

(18) C

Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .

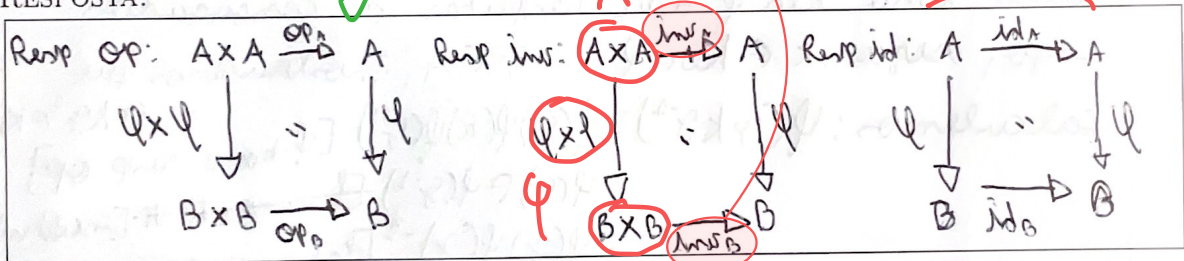
DEMONSTRAÇÃO.

isso é válido para qualquer função  $\varphi$ . (verifique!)

(24) D

(12) D1. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi: A \rightarrow B$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi: A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja  $a, a' \in A$  tal que  $\varphi(a)$~~  Type error! Aqui tu tá inferindo objetos (côde o verbo?). Inferimos proposições!

Seja  $a \in A$  logo  $\varphi(a)\varphi(a^{-1})$  pois  $\varphi$  resp  $\varphi$ .

logo  $\varphi(a a^{-1})$  pois  $\varphi$  resp  $\varphi$

logo  $\varphi(e_a) = e_B$ , então  $\varphi$  resp id

use ":" não faz sentido "," aqui.

E os inversos?

Teu leitor precisa <sup>(1)</sup> procurar no teu texto achar uns

objetos, <sup>(2)</sup> pensar em quais verbos precisa usar para transformá-los em proposições, <sup>(3)</sup> botá-las na ordem certa, <sup>(4)</sup> fazer a mesma coisa sobre justificativas, <sup>(5)</sup>...

(24) E

Sejam grupos  $A, B$  e homomorfismo  $\varphi: A \rightarrow B$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \varphi a = e_B\}$  é um subgrupo normal do  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiramente  $\ker \varphi \subseteq A$ . → precisa mostrar  $\ker \varphi$  habitado.

Vamos demonstrar que  $\ker \varphi \trianglelefteq A$ . Usando o one test

Seja  $k, k' \in \ker \varphi$ , mostraremos então que  $kk'^{-1} \in \ker \varphi$

$$\begin{aligned} \text{calculamos: } \varphi(kk'^{-1}) &= \varphi(k)\varphi(k'^{-1}) \quad [\varphi\text{-homo, resp op}] \\ &= \varphi(k)\varphi(k')^{-1} \quad [\varphi\text{-homo, resp inv}] \\ &= e e^{-1} \quad [\text{escolha de } k \text{ e } k'] \\ &= e \quad [\text{ide}] \end{aligned}$$

Logo  $\varphi(kk'^{-1}) \in \ker \varphi$ , então  $\ker \varphi \trianglelefteq A$  ✓

Mostraremos agora que  $\ker \varphi \trianglelefteq A$

Para isso  $\ker \varphi$  deve fechado sob ~~respetar~~ os conjugados.

Logo, seja  $k \in \ker \varphi$  e  $g \in A$ , mostraremos que  $gkg^{-1} \in \ker \varphi$

$$\begin{aligned} \text{calculamos: } \varphi(gkg^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(k)\varphi(g^{-1}) \quad [\varphi\text{-homo, resp op}] \\ &= \varphi(g)e\varphi(g^{-1}) \quad [\varphi\text{-homo, resp inv}] \\ &= \varphi(g)\varphi(g)^{-1} \quad [\varphi\text{-homo, resp inv}] \\ &= e \quad [\text{inv}] \end{aligned}$$

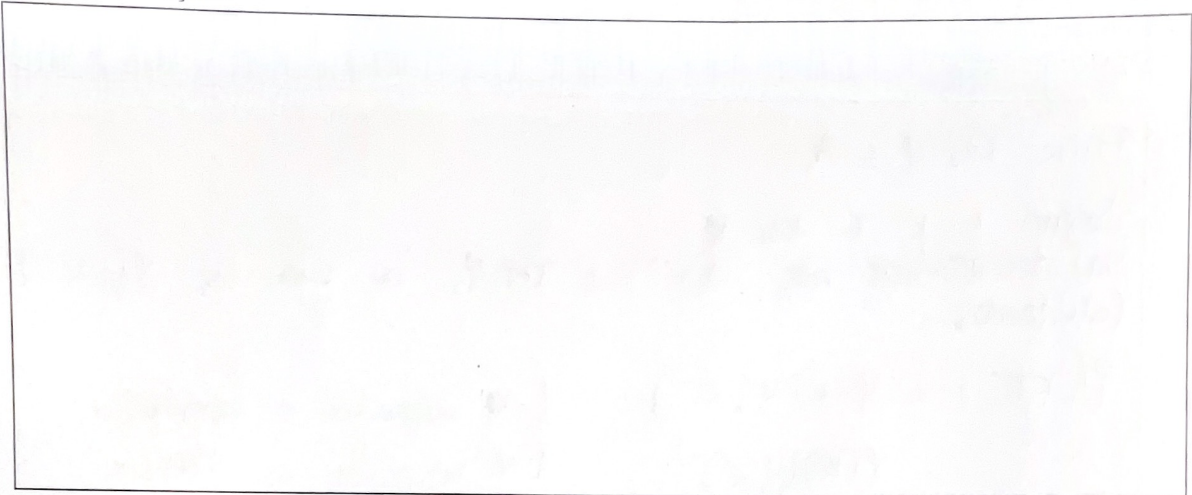
Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq A$ . ✓

Difícil acreditar que a mesma pessoa escreveu essas duas respostas (D2 & E).

Só isso mesmo.

