(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.

DEMONSTRAÇÃO.

Isso é válido para qualquer função φ. (Verifique!)

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.

RESPOSTA.

Resp op:
$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "op_A"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \times B \arrow[r, "op_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Resp inv:
$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "inv_A"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \times B \arrow[r, "inv_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Resp id:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

inv é unária!

A

φ

B

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja $a, a' \in A$ Aq~~ $\varphi(a)$ Type error! Aqui tu tá inferindo objetos (cadê o verbo?!). Inferimos proposições!

Seja $a \in A$, logo $\varphi(a)\varphi(a^{-1})$ pois φ resp op.

logo $\varphi(aa^{-1})$ pois φ resp op

logo $\varphi(e_a) = e_B$, então φ resp id

use "." não faz sentido "," aqui.

E os inversos?

Teu leitor precisa (1) procurar no teu texto achar uns objetos, (2) pensar em quais verbos precisa usar para transformá-los em proposições, (3) botá-las na ordem certa, (4) fazer a mesma coisa sobre justificativas, (5) ..., ...

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = e_B \,\}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente $\ker\varphi \subseteq A$.

→ precisa mostrar $\ker\varphi$ habitado.

Vamos demonstrar que $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$. Usando o one test

Seja $k, k' \in \ker\varphi$, mostraremos então que $kk'^{-1} \in \ker\varphi$

calculemos: $\varphi(kk'^{-1}) = \varphi(k)\varphi(k'^{-1})$ [φ-homo, resp op]

$= \varphi(k)\varphi(k')^{-1}$ [φ-homo, resp inv]

$= e\, e^{-1}$ [escolha do k e k']

$= e$ [id]

Logo $\varphi(kk'^{-1}) \in \ker\varphi$, então $\ker\varphi \leq \mathcal{A}$

Mostraremos agora que $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$

Para isso $\ker\varphi$ deve ~~respeitar~~ fechado sob os conjugados.

Logo, seja $k \in \ker\varphi$ e $g \in A$, mostraremos que $gkg^{-1} \in \ker\varphi$

calculemos: $\varphi(gkg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(k)\varphi(g^{-1})$ [φ-homo, resp op]

$= \varphi(g)\, e\, \varphi(g^{-1})$ ~~[φ-homo, resp]~~ [escolha de k]

$= \varphi(g)\varphi(g)^{-1}$ [φ-homo, resp inv]

$= e$ [inv]

Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

Difícil acreditar que a mesma pessoa escreveu essas duas respostas (D2 & E).

Só isso mesmo.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **D**

incosistência nos tipos

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

nesse diagrama sequer aparece φ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{inv}"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\checkmark"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{inv}"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ B \arrow[r, "?"'] & A \times B \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] & \\ B & ? \text{---} ? & B \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

essa quase-seta é a única neste diagrama com chances de ter rótulo "id".

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

φ respeita a identidade:
Calculamos:
$\varphi(e) = \varphi(ee)$ (id)
$= \varphi(e)\varphi(e)$ (φ resp op)
Logo, $\varphi(e) = e$. (?)

✓

φ respeita os inversos:
Seja $a \in A$.
Vou demonstrar que $\varphi(a^{-1})\varphi a = e$
Calculamos:
$\varphi(a^{-1})(\varphi a) = \varphi(a^{-1}a)$ (φ resp. op)
$= \varphi(e)$ (inv)
$= e$ (φ resp id)

✓

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = e_B \}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
DEMONSTRAÇÃO.

Parte $\ker\varphi \leq A$: faltou $\ker\varphi$ habitado

Sejam $k, k' \in \ker\varphi$
Vou demonstrar que $kk'^{-1} \in \ker\varphi$, ou seja, que $\varphi(kk'^{-1}) = e$
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(kk'^{-1}) &= \varphi(k)\varphi(k'^{-1}) && (\varphi \text{ respeita a operação}) \\
&= \varphi(k)(\varphi k')^{-1} && (\varphi \text{ respeita os inversos}) \\
&= e\,(\varphi k')^{-1} && (\text{pela escolha de } k) \\
&= e\,e^{-1} && (\text{pela escolha de } k') \\
&= e
\end{aligned}
$$

Parte

Seja $k \in \ker\varphi$
Seja $a \in A$.
Vou demonstrar que $aka^{-1} \in \ker\varphi$,
ou seja, que $\varphi(aka^{-1}) = e$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) \\
&= \varphi(a)\, e\, \varphi(a^{-1}) && (\text{pela escolha de } k) \\
&= \varphi(a)\varphi(a^{-1}) && (\text{id}) \\
&= \varphi(aa^{-1}) && (\varphi \text{ resp. op}) \\
&= \varphi(e) && (\text{inv}) \\
&= e && (\varphi \text{ resp id})
\end{aligned}
$$

Só isso mesmo.

