FMC2, 2022.2
(Turma T56 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 48; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-12-07

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. **Escolha até 2 dos A, B, C, D, E.**[3]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **A**

Escolha **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(9) **A1.** Sejam G grupo e $a, b \in G$.
Demonstre pelos axiomas que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(12) **A2.** Sejam G grupo e $H \subseteq G$ tais que H habitado e para quaisquer $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.
Demonstre: $H \leq G$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

A1. Calculamos

$$\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) \overset{(1)}{=} \left(\left(b^{-1}a^{-1}\right)a\right)b \overset{(1)}{=} \left(b^{-1}\left(a^{-1}a\right)\right)b \overset{(2)}{=} \left(b^{-1}e\right)b \overset{(3)}{=} \left(b^{-1}\right)b \overset{(2)}{=} e,$$

onde usamos a (ass) nas (1), a (inv) nas (2), e a (id) na (3).
Como $(ab)^{-1}(ab) = e$ também, concluímos que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ pela (G-Res).

A2. Como H habitado, tome $h \in H$.
Pela hipótese, $hh^{-1} \in H$, ou seja $e \in H$.
Como $e, h \in H$, de novo pela hipótese temos $eh^{-1} \in H$, ou seja $h^{-1} \in H$.
Temos então que o H é fechado sob inversos.
Basta demonstrar que é fechado sob a operação de G também:
tomando $a, b \in H$, ganhamos $a, b^{-1} \in H$,
então pela hipótese $a(b^{-1})^{-1} \in H$, ou seja, $ab \in H$.

(18) **B**

Sejam G grupo e $\mathcal{H}$ família habitada de subgrupos de G. Demonstre que $\bigcap \mathcal{H} \leq \mathcal{G}$.
DEMONSTRAÇÃO.

Como $\mathcal{H}$ é habitada, para demonstrar $e \in \bigcap \mathcal{H}$ basta mostrar que e pertence a todo integrante da $\mathcal{H}$.
Seja $H \in \mathcal{H}$.
Como $H \leq G$, logo $e \in H$.
Sejam $a, b \in \bigcap \mathcal{H}$.
Preciso mostrar que $ab^{-1} \in \bigcap \mathcal{H}$.
Então seja $H \in \mathcal{H}$.
Basta mostrar que $ab^{-1} \in H$.
Pela escolha de a, temos $a \in H$ $^{(1)}$.
Pela escolha de b, temos $b \in H$, e como $H \leq G$, temos $b^{-1} \in H$ $^{(2)}$ ((inv)-fechado).
Pelas (1),(2), como H é (op)-fechado, temos $ab^{-1} \in H$.

(18) **C**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$ tais que $HK \leq G$. Demonstre: $HK = KH$.
DEMONSTRAÇÃO.

($\subseteq$): Tome $x \in HK$. Preciso mostrar $x \in KH$.
Como $HK \leq G$, logo $x^{-1} \in HK$.
Logo sejam $h \in H$, $k \in K$, tais que $x^{-1} = hk$.
Logo $x = (x^{-1})^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$.

($\supseteq$): Tome $x \in KH$, logo sejam $h \in H$ e $k \in K$ tais que $x = kh$.
Logo $k^{-1} \in K$ e $h^{-1} \in H$. Como $HK \leq G$, logo basta demonstrar que $x^{-1} \in HK$ (pois isso implica $x \in HK$ também). Realmente, $x^{-1} = (kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$.

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$. Desenha três diagramas cuja comutatividade significa que φ é um homomorfismo.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\varphi\times\varphi"] \arrow[d, "*_A"'] & B \times B \arrow[d, "*_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "inv_A"'] & B \arrow[d, "inv_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\lambda x\,.\,e_A"'] \arrow[dr, "\lambda x\,.\,e_B"] & \\ A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \end{tikzcd}$$

(12) **D2.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : A \to B$ tal que φ respeita a operação binária do $\mathcal{A}$.
Demonstre que φ é um homomorfismo.
DEMONSTRAÇÃO.

Falta demonstrar que φ respeita a identidade e os inversos.

φ RESPEITA A IDENTIDADE.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(e_A)\varphi(e_A) &= \varphi(e_Ae_A) && \text{(resp. op)} \\ &= \varphi(e_A) && \text{((id) no } A\text{)} \end{aligned}$$

E como $e_B\varphi(e_A) = \varphi(e_A)$ também,
logo $\varphi(e_A) = e_B$ pela (G-Res).

φ RESPEITA OS INVERSOS.
Calculamos

$$\begin{aligned} \varphi(x^{-1})\varphi(x) &= \varphi(x^{-1}x) && \text{(resp. op.)} \\ &= \varphi(e_A) && \text{((id) no } B\text{)} \\ &= e_B && \text{(resp. id.)} \end{aligned}$$

E como $(\varphi(x))^{-1}\varphi(x) = e_B$ também,
logo $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$ (pela (G-Res)).

(24) **E**

Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Demonstre que o $\ker\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid \varphi\, a = e_B \,\}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$..
Demonstração.

Subconjunto. Imediato pela sua definição.

Subgrupo. Primeiramente observamos que $\ker\varphi \neq \emptyset$: $e_A \in \ker\varphi$, pois φ é um homomorfismo e logo leva a e_A para a e_B. Usarei o critérion one-test. Sejam $x, y \in \ker\varphi$. Precisamos mostrar que $xy^{-1} \in \ker\varphi$, ou seja, que $\varphi(xy^{-1}) = e_B$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(xy^{-1}) &= \varphi(x)\varphi(y^{-1}) && (\varphi \text{ homo (oper.)})\\
&= \varphi(x)(\varphi(y))^{-1} && (\varphi \text{ homo (inv.)})\\
&= e_B(e_B)^{-1} && (x, y \in \ker\varphi)\\
&= e_B. && (\text{def. } (e_B)^{-1})
\end{aligned}$$

Normal. Seja $k \in \ker\varphi$ e tome $a \in A$. Precisamos demonstrar que o a-conjugado de k também está no $\ker\varphi$: $aka^{-1} \in \ker\varphi$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi\big(aka^{-1}\big) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi\big(a^{-1}\big) && (\varphi \text{ homo})\\
&= \varphi(a)e_B\varphi\big(a^{-1}\big) && (n \in \ker\varphi)\\
&= \varphi(a)\varphi\big(a^{-1}\big) && (\text{def. } e_B)\\
&= \varphi(a)(\varphi(a))^{-1} && (\varphi \text{ homo})\\
&= e_B && (\text{def. } (\varphi(a))^{-1})
\end{aligned}$$

Só isso mesmo.

Lemmata