(18) C

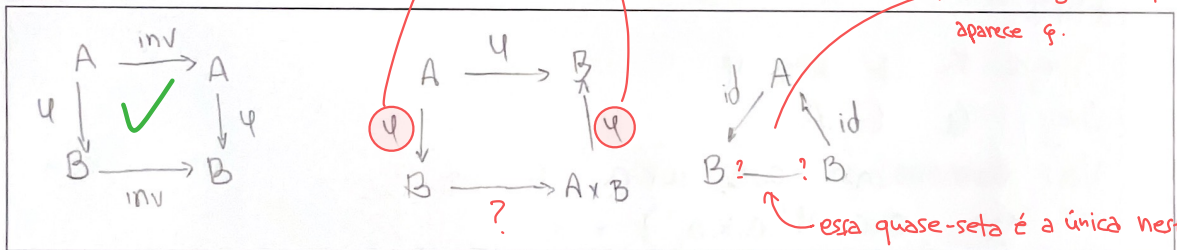
Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(24) D

(12) D1. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Desenhe três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

<p><math>\varphi</math> respeita a identidade:</p> <p>Calculamos:</p> $\varphi(e) = \varphi(ee) \quad (\text{id})$ $= \varphi(e)\varphi(e) \quad (\varphi \text{ resp op})$ <p>Logo, <math>\varphi(e) = e</math>. <span style="color: green;">(?)</span></p> <p style="text-align: center; color: green;">✓</p>	<p><math>\varphi</math> respeita os inversos:</p> <p>Seja <math>a \in A</math>.</p> <p>Vou demonstrar que <math>\varphi(a^{-1})\varphi a = e</math></p> <p>Calculamos:</p> $\varphi(a^{-1})\varphi a = \varphi(a^{-1}a) \quad (\varphi \text{ resp op})$ $= \varphi(e) \quad (\text{inv})$ $= e \quad (\varphi \text{ resp id})$ <p style="text-align: center; color: green;">✓</p>
---	---

(24) E

Sejam grupos  $A, B$  e homomorfismo  $\varphi: A \rightarrow B$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \varphi a = e_B\}$  é um subgrupo normal do  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Parte  $\ker \varphi \leq A$ : **faltou  $\ker \varphi$  habitado**

Sejam  $k, k' \in \ker \varphi$

Vou demonstrar que  $kk'^{-1} \in \ker \varphi$ , ou seja, que  $\varphi(kk'^{-1}) = e$

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi(kk'^{-1}) &= \varphi(k)\varphi(k'^{-1}) && (\varphi \text{ respeita a operação}) \\ &= \varphi(k)(\varphi k')^{-1} && (\varphi \text{ respeita os inversos}) \\ &= e(\varphi k)^{-1} && (\text{pela escolha de } k) \\ &= e e^{-1} && (\text{pela escolha de } k') \\ &= e\end{aligned}$$

Parte

Seja  $k \in \ker \varphi$

Seja  $a \in A$ .

Vou demonstrar que  $aka^{-1} \in \ker \varphi$ .

ou seja, que  $\varphi(aka^{-1}) = e$ .

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) \\ &= \varphi(a)e\varphi(a^{-1}) && (\text{pela escolha de } k) \\ &= \varphi(a)\varphi(a^{-1}) && (\text{id}) \\ &= \varphi(aa^{-1}) && (\varphi \text{ resp. op}) \\ &= \varphi(e) && (\text{inv}) \\ &= e && (\varphi \text{ resp id})\end{aligned}$$

Só isso mesmo.

(24) E

brutalmente redundante!

Sejam grupos  $A, B$  e homomorfismo  $\varphi: A \rightarrow B$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \varphi a = e_B\}$  é um subgrupo normal do  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiro demonstrarei que  $\ker \varphi \leq A$ . Pelo "one-test" preciso mostrar que  $(\forall m, n \in \ker \varphi) [mn^{-1} \in \ker \varphi]$ .

Sejam  ~~$x, y \in A$~~  ~~tg~~ ~~também~~  $x, y \in \ker \varphi$ .

Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(xy^{-1}) &= \varphi x \varphi(y^{-1}) && [\varphi \text{ resp. op}] \\ &= \varphi x (\varphi y)^{-1} && [\varphi \text{ resp. inv}] \\ &= e_B * e_B^{-1} && [\text{pela escolha de } x, y] \\ &= \underline{e_B} && [\text{inv-id, id}] \end{aligned}$$

Agora, para mostrar que  $\ker \varphi \trianglelefteq A$ , mostraremos que  $\ker \varphi$  é fechado nos conjugados. Ou seja,  $(\forall a \in A) (\exists k \in \ker \varphi) [k a k^{-1} \in \ker \varphi]$ .

(12) A

Escolha exatamente um dos A1, A2.

(9) A1. Sejam  $G$  grupo e  $a, b \in G$ .

Demonstre pelos axiomas que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

(12) A2. Sejam  $G$  grupo e  $H \subseteq G$  tais que  $H$  habitado e para quaisquer  $a, b \in H$ ,  $ab^{-1} \in H$ .

Demonstre:  $H \leq G$ .

DEMONSTRAÇÃO DE A2.

~~Como Sejam  $a, u \in H$~~   
~~como  $ab^{-1} \in H$ , logo  $a \in H$  e  $b^{-1} \in H$  e  $ba^{-1} \in H$ , logo~~  
~~logo,  $ab^{-1} \in H$  e  $(ba^{-1})^{-1} \in H$~~   
~~logo,  $(a^{-1}u^{-1})(ba^{-1})^{-1} \in H$~~   
Calculando  
 $(a^{-1}u^{-1})(ba^{-1})^{-1} = (a^{-1}u^{-1})(au^{-1})$  [Lema A1]  
 $\stackrel{(*)}{=} a^{-1}u^{-1}au^{-1}$   
logo,  $H$  é  $\ast$ -fechado.  $(\#)$  → (ausente)  
logo, por  $(\#)$  e Lema A1,  $H$  é  $\text{inv}$ -fechado  
Logo, por  $(\#)$ ,  $H$  é  $e$ -fechado

isso não é nem homomorfo com 'b'.

Não dá para entender nem a intenção...

