

# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

VOU FAZER A PROVA POR INDUÇÃO EM  $\mathbb{N}$

BASE  $N=0$

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = F_1 + F_0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$F_0 = 0$  [cuidado na escrita]

isso é o que tu queres provar!

SEJA UM  $k \in \mathbb{Z}$ , ~~VOU~~ SUPONHA tal que  $\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$  (H.I.)

(VOU PROVAR PARA  $k+1$ )

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \left( \sum_{i=0}^k F_i \right) + F_{k+1}$$

$$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$$

$$= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1$$

$$= F_{k+3} - 1$$

~~III~~ PROPRIEDADE SOMATORIA

(H.I.)

(ASSOCIATIVA E COMUTATIVA) +

DEF DE  $F_n$

ASSIM!

$\therefore$  LOGO  $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$

pleonasma

"para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,"

# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

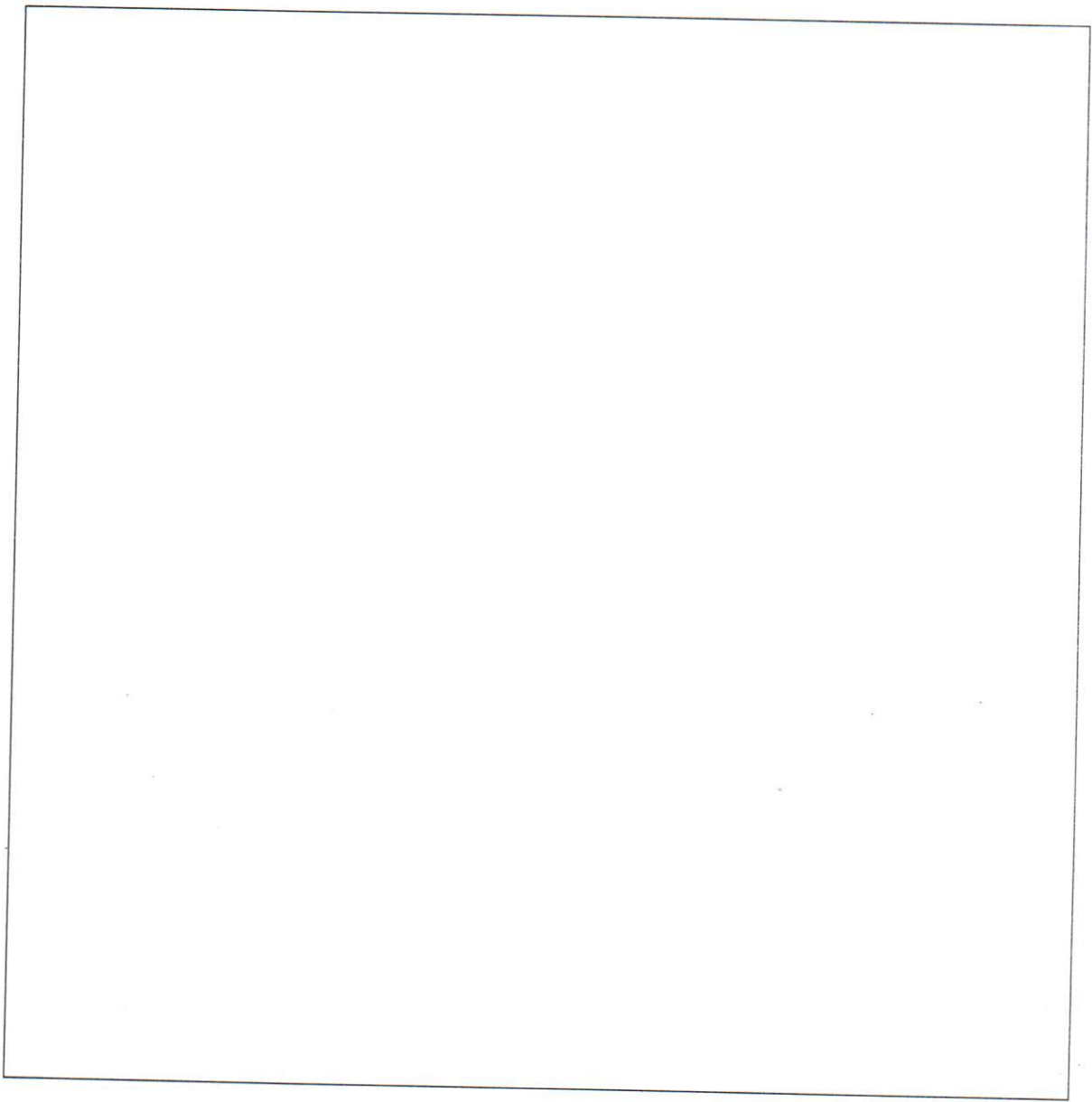
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