(24) **E**

brutalmente redundante!

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = e_B \,\}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
DEMONSTRAÇÃO.

Primeiro demonstrarei que $\ker\varphi \leq A$. Pelo "one-test" preciso mostrar que $(\forall m, n \in \ker\varphi)[mn^{-1} \in \ker\varphi]$.

...

Sejam ~~x, y ∈ A t.q. também~~ $x, y \in \ker\varphi$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(xy^{-1}) &= \varphi x\, \varphi(y^{-1}) && [\varphi \text{ resp. op}] \\
&= \varphi x\, (\varphi y)^{-1} && [\varphi \text{ resp. inv}] \\
&= e_B * e_B^{-1} && [\text{pela escolha de } x, y] \\
&= e_B && [\text{inv-id, id}]
\end{aligned}$$

Agora, para mostrar que $\ker\varphi \trianglelefteq A$, mostraremos que $\ker\varphi$ é fechado nos conjugados. Ou seja, $(\forall a \in A)(\forall k \in \ker\varphi)[kak^{-1} \in \ker\varphi]$.

Só isso mesmo.

(12) **A**

Escolha **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(9) **A1.** Sejam G grupo e $a, b \in G$.
Demonstre pelos axiomas que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(12) **A2.** Sejam G grupo e $H \subseteq G$ tais que H habitado e para quaisquer $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.
Demonstre: $H \leq G$.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

~~Como~~ Sejam $a, b \in H$

~~como $ab^{-1} \in H$, logo~~ ~~$\in H$ logo~~ e $ba^{-1} \in H$, logo

Logo, $ab^{-1} \in H$ e $ba^{-1} \in H$ (I)

Não dá para entender nem a intenção...

isso não é nem homomorfo com 'b'.

Logo, $(ab^{-1})(ba^{-1})^{-1} \in H$

Calculamos

$(ab^{-1})(ba^{-1})^{-1} = (ab^{-1})(ab^{-1})$ [Lema A1]

Logo, H é $*$-fechado. (II)

(ausente)

Logo, por (I) e lema A1, H é inv-fechado

Logo, por (II), H é e-fechado

(18) **B**

Sejam G grupo e $\mathcal{H}$ família habitada de subgrupos de G. Demonstre que $\bigcap \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "bin_A"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] \arrow[dr, phantom, "= \checkmark"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \times B \arrow[r, "bin_B"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "inv_A"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\checkmark"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "inv_B"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[r, "e_A"] \arrow[dr, "e_B"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, phantom, "\checkmark"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$\star$: Unit

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$.
Demonstre que φ é um homomorfismo. $(\forall a, a' \in A)\,[\varphi(a *_A a') = \varphi a *_B \varphi a']$
DEMONSTRAÇÃO.

~~Como φ respeita $*_A$, logo~~

~~Sejam $a, a' \in A$~~

~~Logo, Como φ respeita $*_A$, logo $(\forall a \in A)\,[\varphi(e_A *_A a) = \varphi e_A *_B \varphi a]$~~ (I)

~~como φ respeita~~ Seja $a \in A$

Escreva algo para teu leitor saber pelo menos tua intenção!

"typo"?

como φ respeita $*_A$, logo $\varphi(e_A *_A \varphi a) = \varphi e_A *_B \varphi a$ (I)

~~logo~~ como φ respeita $*_A$, logo $\varphi(a *_A a^{-1}) = \varphi a *_B \varphi a^{-1}$

e...?

op-fechado $(\forall a,b\in G)[ab\in H]$

(12) **A**

Escolha **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(9) **A1.** Sejam G grupo e $a,b\in G$.
Demonstre pelos axiomas que $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

(12) **A2.** Sejam G grupo e $H\subseteq G$ tais que H habitado e para quaisquer $a,b\in H$, $ab^{-1}\in H$.
Demonstre: $H\le G$.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Vou mostrar que $H\le G$. Para isso, resta mostrar que H é id-fechado, inv-fechado e op-fechado.

[id-fechado] Seja $h\in H$. Daí, e pela hipótese de que $(\forall a,b\in H)[ab^{-1}\in H]$, com $a:=h$ e $b:=h$, temos que $hh^{-1}\in H$. Logo, pela definição de inverso, $e\in H$.