(18) B

Sejam  $G$  grupo e  $\mathcal{H}$  família habitada de subgrupos de  $G$ . Demonstre que  $\bigcap \mathcal{H} \leq G$ .

DEMONSTRAÇÃO.

[Empty box for the proof of (18) B]

(18) C

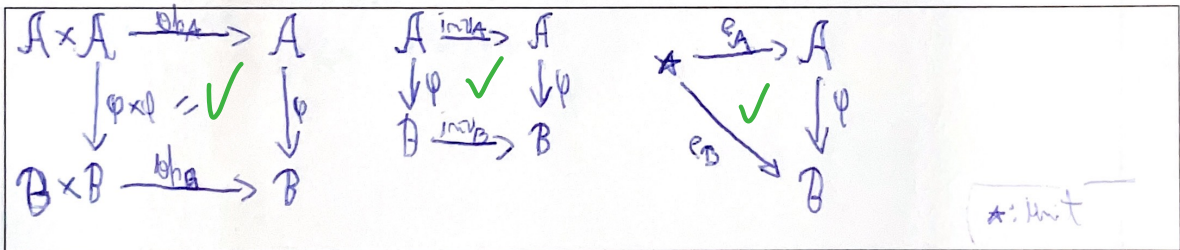
Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(24) D

(12) D1. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  grupos e  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  grupos e  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $\mathcal{A}$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

$$\forall a, a' \in \mathcal{A} \quad [\varphi(a *_{\mathcal{A}} a') = \varphi a *_{\mathcal{B}} \varphi a']$$

DEMONSTRAÇÃO.

~~Como  $\varphi$  respeita  $*_{\mathcal{A}}$ , logo~~  
 Sejam  $a, a' \in \mathcal{A}$   
~~Logo, como  $\varphi$  respeita  $*_{\mathcal{A}}$ , logo  $\varphi(a *_{\mathcal{A}} a') = \varphi a *_{\mathcal{B}} \varphi a'$  (I)~~  
 como  $\varphi$  respeita  $*_{\mathcal{A}}$ , logo  $\varphi(a *_{\mathcal{A}} a') = \varphi a *_{\mathcal{B}} \varphi a'$  (I)  
 logo, como  $\varphi$  respeita  $*_{\mathcal{A}}$ , logo  $\varphi(a *_{\mathcal{A}} a') = \varphi a *_{\mathcal{B}} \varphi a'$   
 e...?

Escreva algo para teu leitor saber pelo menos tua intenção!

typo?

op-ferchados  $(\forall a, b \in G) [ab \in H]$

(12) A

Escolha exatamente um dos A1, A2.

(9) A1. Sejam  $G$  grupo e  $a, b \in G$ .

Demonstre pelos axiomas que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

(12) A2. Sejam  $G$  grupo e  $H \subseteq G$  tais que  $H$  habitado e para quaisquer  $a, b \in H$ ,  $ab^{-1} \in H$ .

Demonstre:  $H \leq G$ .

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Vou mostrar que  $H \leq G$ . Para isso, resta mostrar que  $H$  é id-ferchado, inv-ferchado e op-ferchado. ✓

[id-ferchado] Seja  $h \in H$ . Daí, e pela hipótese de que  $(\forall a, b \in H) [ab^{-1} \in H]$ , com  $a := h$  e  $b := h$ , temos que  $hh^{-1} \in H$ .

Logo, pela definição de inverso,  $e \in H$ . ✓

[inv-ferchado] Seja  $h \in H$ . Pela hipótese de que  $(\forall a, b \in H) [ab^{-1} \in H]$ , com  $a := e$  e  $b := h$ , temos que  $eh^{-1} \in H$ . Logo, pela definição de identidade,  $h^{-1} \in H$ . ✓

[op-ferchado] Sejam  $a, b \in H$ . Como  $H$  é inv-ferchado,  $b^{-1} \in H$ . Logo, pela hipótese de que  $(\forall a, b \in H) [ab^{-1} \in H]$ , com

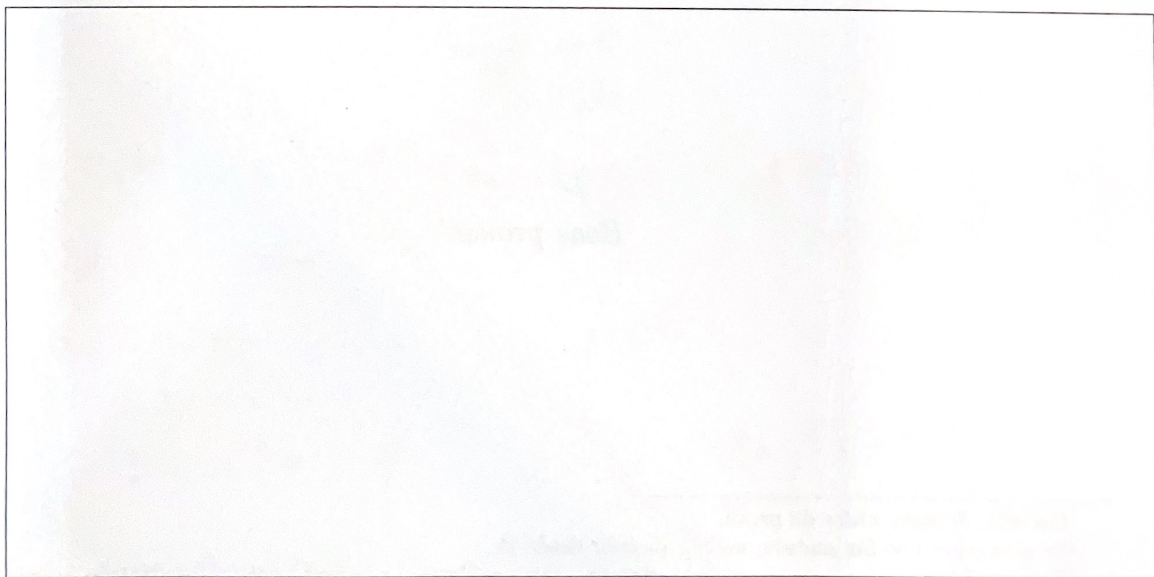
$a := a$  e  $b := b^{-1}$ , temos que  $a(b^{-1})^{-1} \in H$ . Daí, por inv-inv  $ab \in H$ . ✓

(18) B

(nada no "Lemmata")

Sejam  $G$  grupo e  $\mathcal{H}$  família habitada de subgrupos de  $G$ . Demonstre que  $\bigcap \mathcal{H} \leq G$ .