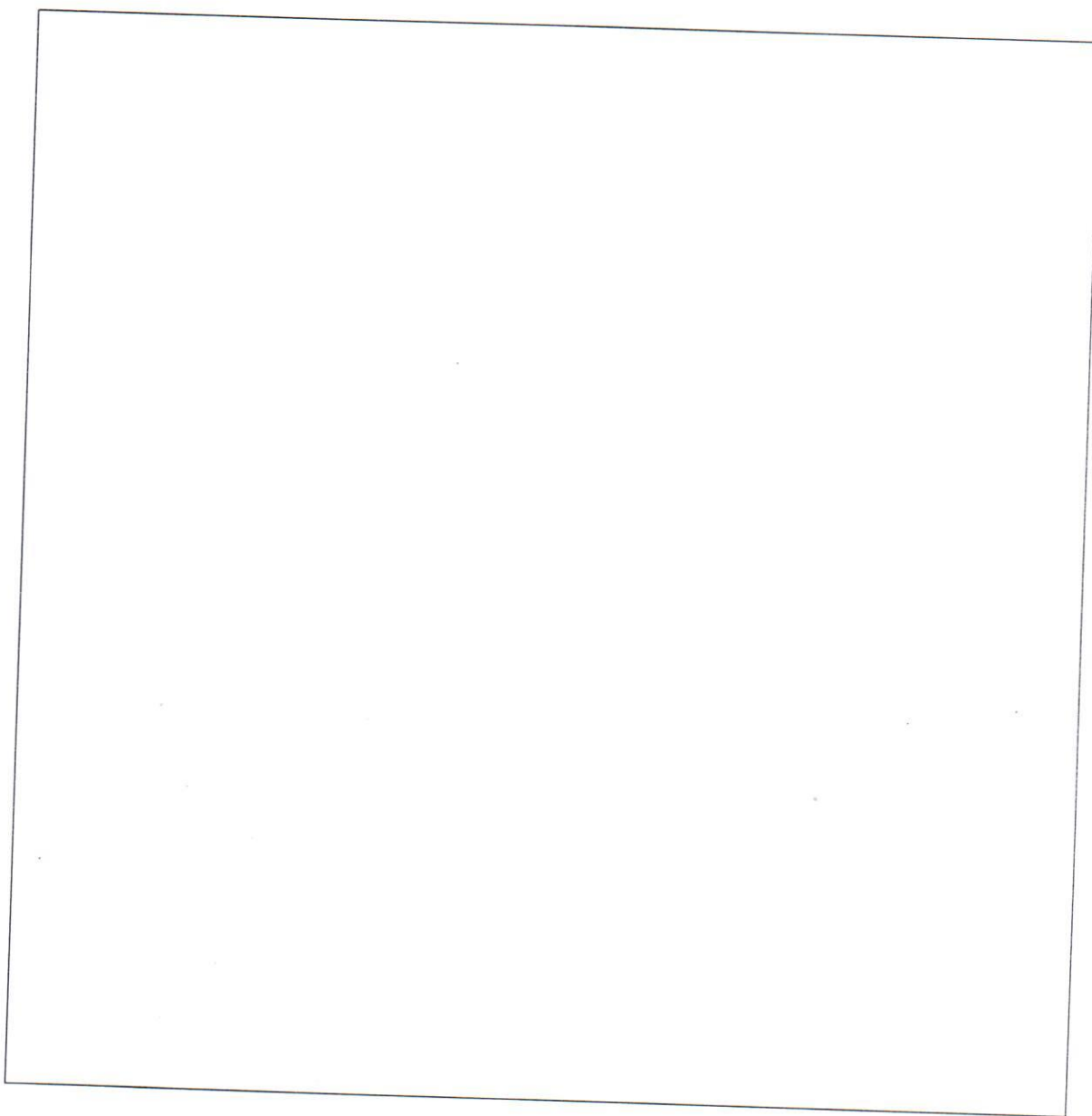
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

OEN.

CASO BASE:

$$\sum_{i=0}^1 f_i = f_3 - 1$$

$$0 + 1 = 2 - 1 \quad \checkmark \quad \checkmark$$

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = 2$$

$$f_4 = 3$$

HIPÓTESE:

$$\text{PARA ALGUM } n, \quad \sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

PASSO:

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = f_{n+3} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$f_{n+1} + \sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} + f_{n+1} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{VERDADEIRO} \\ \text{PELA HIPÓTESE} \end{array}$$

CUIDADO!

com essa direção, você

tá supondo o que tu queres provar, e concluindo algo que já tens!

