FMC2, 2018.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28/100; bonus: $0^\flat$; time: 50')

Nome: Θάνος **Gabarito**

23/03/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas nos três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(6) **A**

(2) **A1.** Defina formalmente (usando ou "$\cdots \overset{\text{def}}{\iff} \cdots$" ou "$\cdots \overset{\text{def}}{=} \cdots$") o operador binário $\triangle$, e o operador unário $\bigcup$. Não assuma que o leitor sabe o significado dos $\setminus$, $\cup$, $\cap$.

DEFINIÇÃO DE $\triangle$:

$x \in A \triangle B \overset{\text{def}}{\iff} x$ pertence em exatamente um dos A, B.

DEFINIÇÃO DE $\bigcup$:

$x \in \bigcup \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} x \in A$ para algum $A \in \mathscr{A}$

(4) **A2.** Seja A conjunto. Prove ou refute a afirmação:

$$\bigcup A \neq \emptyset \implies A \neq \emptyset.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

Suponha que $\bigcup A \neq \emptyset$ e logo tome $x \in \bigcup A$. Pela definição de $\bigcup A$ então existe $a \in A$ (tal que $x \in a$, mas nem importa isso aqui). Logo $A \neq \emptyset$.

(12) **B**

(6) **B1.** Sejam A, B, C conjuntos. Prove ou refute a afirmação:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

"$\subseteq$":
Seja $w \in A \times (B \cup C)$.
Logo $w = \langle a, d \rangle$ para algum $a \in A$ e algum $d \in B \cup C$. (def. $\times$)
Logo $d \in B$ ou $d \in C$. (def. $\cup$)
Caso $d \in B$, temos $w = \langle a, d \rangle \in A \times B$. (def. $\times$)
Caso $d \in C$, temos $w = \langle a, d \rangle \in A \times C$. (def. $\times$)
Nos dois casos concluimos que $w \in (A \times B) \cup (A \times C)$ pela definição de $\cup$.

"$\supseteq$":
Seja $w \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Logo $w \in (A \times B)$ ou $w \in (A \times C)$. (def. $\cup$)
Caso $w \in (A \times B)$, temos $w = \langle a, b \rangle$ para algum $a \in A$ e algum $b \in B$. (def.$\times$)
Logo $b \in B \cup C$ (pois $b \in B$). (def. $\cup$)
Logo pela definição de $\times$ temos o desejado $w = \langle a, b \rangle \in A \times (B \cup C)$.
O caso $w \in (A \times C)$ é similar.

(6) **B2.** Sejam $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ famílias de conjuntos com $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$. Prove ou refute a afirmação:

$$\bigcap \mathscr{A} \subseteq \bigcup \mathscr{B}.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

Suponha $x \in \bigcap \mathscr{A}$ (1).
Para mostrar que $x \in \bigcup \mathscr{B}$, basta achar um membro da $\mathscr{B}$ em que o x pertence.
Seja $W \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ (sabemos que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$).
Logo $W \in \mathscr{A}$ (2) e $W \in \mathscr{B}$ (def. $\cap$).
Pelas (1),(2) temos $x \in W$, e como $W \in \mathscr{B}$, temos o desejado $x \in \bigcup \mathscr{B}$.

(Obs.: demonstramos um W tal que $\bigcap \mathscr{A} \subseteq W \subseteq \bigcup \mathscr{B}$.)

(16) **C**

(8) **C1.** Sejam $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ duas seqüências de conjuntos, tais que:

$$\text{para todo número par } m,\ A_m \subseteq B_{m/2}.$$

Prove que:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n.$$

PROVA.

Suponha $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.
Preciso mostrar que $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$, ou seja, provar que $x \in B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Seja $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, temos $x \in A_{2k}$. Mas $A_{2k} \subseteq B_k$, logo $x \in B_k$.

(8) **C2.** Sejam $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ duas seqüências de conjuntos de números naturais, tais que:

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ A_n \subsetneq B_n.$$

Mostre que em geral *não podemos concluir* que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subsetneq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos construir um contraexemplo.
Considere as seqüências de conjuntos seguintes: para todo $n \in \mathbb{N}$ defina

$$A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\} \qquad\qquad B_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$$

Observe que, realmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $A_n \subsetneq B_n$. Mesmo assim,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Só isso mesmo.