FMC2, 2022.2
(Turma T56 do Thanos)

Prova 3.2
(points: 52; bonus: $8^\flat$; time: 64’)

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-12-16

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.[3]

X. Escolha até 2 dos R, C, L, B.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(26) **R**

Responda em **até uma** das:

(26) **R1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aneis e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = 0_B \,\}$ é um ideal do $\mathcal{A}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Habitado: como $\varphi 0_A = 0_B$, logo $0_A \in \ker\varphi$.
Subtraição-fechado: Sejam $k, k' \in \ker\varphi$. Calculamos:

$$\varphi(k - k') = \varphi k - \varphi k' = 0_B - 0_B = 0_B.$$

Absorve multiplicaçaõ: Seja $a \in A$ e $k \in \ker\varphi$. Calculamos:

$$\varphi(ak) = (\varphi a)(\varphi k) = (\varphi a)0_B = 0_B.$$

Similarmente $\varphi(ka) = 0_B$.

(26) **R2.** Dado um anel R e um ideal $I \trianglelefteq R$, mostre como definir o anel quociente e verifique o que precisa ser verificado.
RESPOSTA.

Como I é um subgrupo normal de R, aproveitamos a construção, tendo já o conjunto $R/I \overset{\text{def}}{=} \{\, I + a \mid a \in R \,\}$ como o grupo quociente da parte aditiva de R sobre o I. Precisamos definir multiplicação que definimos na maneira óbvia:

$$(I + a)(I + b) \overset{\text{def}}{=} I + ab.$$

Para verificar que assim a multiplicação é bem definida mesmo, sejam $a, a', b, b' \in R$ tais que

$$I + a = I + a' \;\;\&\;\; I + b = I + b'.$$

Precisamos demonstrar $I + ab = I + a'b'$. Seja $i \in I$. Assim $i + ab$ é um arbitrário membro do $I + ab$ e basta mostrar que ele pretence ao $I + a'b'$ também. (A outra direção é similar.)

$$i + (i_a + a')(i_b + b') = i + i_a i_b + a' i_b + a'b' \in I + a'b'$$

A verificação das leis de anel é rotina.

$(26 + 8^\flat)$ # C

Suponha que teu leitor conhece apenas o que é uma categoria; nenhum outro conceito relevante.

C1. Defina as noções de *produto* e de *terminal* numa categoria $\mathcal{C}$.

(6) DEFINIÇÃO.

Um objeto 1 é chamado terminal se para todo objeto A, existe única flecha $! : A \to 1$.

Dados objetos A, B, dizemos que $A \xleftarrow{outl} P \xrightarrow{outr} B$ é um produto dos A, B sse existe única flecha que faz o diagrama no lado comutar:

$$\begin{tikzcd}
A & P \arrow[l, "outl"'] \arrow[r, "outr"] & B \\
& \forall C \arrow[ul, "\forall f"] \arrow[u, dotted, "!"] \arrow[ur, "\forall g"'] &
\end{tikzcd}$$

(20) **C2.** Enuncie e demonstre a unicidade de produtos em categorias...

$(8^\flat)$ ...e que terminais são identidades para os produtos.

ENUNCIADO.

Seja flecha $f : A \to B$. Chamamos f de *iso* sse existe flecha $g : A \leftarrow B$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$. Sejam categoria $\mathcal{C}$ e objetos A, B, P, P' tais que P, P' são produtos dos A, B. Logo P, P' são *isomorfos*, ou seja: existe flecha iso $f : P \to P'$. Em qualquer categoria $\mathcal{C}$ com produtos e objeto terminal, o produto $A \times 1$ é isomorfo ao próprio A.

DEMONSTRAÇÃO.

Por diagram chasing!™
Considere a configuração seguinte:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "outl"'] \arrow[dr, "outr"] & \\
A & P' \arrow[l, "outl'"'] \arrow[r, "outr'"] \arrow[u, dotted, "!_2"] & B \\
& P \arrow[ul, "outl"] \arrow[ur, "outr"'] \arrow[u, dotted, "!_1"] &
\end{tikzcd}$$

Como P produto dos A, B, é garantida a $!_2$. E como P' produto dos A, B, é garantida a $!_1$. Afirmação: $!_2$ é iso. Vou verificar que $!_1$ é seu inverso. Temos $!_2 \circ !_1 : P \to P$, mas o P sendo produto garanta única seta que faz o diagrama comutar, e a identidade $1_P : P \to P$ também o faz comutar, logo $!_2 \circ !_1 = 1_P$. Similarmente, $!_1 \circ !_2$.