✓

~ ✓

# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

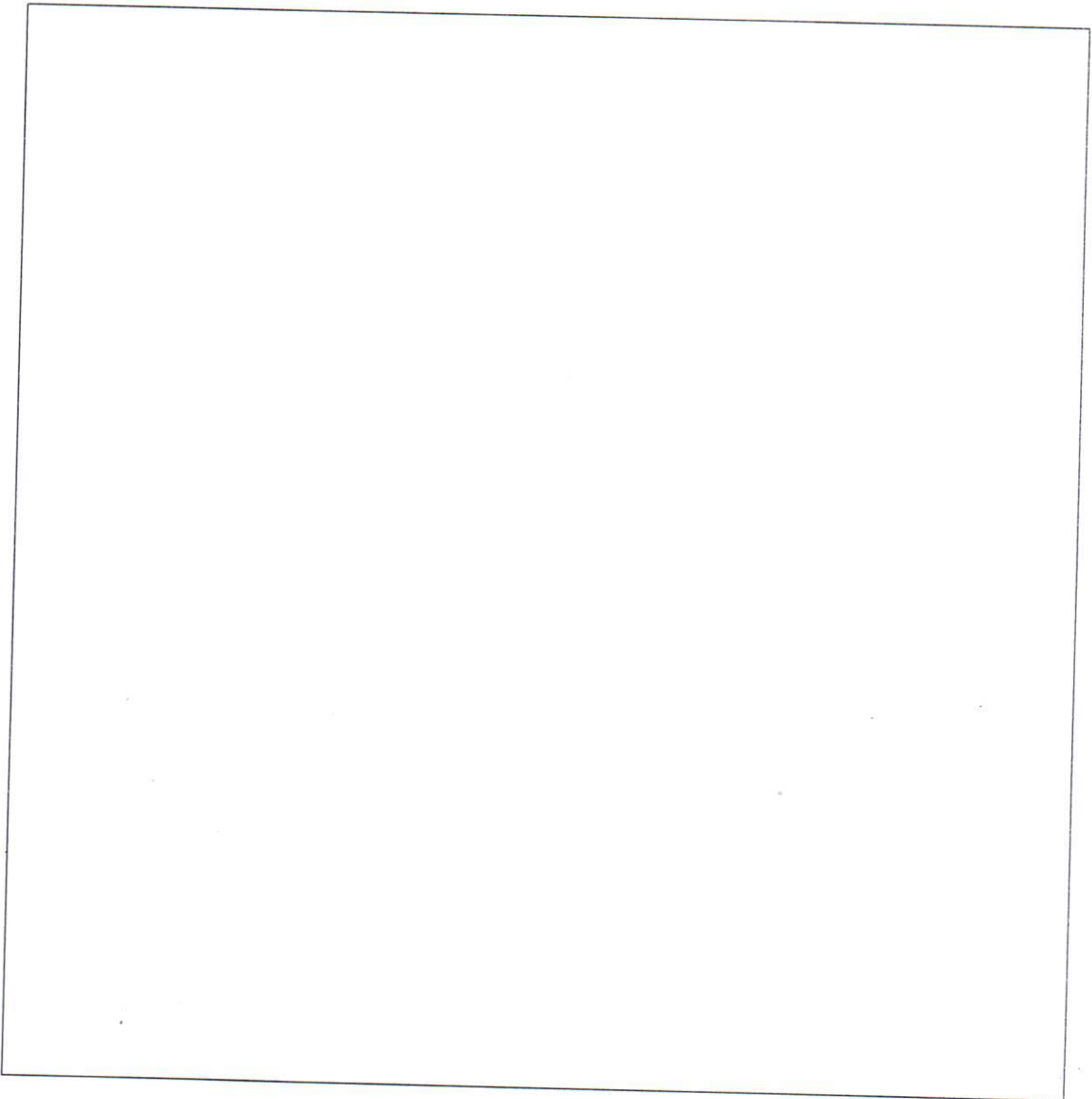
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

cuidado com a direção!!

PROVA.

Caso base ( $m=0$ )

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_{0+2} - 1 \Rightarrow F_0 = F_2 - 1$$

$$0 = F_1 + F_0 - 1$$

$$0 = 1 + 0 - 1$$

- verdadeiro

Passo Indutivo: No caso base eu provei que a expressão é verdadeira para  $m=0$ , ~~falta provar que ela é válida para um valor qualquer "k", e se é válida para "k" também é válida para o seu sucessor "k+1"~~.

Hipótese:  $m=k$

$$\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$$

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

Tese  $k = k+1$

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^k F_i + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

$$F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

$$F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1$$

NAO SOU CAPAZ DE OPINAR

ideia correta mas a forma de "indução" é errada.

k nunca será igual ao k+1 !!

# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

PROVA.