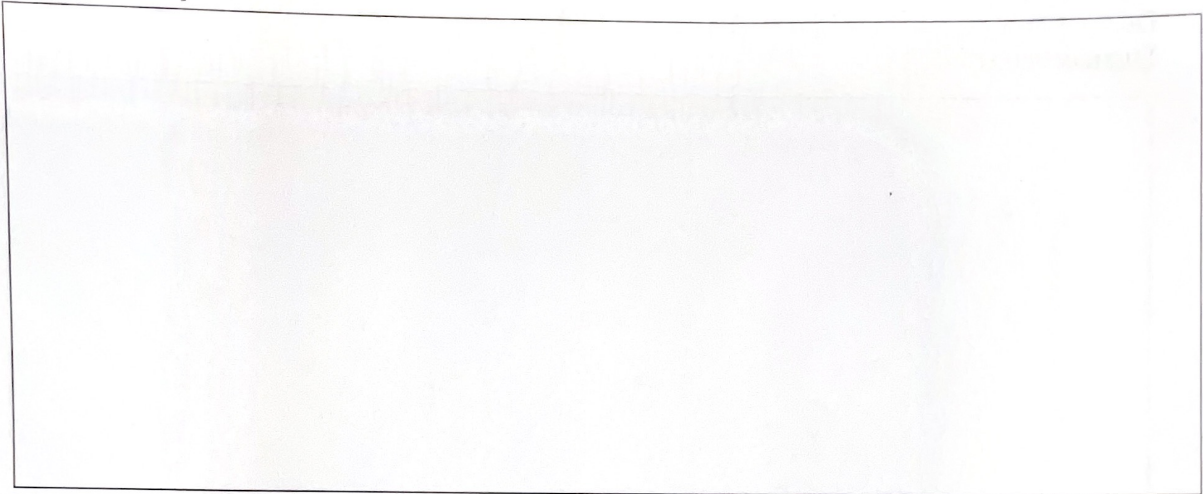
DEMONSTRAÇÃO.





(18) C

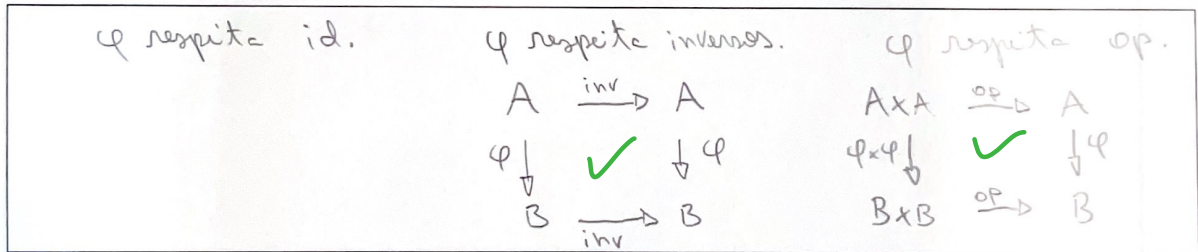
Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(24) D

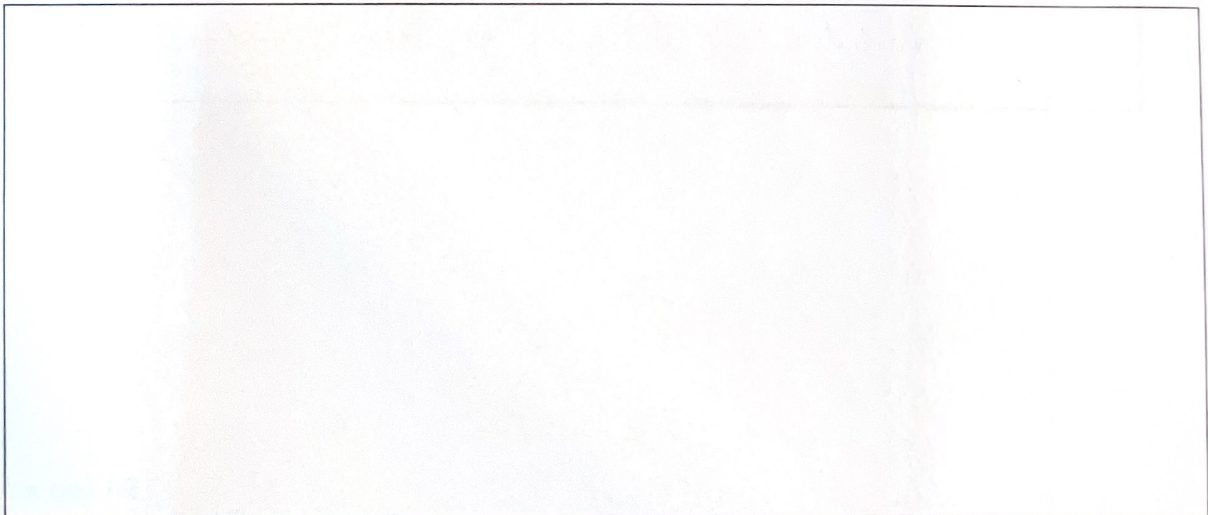
(12) D1. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  grupos e  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  grupos e  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $\mathcal{A}$ .  
Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.



(12) **A**

Escolha **exatamente um** dos **A1, A2**.

(9) **A1.** Sejam  $G$  grupo e  $a, b \in G$ .

Demonstre **pelos axiomas** que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

(12) **A2.** Sejam  $G$  grupo e  $H \subseteq G$  tais que  $H$  habitado e para quaisquer  $a, b \in H$ ,  $ab^{-1} \in H$ .

Demonstre:  $H \leq G$ .

DEMONSTRAÇÃO DE **A1**.