[inv-fechado] Seja $h\in H$. Pela hip. de que $(\forall a,b\in H)[ab^{-1}\in H]$, com $a:=e$ e $b:=h$, temos que $eh^{-1}\in H$. Logo, pela definição de identidade, $h^{-1}\in H$.

[op-fechado] Sejam $a,b\in H$. Como H é inv-fechado, $b^{-1}\in H$. Logo, pela hip. de que $(\forall a,b\in H)[ab^{-1}\in H]$, com $a:=a$ e $b:=b^{-1}$, temos que $a(b^{-1})^{-1}\in H$. Daí, por inv-inv, $ab\in H$. ∎

(nada no "Lemmata")

(18) **B**

Sejam G grupo e $\mathcal{H}$ família habitada de subgrupos de G. Demonstre que $\bigcap\mathcal{H}\le\mathcal{G}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

φ respeita id.

φ respeita inversos.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "inv"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "inv"'] & B \end{tikzcd}$$

φ respeita op.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "op"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \times B \arrow[r, "op"] & B \end{tikzcd}$$

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **A**

Escolha **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(9) **A1.** Sejam G grupo e $a, b \in G$.
Demonstre $\boxed{\text{pelos axiomas}}$ que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(12) **A2.** Sejam G grupo e $H \subseteq G$ tais que H habitado e para quaisquer $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.
Demonstre: $H \leq G$.

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

$\boxed{\text{Basta}}$ demonstrar $b^{-1}a^{-1}$ $\boxed{\text{é}}$ inverso de ab.

Calc:

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= (a(bb^{-1}))a^{-1} && [G \text{ é } (*)\text{-ass}] \\ &= (a \cdot e)a^{-1} && [\text{inv}] \\ &= aa^{-1} && [\text{id}] \\ &= e. && [\text{inv}] \end{aligned}$$

■

precisa demonstrar uns teoreminhas antes!

(18) **B**

Sejam G grupo e $\mathcal{H}$ família habitada de subgrupos de G. Demonstre que $\bigcap \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Unit} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ e_A \arrow[rr, "\varphi"'] & & e_B \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{inv}_A"'] & B \arrow[d, "\mathrm{inv}_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "(\varphi \times \varphi)"] \arrow[d, "\mathrm{op}"'] & B \times B \arrow[d, "\mathrm{op}"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

$\underline{\varphi \text{ respeita identidade}}$: $\varphi e_A = e_B$
Basta demonstrar que $(\varphi e_A)(\varphi e_A)^{-1} = \varphi e_A$.
Temos $(\varphi e_A)(\varphi e_A)^{-1} = e_B$. $[\mathrm{inv}_B]$

cadê?

$\underline{\varphi \text{ respeita inverso}}$: $(\forall a : A)\,[\boxed{\varphi a^{-1}} = (\varphi a)^{-1}]$

deves ajudar com parenteses aqui...

Seja $a : A$.
Basta demonstrar que $\boxed{\varphi a^{-1}}$ é o inverso de φa.
Calc:
$$\begin{aligned} \varphi(a)(\varphi a^{-1}) &= \varphi(aa^{-1}) && [\varphi \text{ resp op}] \\ &= \varphi(e_A) && [\mathrm{inv}_A] \\ &= e_B && [\varphi \text{ resp id}] \end{aligned}$$
■

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **D**

qual o tipo dessa função?

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{inv} \times \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{inv}"'] & B \\ A \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{op}"'] & B \times B \arrow[d, "\mathrm{op}"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

✓

. . . esqueci!

pois entender ≠ aprender!

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam A, B : Grp.
Seja $\varphi : A \to B$ t.q. φ resp. a op. do A.
Vou demonstrar que φ é um homomorfismo.
$\boxed{\text{Sejam } a, b : A.}$ Teu alvo tem a forma $(\forall a, b \in G)[\dots]$?!
Calc: $\varphi(ab)$
$= \dots$ faltou intuição!

... Faltou procurar receber feedback das tuas tentativas!

$\varphi(ab) = (\varphi a)(\varphi b)$

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = e_B \}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
DEMONSTRAÇÃO.

~~Sejam A, B : Grp.~~
~~Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo.~~

Vou mostrar que $\ker\varphi \leq A$. [Vou trancar a partir daqui.]
Como A é $\boxed{\text{Grp}}$ grupo, logo $e_A \in A$.
Não. ← $\boxed{\text{Logo}}$ $\ker\varphi$ é habitado.
Basta demonstrar que $(\forall a, b : \ker\varphi)[\varphi(ab^{-1}) \in \ker\varphi]$.
Sejam $a, b \in \ker\varphi$.
Calc: $\varphi(ab^{-1})$

~~One-test~~. A
rascunho

$= (\varphi a)(\varphi b^{-1})$ [φ resp. op]
$= (\varphi a)(\varphi b)^{-1}$ [φ resp. inv]
$= e_B (\varphi b)^{-1}$ [escolha de a]
$= e_B e_B^{-1}$ [escolha de b]
$= e_B$ [(inv)] ✓

Logo $\ker\varphi \leq A$.

