

---

Nome:

---

2022-06-06

**Regras:**

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$ .<sup>2</sup>
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.<sup>3</sup>
- XII. Escolhe até 2 dos I, J, K.<sup>4</sup>

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

<sup>3</sup>Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

<sup>4</sup>Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(16) **I**

Aqui deixe sem demonstrar que as funções que definiu têm as propriedades necessárias (bijetividade para as  $=_c$  e injetividade para as  $\leq_c$ ) ou seja: apenas defina corretamente. Na parte de verificação que teus contraexemplos são válidos mesmo, calcule o suficiente para deixar claras as  $\neq_c$ .

(12) **I1.** Sejam  $A, A', B, B'$  conjuntos tais que  $A =_c A'$  e  $B =_c B'$ . Defina funções que mostram as relações cardinais corretas, ou contraexemplos que mostram que não tem como:

(i)  $A \cup B =_c A' \cup B'$ ;                      (iii)  $A \times B =_c A' \times B'$ ;                      (v)  $A \uplus B =_c A' \uplus B'$ ;

(ii)  $A \cap B =_c A' \cap B'$ ;                      (iv)  $(A \rightarrow B) =_c (A' \rightarrow B')$ ;                      (vi)  $\wp A =_c \wp A'$ .

RESPOSTA.

(4) **I2.** Sejam  $A, B, C$  conjuntos. Para **uma** das seguintes, defina função que a estabelece:

(2) (i)  $(A \rightarrow B) \leq_c \wp(A \times B)$ ;

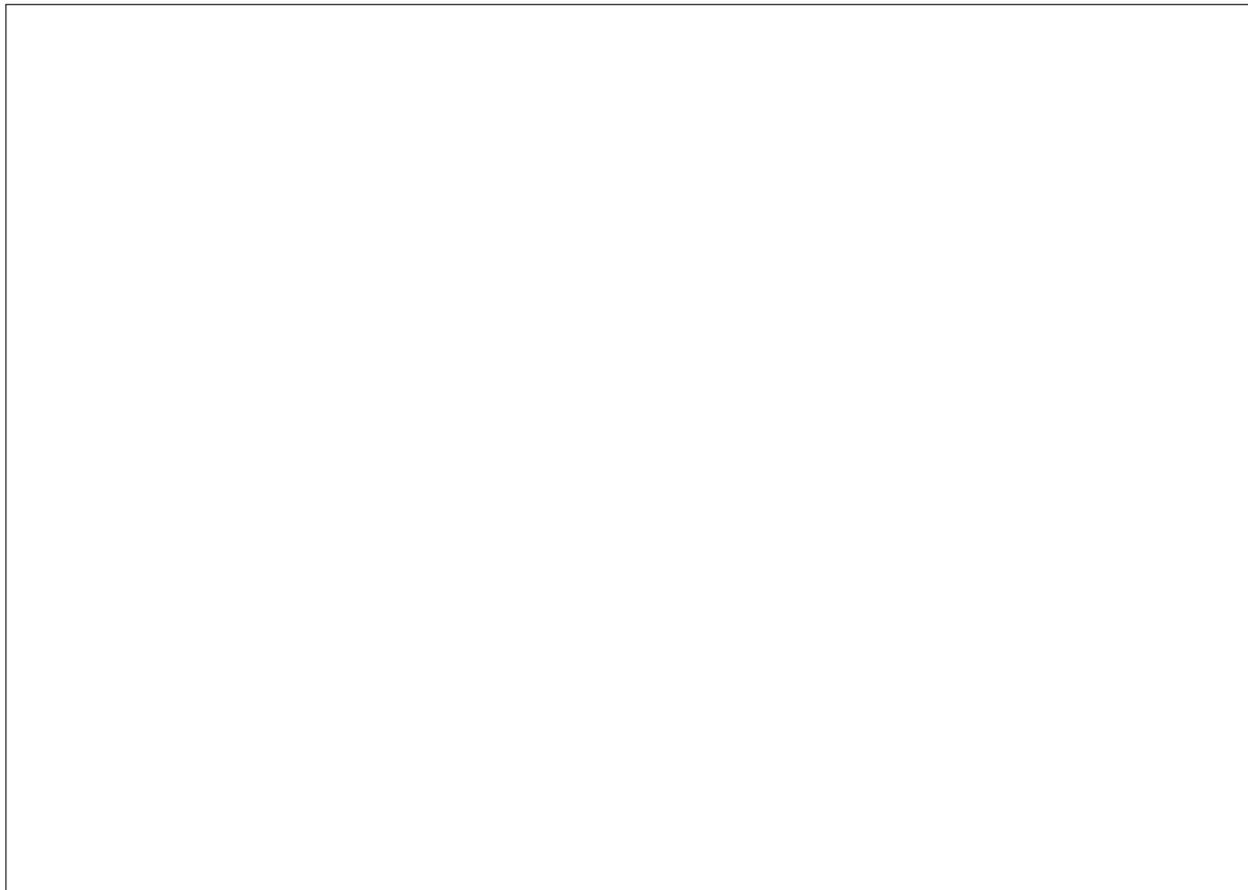
(2) (ii)  $((A \times B) \rightarrow B) =_c (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ ;

(4) (iii)  $(0, 1] =_c (0, 1)$ .

RESPOSTA.

(16) **J**

(10) **J1.** Para qualquer conjunto  $A$ ,  $A <_c \wp A$ .  
DEMONSTRAÇÃO.

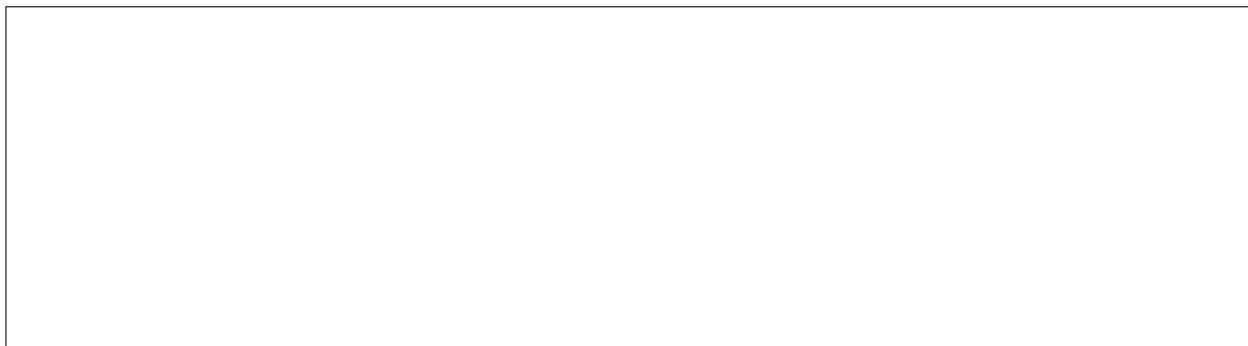


(6) **J2.** Definimos recursivamente a seqüência de conjuntos:  $\mathbb{N}, \wp\mathbb{N}, \wp\wp\mathbb{N}, \dots$ :

$$T_0 = \mathbb{N}$$
$$T_{n+1} = \wp T_n.$$

Seja  $T_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ . Demonstre que  $T_\omega$  tem cardinalidade estritamente maior de qualquer um dos conjuntos da seqüência  $(T_i)_i$ .

DEMONSTRAÇÃO.



(16) **K**

Sejam  $B \xrightarrow{f} C$ . Demonstre a equivalência:

$f$  injetora  $\iff f$  é  $(\circ)$ -cancelável pela esquerda.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

## RASCUNHO