**Basta** demonstrar  $b^{-1}a^{-1}$  **e** ~~inverso~~ de  $ab$ .

vale:

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= (a(bb^{-1}))a^{-1} && [G \text{ é } (*)\text{-assoc}] \\ &= (a \cdot e)a^{-1} && [inv] \\ &= aa^{-1} && [id] \\ &= e. && [inv]\end{aligned}$$

precisa demonstrar uns  
teoreminhas antes!

(18) **B**

Sejam  $G$  grupo e  $\mathcal{H}$  família habitada de subgrupos de  $G$ . Demonstre que  $\bigcap \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ .

DEMONSTRAÇÃO.



(18) C

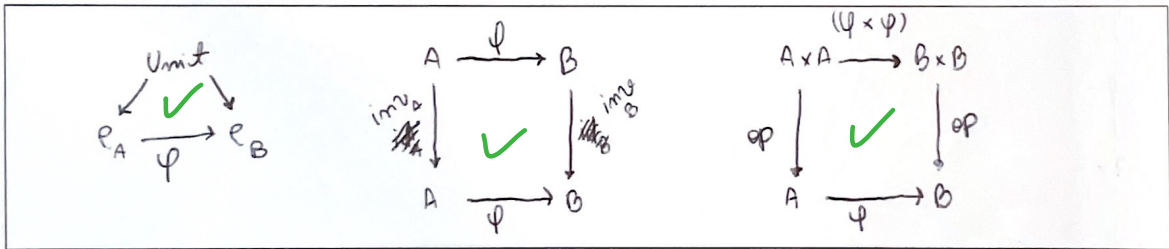
Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(24) D

(12) D1. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

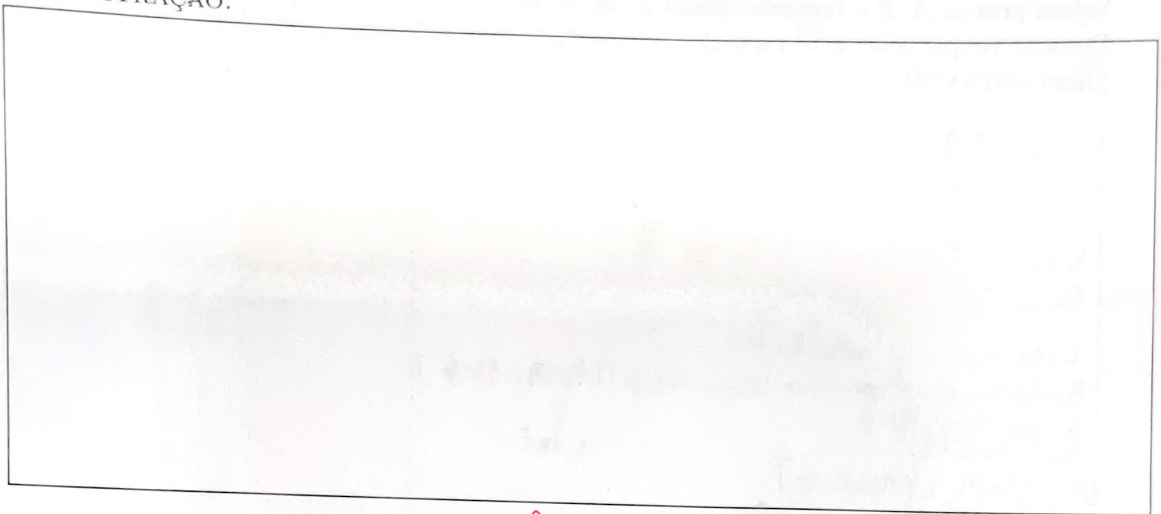
DEMONSTRAÇÃO.

$\varphi$  respeita identidade:  $\varphi e_A = e_B$   
Basta demonstrar que  $(\varphi e_A)(\varphi e_A)^{-1} = \varphi e_A$ .  
Temos  $(\varphi e_A)(\varphi e_A)^{-1} = e_B$ . [inv<sub>B</sub>]  
**cadê?**

$\varphi$  respeita inverso:  $(\forall a : A) [\varphi a^{-1}] = (\varphi a)^{-1}$   
Seja  $a : A$ .  
Basta demonstrar que  $\varphi a^{-1}$  é o inverso de  $\varphi a$ .  
calc:  
 $\varphi(a)(\varphi a^{-1}) = \varphi(aa^{-1})$  [φ resp op]  
 $= \varphi(e_A)$  [inv<sub>A</sub>]  
 $= e_B$  [φ resp id]

(18) C

Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
DEMONSTRAÇÃO.

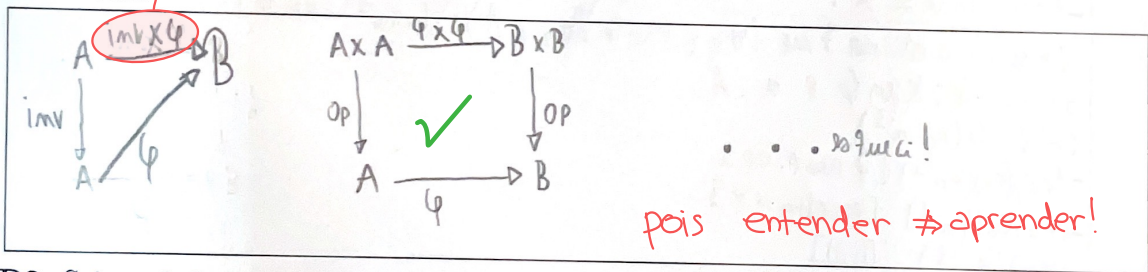


(24) D

qual o tipo dessa função?

(12) D1. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ .  
Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam  $A, B : \text{Grp}$ .  
Seja  $\varphi : A \rightarrow B$  t.f.  $\varphi$  resp. a op. de  $A$ .  
Vou demonstrar que  $\varphi$  é um homomorfismo.  
 Sejam  $a, b : A$ .  $\rightarrow$  Teu alvo tem a forma  $(\forall a, b \in G) [\dots] ? ? !$   
 Calc:  $\varphi(ab)$   
 = ... faltou intuiçãõ!  
 ... Faltou procurar receber feedback das tuas tentativas!

$$\varphi(ab) = (\varphi a) \times (\varphi b)$$

(24) E

Sejam grupos  $A, B$  e homomorfismo  $\varphi: A \rightarrow B$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \varphi a = e_B\}$  é um subgrupo normal do  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi: A \rightarrow B$  um homomorfismo.