Vou mostrar que $(\forall k \in \ker\varphi)(\forall a \in A)[\varphi(aka^{-1}) \in \ker\varphi]$
Sejam $k : \ker\varphi$ e $a : A$.
Calc: $\varphi(aka^{-1})$
$= (\varphi a)(\varphi k)(\varphi a^{-1})$ [φ resp. op]
$= (\varphi a) e_B (\varphi a^{-1})$ [escolha de k]
$= (\varphi a)(\varphi a^{-1})$ [(id)]
$= (\varphi a)(\varphi a)^{-1}$ [φ resp. inv]
$= e_B$ [(inv)]

Logo $\ker\varphi \trianglelefteq A$. ✓

Só isso mesmo.

φ "One-test"

Seja G : Grp.

Seja H : Set.

Se $H \subseteq G$.

Se H habitado

?? Se $(\forall a, b : H)[ab^{-1} \in H]$

Então $H \leq G$.

(18) D

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

D1

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Unit} \arrow[ur, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{inv}_A"'] & B \arrow[d, "\mathrm{inv}_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{op}_A"'] & B \times B \arrow[d, "\mathrm{op}_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

Vou demonstrar que φ respeita a id.
Calculamos: $\varphi(ee) = \varphi e$ [Pela (Id)]
$\varphi(ee) = (\varphi e)(\varphi e)$ [Pela φ resp. op].
Logo $\varphi e = (\varphi e)(\varphi e)$
Logo $\varphi e = e_B$. [Pela res. única].
Vou demonstrar que φ respeita a inv.
Seja $x \in A$. Basta demonstrar que $(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = e_B$ [Pela res. única]
Calculamos: $(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = \varphi(x x^{-1})$ [Pela φ resp op.]
$= \varphi e_A$ [Pela (Id)A]
$= e_B$ [Pela φ resp Id].

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \overset{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = e_B \}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
DEMONSTRAÇÃO.

$\ker\varphi$ HABITADO? (...)

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.
Vou demonstrar que $ab^{-1} \in \ker\varphi$, ou seja, $\varphi(ab^{-1}) = e_B$
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(ab^{-1}) &= (\varphi a)(\varphi b^{-1}) && [\text{Pela } \varphi \text{ resp op}] \\
&= e\ (\varphi b^{-1}) && [\text{Pela escolha do } a] \\
&= e\ (\varphi b)^{-1} && [\text{Pela } \varphi \text{ resp. inv}] \\
&= e\ e^{-1} && [\text{Pela escolha do } b] \\
&= e && [\text{Pela (inv)B}]
\end{aligned}$$

■

Seja $k \in \ker\varphi$.
Seja $g \in A$.
Vou demonstrar que $gkg^{-1} \in \ker\varphi$, ou seja, $\varphi(gkg^{-1}) = e_B$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(gkg^{-1}) &= (\varphi g)(\varphi k)(\varphi g^{-1}) && [\text{Pela } \varphi \text{ resp. op } 2\times] \\
&= (\varphi g)\ e\ (\varphi g^{-1}) && [\text{Pela escolha do } k] \\
&= (\varphi g)(\varphi g^{-1}) && [\text{Pela (id)B}] \\
&= (\varphi g g^{-1}) && [\text{Pela } \varphi \text{ resp op}] \\
&= \varphi e_A && [\text{Pela (inv)A}] \\
&= e_B && [\text{Pela } \varphi \text{ resp Id}]
\end{aligned}$$

■

Só isso mesmo.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "op"'] & B \times B \arrow[d, "op"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "inv"'] & B \arrow[d, "inv"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & e_A \arrow[d, "\varphi"] \\ & e_B \end{tikzcd}$$

A

B

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$. Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

Precisamos mostrar que φ respeita a identidade e os inversos.

Calculamos:

$\cdot\ \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e)$ [φ respeita op.]

$\cdot\ \varphi(ee) = \varphi(e)$ [id]

Logo, $\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(e)$, e pelo Lema da Identidade Barata, temos $\varphi(e) = e$, identidade do B.

Seja $a \in A$. Calculamos:

$\cdot\ \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$ [φ respeita op]

$\cdot\ \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e)$ [inv]

$= e$ [φ respeita id]

Logo, $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = e$, e pelo Lema dos Inversos Baratos, temos que $\varphi(a^{-1})$ é o inverso do $\varphi(a)$.

