve multiplicação: Seja  $a \in \mathcal{A}$  e  $k \in \ker \varphi$ . Calculamos:

$$\varphi(ak) = (\varphi a)(\varphi k) = (\varphi a)0_{\mathcal{B}} = 0_{\mathcal{B}}.$$

Similarmente  $\varphi(ka) = 0_{\mathcal{B}}$ .

(26) **R2.** Dado um anel  $R$  e um ideal  $I \trianglelefteq R$ , mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.

RESPOSTA.

Como  $I$  é um subgrupo normal de  $R$ , aproveitamos a construção, tendo já o conjunto  $R/I \stackrel{\text{def}}{=} \{I + a \mid a \in R\}$  como o grupo quociente da parte aditiva de  $R$  sobre o  $I$ . Precisamos definir multiplicação que definimos na maneira óbvia:

$$(I + a)(I + b) \stackrel{\text{def}}{=} I + ab.$$

Para verificar que assim a multiplicação é bem definida mesmo, sejam  $a, a', b, b' \in R$  tais que

$$I + a = I + a' \quad \& \quad I + b = I + b'.$$

Precisamos demonstrar  $I + ab = I + a'b'$ . Seja  $i \in I$ . Assim  $i + ab$  é um arbitrário membro do  $I + ab$  e basta mostrar que ele pretence ao  $I + a'b'$  também. (A outra direção é similar.)

$$i + (i_a + a')(i_b + b') = i + i_a i_b + a' i_b + a' b' \in I + a' b'$$

A verificação das leis de anel é rotina.

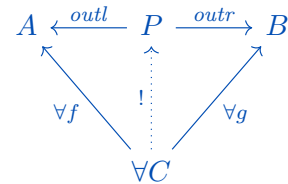
Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria  $\mathcal{C}$ .

(6) DEFINIÇÃO.

Um objeto  $1$  é chamado terminal se para todo objeto  $A$ , existe única flecha  $! : A \rightarrow 1$ .

Dados objetos  $A, B$ , dizemos que  $A \xleftarrow{outl} P \xrightarrow{outr} B$  é um produto dos  $A, B$  sse existe única flecha que faz o diagrama no lado comutar:

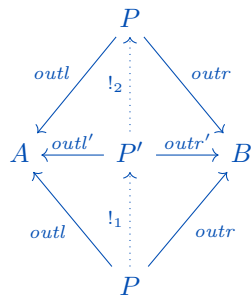


(20) C2. Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...  
(8<sup>b</sup>) ... e que terminais são identidades para os produtos.  
ENUNCIADO.

Seja flecha  $f : A \rightarrow B$ . Chamamos  $f$  de *iso* sse existe flecha  $g : A \leftarrow B$  tal que  $gf = 1_A$  e  $fg = 1_B$ . Sejam categoria  $\mathcal{C}$  e objetos  $A, B, P, P'$  tais que  $P, P'$  são produtos dos  $A, B$ . Logo  $P, P'$  são *isomorfos*, ou seja: existe flecha iso  $f : P \rightarrow P'$ . Em qualquer categoria  $\mathcal{C}$  com produtos e objeto terminal, o produto  $A \times 1$  é isomorfo ao próprio  $A$ .

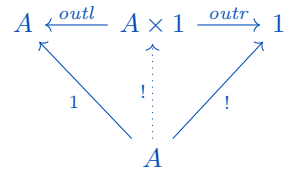
DEMONSTRAÇÃO.

Por diagram chasing!<sup>TM</sup>  
Considere a configuração seguinte:

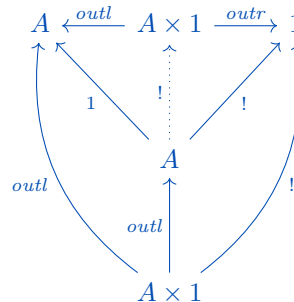


Como  $P$  produto dos  $A, B$ , é garantida a  $!_2$ . E como  $P'$  produto dos  $A, B$ , é garantida a  $!_1$ . Afirmação:  $!_2$  é iso. Vou verificar que  $!_1$  é seu inverso. Temos  $!_2 \circ !_1 : P \rightarrow P$ , mas o  $P$  sendo produto garantida única seta que faz o diagrama comutar, e a identidade  $1_P : P \rightarrow P$  também o faz comutar, logo  $!_2 \circ !_1 = 1_P$ . Similarmente,  $!_1 \circ !_2$ .