Vou mostrar que  $\ker \varphi \leq A$ . [Vou mostrar que  $\ker \varphi$  é um subgrupo de  $A$ .]  
Como  $A$  é grupo, logo  $e_A \in A$ .

NS.  $\leftarrow$  Logo  $\ker \varphi$  é habitado.

Basta demonstrar que  $(\forall a, b \in \ker \varphi) [\varphi(a^{-1}b) \in \ker \varphi]$ .

Sejam  $a, b \in \ker \varphi$ .

Calc:  $\varphi(a^{-1}b)$

$= (\varphi a)^{-1} (\varphi b)$  [ $\varphi$  resp. op.]

$= e_B (\varphi b)$  [ $\varphi$  resp. inv.]

$= e_B (\varphi b)$  [escolha de  $a$ ]

$= e_B e_B^{-1}$  [escolha de  $b$ ]

$= e_B$  [(inv.)] ✓

~~one-est.~~

rascunho

Logo  $\ker \varphi \leq A$ .

Vou mostrar que  $(\forall x \in \ker \varphi) (\forall a \in A) [\varphi(xax^{-1}) \in \ker \varphi]$

Sejam  $x \in \ker \varphi$  e  $a \in A$ .

Calc:  $\varphi(xax^{-1})$

$= (\varphi x) (\varphi a) (\varphi x^{-1})$  [ $\varphi$  resp. op.]

$= e_B (\varphi a) e_B$  [escolha de  $x$ ]

$= (\varphi a) (\varphi a^{-1})$  [(id.)]

$= (\varphi a) (\varphi a)^{-1}$  [ $\varphi$  resp. inv.]

$= e_B$  [(inv.)] ✓

Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq A$ .

Q "One-test"

Seja  $G: \text{Grp.}$

Seja  $H: \text{set.}$

SI  $H \subseteq G$

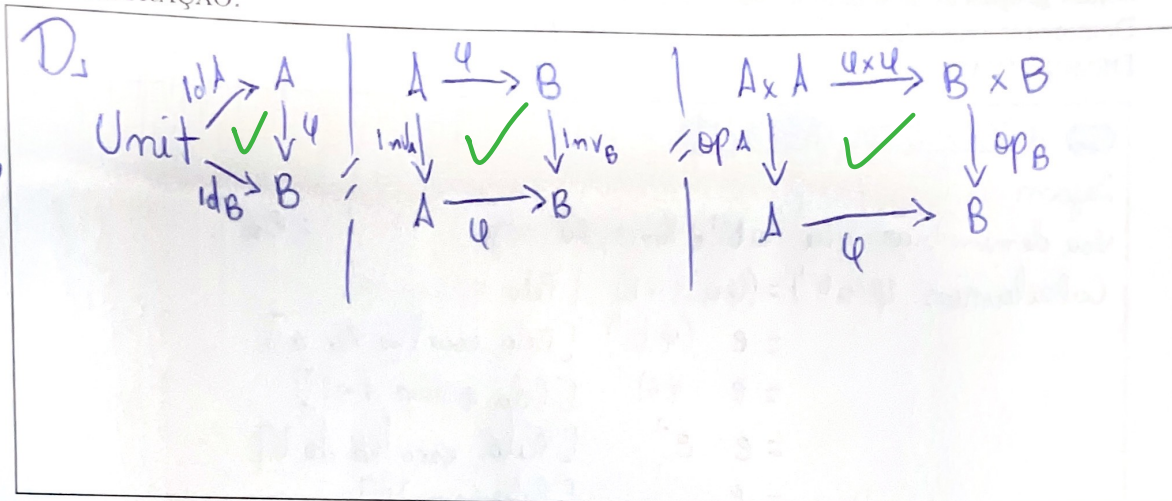
SI  $H$  habitado

SI  $(\forall a, b: H) [ab^{-1} \in H]$

Então  $H \leq G$ .

18)  $\mathbb{D}$

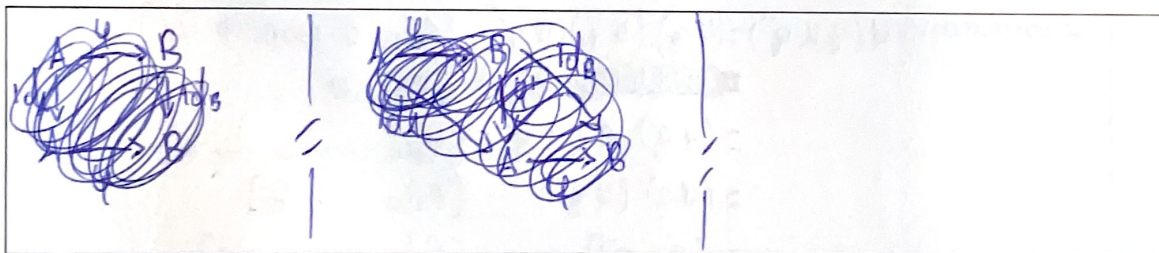
Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
 DEMONSTRAÇÃO.



(24)  $\mathbb{D}$

(12)  $\mathbb{D1}$ . Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12)  $\mathbb{D2}$ . Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Vou demonstrar que  $\varphi$  respeita a id. ✓  
 Calculamos:  $\varphi(ee) = \varphi e$  [Pela (Id)] ✓  
 $\varphi(ee) = (\varphi e)(\varphi e)$  [Pela  $\varphi$  resp. op.] ✓  
 Logo  $\varphi e = (\varphi e)(\varphi e)$  ✓  
 Logo  $\varphi e = e_B$ . [Pela res. única]. ✓  
 Vou demonstrar que  $\varphi$  respeita a inv. ✓  
 Seja  $x \in A$ . Basta demonstrar que  $(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = e_B$  [Pela res. única] ✓  
 Calculamos:  $(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = \varphi(xx^{-1})$  ✓ [Pela  $\varphi$  resp. op.]  
 $= \varphi e_A$  ✓ [Pela (id)A]  
 $= e_B$  ✓ [Pela  $\varphi$  resp. Id].