Por diagram chasing!™
Temos a configuração seguinte:

$$\begin{tikzcd}
A & A \times 1 \arrow[l, "outl"'] \arrow[r, "outr"] & 1 \\
& A \arrow[ul, "1"] \arrow[u, dotted, "!"] \arrow[ur, "!"'] &
\end{tikzcd}$$

Afirmação: a $! : A \to A \times 1$ realmente é iso. A comutatividade do diagrama já oferece a parte $outl \circ ! = 1_A$. Basta verificar que $! \circ outl = 1_{A \times 1}$:

$$\begin{tikzcd}
A & A \times 1 \arrow[l, "outl"'] \arrow[r, "outr"] & 1 \\
& A \arrow[ul, "1"] \arrow[u, dotted, "!"] \arrow[ur, "!"'] & \\
& A \times 1 \arrow[u, "outl"] \arrow[uul, bend left, "outl"] \arrow[uur, bend right, "!"'] &
\end{tikzcd}$$

(26) **L**

Responda em **até uma** das:

(26) **L1.** Seja L reticulado. Demonstre:

$$(\forall x, y, z)\,[\,x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,] \iff (\forall x, y, z)\,[\,x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\,]\,.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $x, y, z \in L$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{(pela hipótese)}\\
&= x \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{(abs)}\\
&= x \vee (z \wedge (x \vee y)) && \text{(com)}\\
&= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) && \text{(pela hipótese)}\\
&= (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) && \text{(ass)}\\
&= x \vee (z \wedge y) && \text{(abs)}\\
&= x \vee (y \wedge z). && \text{(com)}
\end{aligned}$$

(26) **L2.** Seja L reticulado distributivo. Demonstre:

$$c \wedge x = c \wedge y \;\;\&\;\; c \vee x = c \vee y \implies x = y.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $c, x, y \in L$ tais que $c \wedge x = c \wedge y$ $^{(1)}$ e $c \vee x = c \vee y$ $^{(2)}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x &= x \wedge (c \vee x) && \text{(abs)}\\
&= x \wedge (c \vee y) && \text{(pela (2))}\\
&= (x \wedge c) \vee (x \wedge y) && \text{(dist)}\\
&= (c \wedge x) \vee (x \wedge y) && \text{(com)}\\
&= (c \wedge y) \vee (x \wedge y) && \text{(pela (1))}\\
&= (c \vee x) \wedge y && \text{(dist)}\\
&= (c \vee y) \wedge y && \text{(pela (2))}\\
&= y \wedge (y \vee c) && \text{(com)}\\
&= y \wedge (c \vee y) && \text{(com)}\\
&= y. && \text{(abs)}
\end{aligned}$$

(26) # B

Consideramos aqui álgebras booleanas com complementos unários.

(8) **B1.** Defina o que significa que duas algebras booleanas são homomórficas e o que isomórficas para um leitor que nunca viu essas noções na vida.

DEFINIÇÕES.

Sejam $\mathcal{A} = (A\ ;\ \vee_A, \wedge_A, 0_A, 1_A, {}'^A), \mathcal{B} = (B\ ;\ \vee_B, \wedge_B, 0_B, 1_B, {}'^B)$ álgebras booleanas e $\varphi : A \to B$. Dizemos que φ é um homomorfismo sse:

$$\begin{array}{lll} \varphi(0_A) = 0_B & \varphi(x \vee_A y) = \varphi x \vee_B \varphi y & \varphi(x'^A) = (\varphi x)'^B \\ \varphi(1_A) = 1_B & \varphi(x \wedge_B y) = \varphi x \wedge_B \varphi y. & \end{array}$$

Dizemos que φ é um isomorfismo sse existe homomorfismo φ' tal que $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_A$ e $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_B$. Finalmente, A, B são homomórficos (isomórficos) sse existe homorfismo (isomorfismo) de A para B.

(18) **B2.** Enuncie e demonstre um critério de homomorfismo entre álgebras booleanas (basta ser pelo menos pouco «mais barato» que a definição—não procure achar o mais barato possível!)

ENUNCIADO.

Sejam A, B álgebras booleanas e $\varphi : A \to B$ tal que as primeiras duas colunas acima são satisfeitas. Logo φ é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Basta demonstrar que φ respeita os complementos, ou seja, que para todo $a \in A$, $\varphi(a'^A) = (\varphi a)'^B$. Seja $a \in A$. Temos:

$$x \wedge_A x'^A = 0_A \qquad\qquad x \vee_A x'^A = 1_A$$

e aplicando a φ em ambos os lados obtemos

$$\varphi(x \wedge_A x'^A) = \varphi 0_A \qquad\qquad \varphi(x \vee_A x'^A) = \varphi 1_A.$$

Pelas hipoteses que temos sobre φ chegamos em:

$$\varphi x \wedge_B \varphi(x'^A) = 0_B \qquad\qquad \varphi x \vee_B \varphi(x'^A) = 1_B.$$

Pela **L2** com $c := \varphi x$, $x := \varphi(x'^A)$, $y := (\varphi x)'^B$, temos a desejada $\varphi(x'^A) = (\varphi x)'^B$.

Só isso mesmo.