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid \varphi\, a = e_B \}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
DEMONSTRAÇÃO.

Demonstremos que é um subgrupo, pelo critérion "one-test". HABITADO?
Sejam $x, y \in \ker\varphi$. Calculemos:

$$\begin{aligned}
\varphi(xy^{-1}) &= \varphi(x)\,\varphi(y^{-1}) && [\varphi \text{ respeita op.}] \\
&= e_B\,\varphi(y^{-1}) && [\text{pela escolha do } x] \\
&= e_B\,(\varphi(y))^{-1} && [\varphi \text{ respeita inv.}] \\
&= e_B\,(e_B)^{-1} && [\text{pela escolha do } y] \\
&= e_B\, e_B && [(\text{inv-id})] \\
&= e_B && [(\text{id})]
\end{aligned}$$

menos "tinta" se neste passo apagar o e_B

Logo, $xy^{-1} \in \ker\varphi$, e $\ker\varphi \leq A$.
Mostremos que é subgrupo normal, demonstrando que é fechado sob conjugados.
Seja $a \in A$ e $k \in \ker\varphi$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\,\varphi(k)\,\varphi(a^{-1}) && [\varphi \text{ respeita op.}] \\
&= \varphi(a)\, e_B\, \varphi(a^{-1}) && [\text{pela escolha de } k] \\
&= \varphi(a)\,\varphi(a^{-1}) && [(\text{id})] \\
&= \varphi(a)\,(\varphi(a))^{-1} && [\varphi \text{ respeita inv.}] \\
&= e_B && [(\text{inv})]
\end{aligned}$$

Logo, $aka^{-1} \in \ker\varphi$, e o $\ker\varphi \trianglelefteq A$.

Só isso mesmo.

(12) **A**

Escolha **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(9) **A1.** Sejam G grupo e $a, b \in G$.
Demonstre pelos axiomas que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(12) **A2.** Sejam G grupo e $H \subseteq G$ tais que H habitado e para quaisquer $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.
Demonstre: $H \leq G$.

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam G grupo e $a, b \in G$. Demonstraremos que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Quando? :(

(18) **B**

Sejam G grupo e $\mathcal{H}$ família habitada de subgrupos de G. Demonstre que $\bigcap \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

isso é um "ADBMAL"?
Aprenda grego!

type errors!

(24) **D**

eu entendo isso
como a $\lambda x.e_A$. Mas
depois de ver isso

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "*_A"'] & B \arrow[d, "*_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{}^{-1}"'] & B \arrow[d, "{}^{-1}"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "e_A"'] \arrow[dr, "(\lambda x{:}A.\, e_B)"] & \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

veja o gabarito!

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$.
Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

-- Parte φ respeita Id

Seja $a \in A$.

Temos $\varphi(ae) = \varphi a$. [IdA]

Temos $\varphi(ae) = (\varphi a)(\varphi e)$. [$\varphi$ resp. op]

Logo $\varphi a = (\varphi a)(\varphi e)$.

Portanto $\varphi e = e$ [id-lar].

-- φ respeita inverso

Seja $a \in A$.

Basta demonstrar que $(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = e$.
[inv-lar B]

Calculamos:

$$\begin{aligned} (\varphi a)(\varphi a^{-1}) &= \varphi(a a^{-1}) && [\varphi \text{ resp. op}] \\ &= \varphi e && [\text{inv-A}] \\ &= e && [\varphi \text{ resp. Id}] \end{aligned}$$

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = e_B \,\}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
DEMONSTRAÇÃO.

Basta demonstrar que $\ker \varphi$ é conjugação fechado.
[one-test]

Seja $a \in A$

Seja $x \in \ker \varphi$.

Esqueceu o $\ker \varphi \leq A$!

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(a x a^{-1}) &= (\varphi\, ax)(\varphi\, a^{-1}) && [\varphi \text{ resp. op.}] \\
&= ((\varphi a)(\varphi x))(\varphi\, a^{-1}) && [\varphi \text{ resp. op.}] \\
&= ((\varphi a) e)(\varphi\, a^{-1}) && [\text{escolha de } x] \\
&= (\varphi a)(\varphi\, a^{-1}) && [\text{Id-B}] \\
&= (\varphi a)(\varphi a)^{-1} && [\varphi \text{ resp. inve}] \\
&= e && [\text{inve-B}]
\end{aligned}
$$

Logo $a x a^{-1} \in \ker \varphi$.

Só isso mesmo.