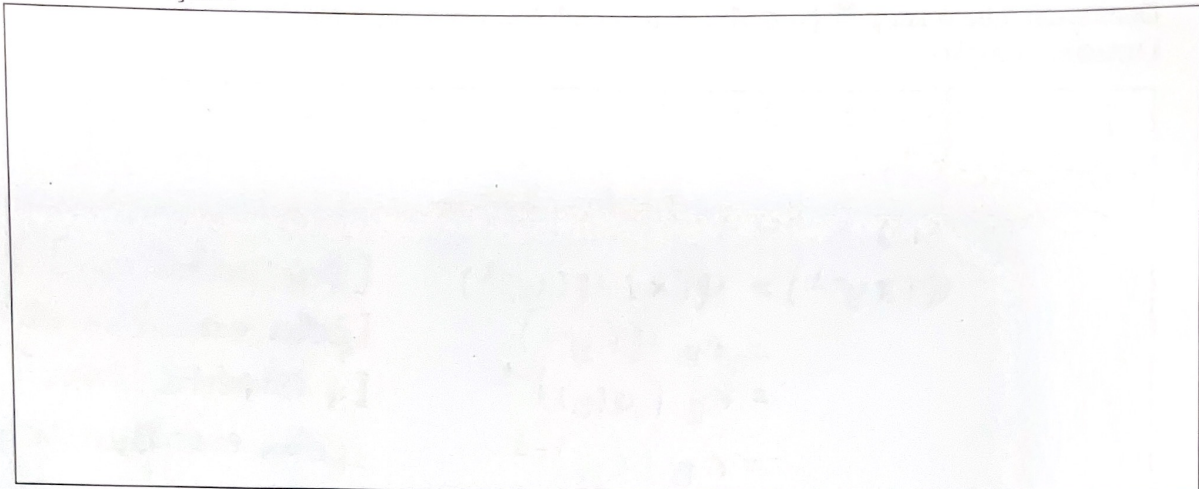




18) C

Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .

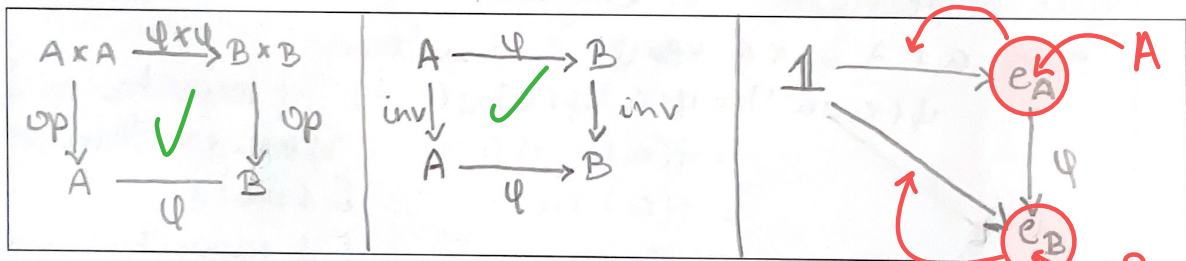
DEMONSTRAÇÃO.



(24) D

(12) D1. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que  $\varphi$  é um homomorfismo.

RESPOSTA.



(12) D2. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

Precisamos mostrar que  $\varphi$  respeita a identidade e os inversos. ✓  
Calculamos:  
•  $\varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e)$  ✓ [  $\varphi$  respeita op. ]  
•  $\varphi(ee) = \varphi(e)$  ✓ [ id ]  
Logo,  $\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(e)$ , e pelo Lema da Identidade Barata, temos  $\varphi(e) = e$ , identidade do  $B$ . ✓  
Seja  $a \in A$ . Calculamos:  
•  $\varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$  [  $\varphi$  respeita op ]  
✓ •  $\varphi(a^{-1}a) = \varphi(e)$  [ inv ]  
=  $e$  [  $\varphi$  respeita id ]

Logo,  $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = e$ , e pelo Lema dos Inversos Baratos, temos que  $\varphi(a^{-1})$  é o inverso de  $\varphi(a)$ .

(24) E

Sejam grupos  $A, B$  e homomorfismo  $\varphi: A \rightarrow B$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \varphi a = e_B\}$  é um subgrupo normal do  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Demonstremos que é um subgrupo, pelo critério "one-test". **HABITADO?**

Sejam  $x, y \in \ker \varphi$ . Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(xy^{-1}) &= \varphi(x)\varphi(y^{-1}) && [\varphi \text{ respeita op.}] \\ &= e_B \varphi(y^{-1}) && [\text{pela escolha de } x] \\ &= e_B (\varphi(y))^{-1} && [\varphi \text{ respeita inv.}] \\ &= e_B (e_B)^{-1} && [\text{pela escolha de } y] \\ &= e_B e_B && [(inv-id)] \\ &= e_B \in \ker \varphi && [(id)] \end{aligned}$$

Logo,  $xy^{-1} \in \ker \varphi$ , e  $\ker \varphi \leq A$ . ✓

Mostremos que é subgrupo normal, demonstrando que é fechado sob conjugadas.

Seja  $a \in A$  e  $k \in \ker \varphi$ . Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) && [\varphi \text{ respeita op.}] \\ &= \varphi(a)e_B\varphi(a^{-1}) && [\text{pela escolha de } k] \\ &= \varphi(a)\varphi(a^{-1}) && [(id)] \\ &= \varphi(a)(\varphi(a))^{-1} && [\varphi \text{ respeita inv.}] \\ &= e_B && [(inv)] \end{aligned}$$

Logo,  $aka^{-1} \in \ker \varphi$ , e  $\ker \varphi \triangleleft A$ . ✓

(12) A

Escolha exatamente um dos A1, A2.

- (9) **A1.** Sejam  $G$  grupo e  $a, b \in G$ .  
Demonstre pelos axiomas que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
- (12) **A2.** Sejam  $G$  grupo e  $H \subseteq G$  tais que  $H$  habitado e para quaisquer  $a, b \in H$ ,  $ab^{-1} \in H$ .  
Demonstre:  $H \leq G$ .

DEMONSTRAÇÃO DE A1.