Por diagram chasing!<sup>TM</sup>  
Temos a configuração seguinte:



Afirmiação: a  $! : A \rightarrow A \times 1$  realmente é iso. A comutatividade do diagrama já oferece a parte  $outl \circ ! = 1_A$ . Basta verificar que  $! \circ outl = 1_{A \times 1}$ :



(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja  $L$  reticulado. Demonstre:

$$(\forall x, y, z) [x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \iff (\forall x, y, z) [x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)].$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam  $x, y, z \in L$ . Calculamos:

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{(pela hipótese)} \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{(abs)} \\ &= x \vee (z \wedge (x \vee y)) && \text{(com)} \\ &= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) && \text{(pela hipótese)} \\ &= (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) && \text{(ass)} \\ &= x \vee (z \wedge y) && \text{(abs)} \\ &= x \vee (y \wedge z). && \text{(com)} \end{aligned}$$

(26) **L2.** Seja  $L$  reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \ \& \ c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam  $c, x, y \in L$  tais que  $c \wedge x = c \wedge y$  <sup>(1)</sup> e  $c \vee x = c \vee y$  <sup>(2)</sup>. Calculamos:

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (c \vee x) && \text{(abs)} \\ &= x \wedge (c \vee y) && \text{(pela (2))} \\ &= (x \wedge c) \vee (x \wedge y) && \text{(dist)} \\ &= (c \wedge x) \vee (x \wedge y) && \text{(com)} \\ &= (c \wedge y) \vee (x \wedge y) && \text{(pela (1))} \\ &= (c \vee x) \wedge y && \text{(dist)} \\ &= (c \vee y) \wedge y && \text{(pela (2))} \\ &= y \wedge (y \vee c) && \text{(com)} \\ &= y \wedge (c \vee y) && \text{(com)} \\ &= y. && \text{(abs)} \end{aligned}$$

(26) **B**

Consideramos aqui álgebras booleanas com complementos unários.

- (8) **B1.** Defina o que significa que duas álgebras booleanas são homomórficas e o que isomórficas para um leitor que nunca viu essas noções na vida.

DEFINIÇÕES.

Sejam  $\mathcal{A} = (A ; \vee_A, \wedge_A, 0_A, 1_A, 'A)$ ,  $\mathcal{B} = (B ; \vee_B, \wedge_B, 0_B, 1_B, 'B)$  álgebras booleanas e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Dizemos que  $\varphi$  é um homomorfismo sse:

$$\begin{array}{lll} \varphi(0_A) = 0_B & \varphi(x \vee_A y) = \varphi x \vee_B \varphi y & \varphi(x'^A) = (\varphi x)'^B \\ \varphi(1_A) = 1_B & \varphi(x \wedge_B y) = \varphi x \wedge_B \varphi y. & \end{array}$$

Dizemos que  $\varphi$  é um isomorfismo sse existe homomorfismo  $\varphi'$  tal que  $\varphi'\varphi = \text{id}_A$  e  $\varphi\varphi' = \text{id}_B$ . Finalmente,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  são homomórficos (isomórficos) sse existe homomorfismo (isomorfismo) de  $A$  para  $B$ .

- (18) **B2.** Enuncie e demonstre um critério de homomorfismo entre álgebras booleanas (basta ser pelo menos pouco «mais barato» que a definição—não procure achar o mais barato possível!) ENUNCIADO.

Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  álgebras booleanas e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que as primeiras duas colunas acima são satisfeitas. Logo  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Basta demonstrar que  $\varphi$  respeita os complementos, ou seja, que para todo  $a \in A$ ,  $\varphi(a'^A) = (\varphi a)'^B$ . Seja  $a \in A$ . Temos:

$$x \wedge_A x'^A = 0_A \qquad x \vee_A x'^A = 1_A$$

e aplicando a  $\varphi$  em ambos os lados obtemos

$$\varphi(x \wedge_A x'^A) = \varphi 0_A \qquad \varphi(x \vee_A x'^A) = \varphi 1_A.$$

Pelas hipóteses que temos sobre  $\varphi$  chegamos em:

$$\varphi x \wedge_B \varphi(x'^A) = 0_B \qquad \varphi x \vee_B \varphi(x'^A) = 1_B.$$

Pela **L2** com  $c := \varphi x$ ,  $x := \varphi(x'^A)$ ,  $y := (\varphi x)'^B$ , temos a desejada  $\varphi(x'^A) = (\varphi x)'^B$ .

Só isso mesmo.