Sejam  $G$  grupo e  $a, b \in G$ . Demonstraremos que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

Quando? ☹️

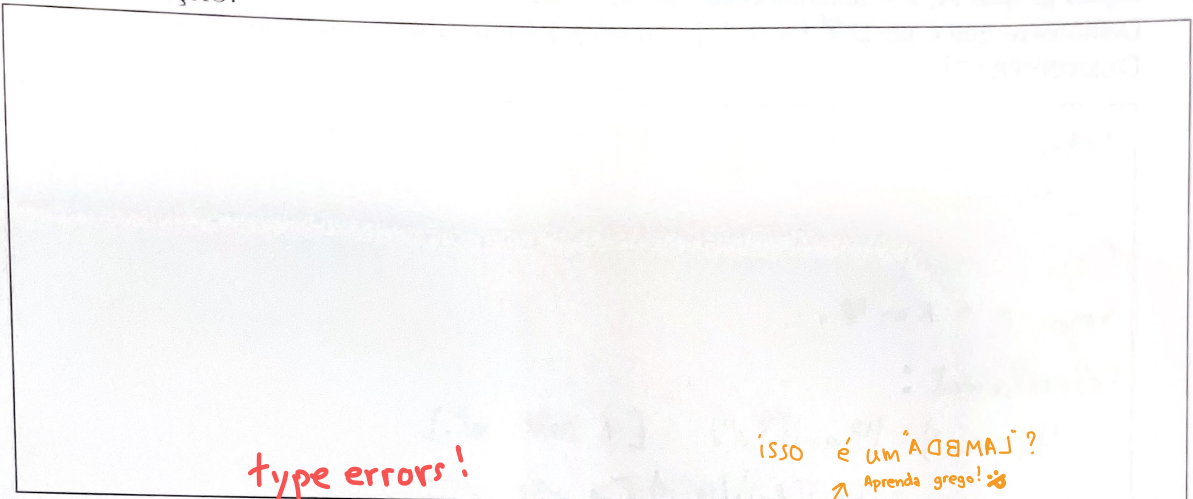
(18) B

Sejam  $G$  grupo e  $\mathcal{H}$  família habitada de subgrupos de  $G$ . Demonstre que  $\bigcap \mathcal{H} \leq G$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(18) C

Sejam  $G$  grupo e  $H, K \leq G$  tais que  $HK \leq G$ . Demonstre:  $HK = KH$ .  
DEMONSTRAÇÃO.

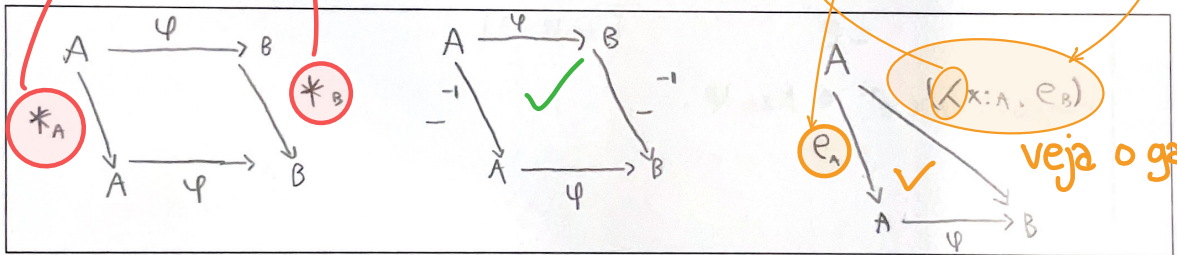


type errors!

isso é um "ΑΩΒΜΑΛ"?  
Aprenda grego! ☹

(24) D

(12) D1. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$ . Desenhe três diagramas cuja comutatividade signifique que  $\varphi$  é um homomorfismo.  
RESPOSTA.



eu entendo (isso) como a  $\lambda x.e_A$ . Mas depois de ver (isso)

veja o gabarito!

(12) D2. Sejam  $A, B$  grupos e  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que  $\varphi$  respeita a operação binária do  $A$ . Demonstre que  $\varphi$  é um homomorfismo.  
DEMONSTRAÇÃO.

<p>-- Parte <math>\varphi</math> respeita <math>1_A</math>          Seja <math>a \in A</math>.          Temos <math>\varphi(ae) = \varphi a</math>. [IdA]          Temos <math>\varphi(ae) = (\varphi a)(\varphi e)</math>. [<math>\varphi</math> resp. op]          Logo <math>\varphi a = (\varphi a)(\varphi e)</math>.          Portanto <math>\varphi e = e</math> [id-lem].</p> <p style="text-align: center;">✓</p>	<p>-- <math>\varphi</math> respeita inverso          Seja <math>a \in A</math>.          Basta demonstrar que <math>(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = e</math>.          [ime-lem B]          Calculamos:  <math>(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = \varphi(aa^{-1})</math> [<math>\varphi</math> resp. op]  <math>= \varphi e</math> [ime-A]  <math>= e</math>. [<math>\varphi</math> resp. Id]</p> <p style="text-align: center;">✓</p> <p style="text-align: right;">□</p>
--	--

(24) E

Sejam grupos  $A, B$  e homomorfismo  $\varphi: A \rightarrow B$ .

Demonstre que o  $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \varphi a = e_B\}$  é um subgrupo normal do  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO.

Basta demonstrar que  $\ker \varphi$  é conjugação fechada.  
[one-est]

Seja  $a \in A$

Seja  $x \in \ker \varphi$ .

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi(axa^{-1}) &= (\varphi ax)(\varphi a^{-1}) \quad [\varphi \text{ resp. op.}] \\ &= ((\varphi a)(\varphi x))(\varphi a^{-1}) \quad [\varphi \text{ resp. op.}] \\ &= ((\varphi a)e)(\varphi a^{-1}) \quad [\text{escolha de } x] \\ &= (\varphi a)(\varphi a^{-1}) \quad [1_{\text{B}}] \\ &= (\varphi a)(\varphi a)^{-1} \quad [\varphi \text{ resp. inv}] \\ &= e \quad [\text{inv} - \text{B}]\end{aligned}$$

Logo  $axa^{-1} \in \ker \varphi$ .

Esqueceu o  $\ker \varphi \leq A!$



Só isso mesmo.