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

Por indução:

$$\text{Base (n=0)}: \sum_{i=0}^0 F_i = F_0 + 1 = 0 + 1 = 1 = F_2 - 1 = F_1 + F_0 - 1 = 0$$

Rasso indutivo: Vou provar que

$$\text{Para todo } k \in \mathbb{N}, \underbrace{\left( \sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1 \right)}_{\text{H.I.}} \Rightarrow \left( \sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1 \right)$$

~~estratégia~~

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \sum_{i=0}^k F_i + F_{k+1} \quad (\text{def. } \Sigma)$$

$$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \quad (\text{H.I.})$$

$$= F_{k+2} - 1 + 1$$

$$= F_{k+2}$$

começou bem mas,...

$$F_{k+3} - 1 = F_{k+3} - F_1$$

$$\text{ex } (F_2 + F_1 + F_0) - F_1$$

$$= F_{k+2} \quad ???$$

χ



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

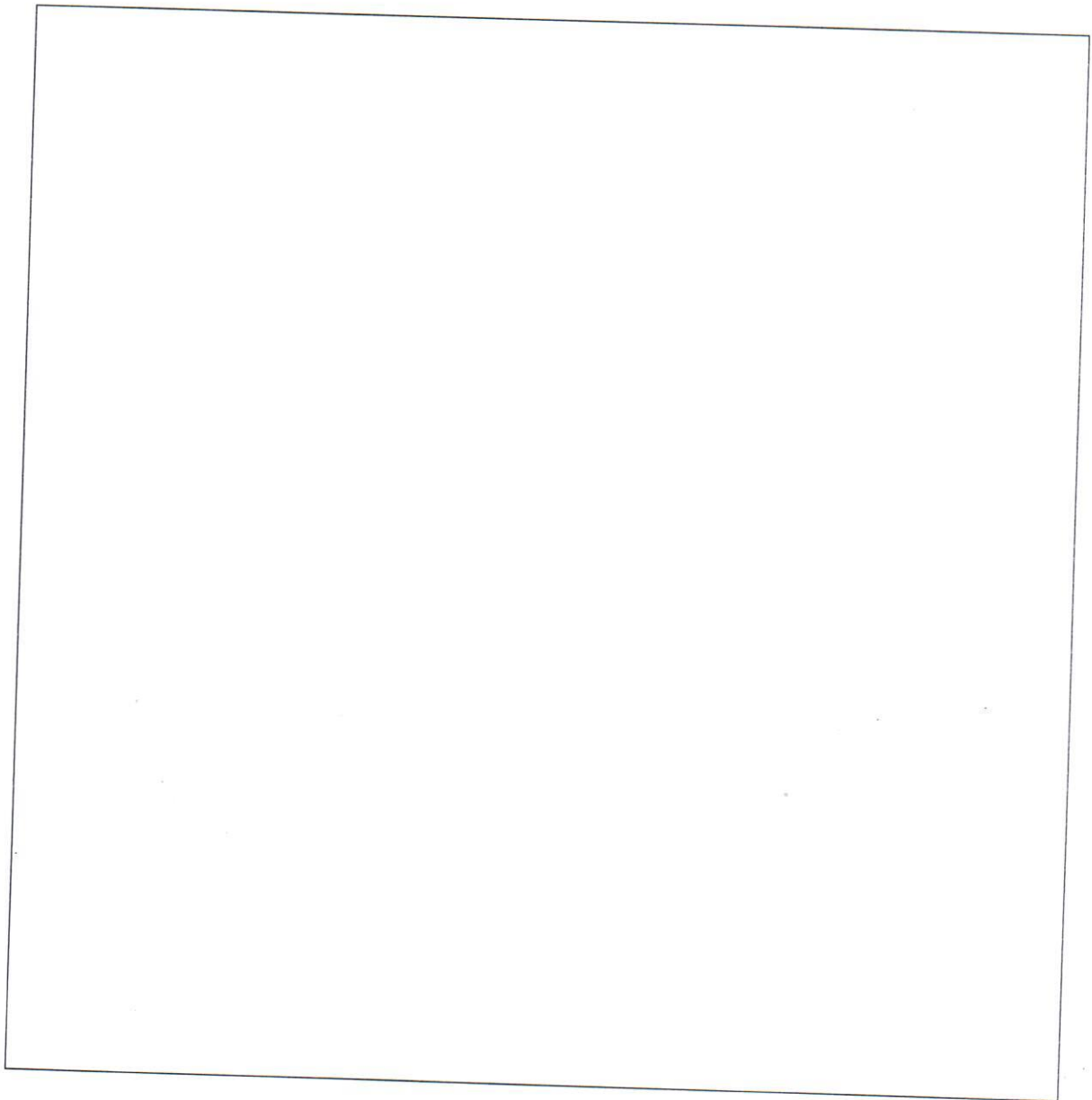
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.





# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

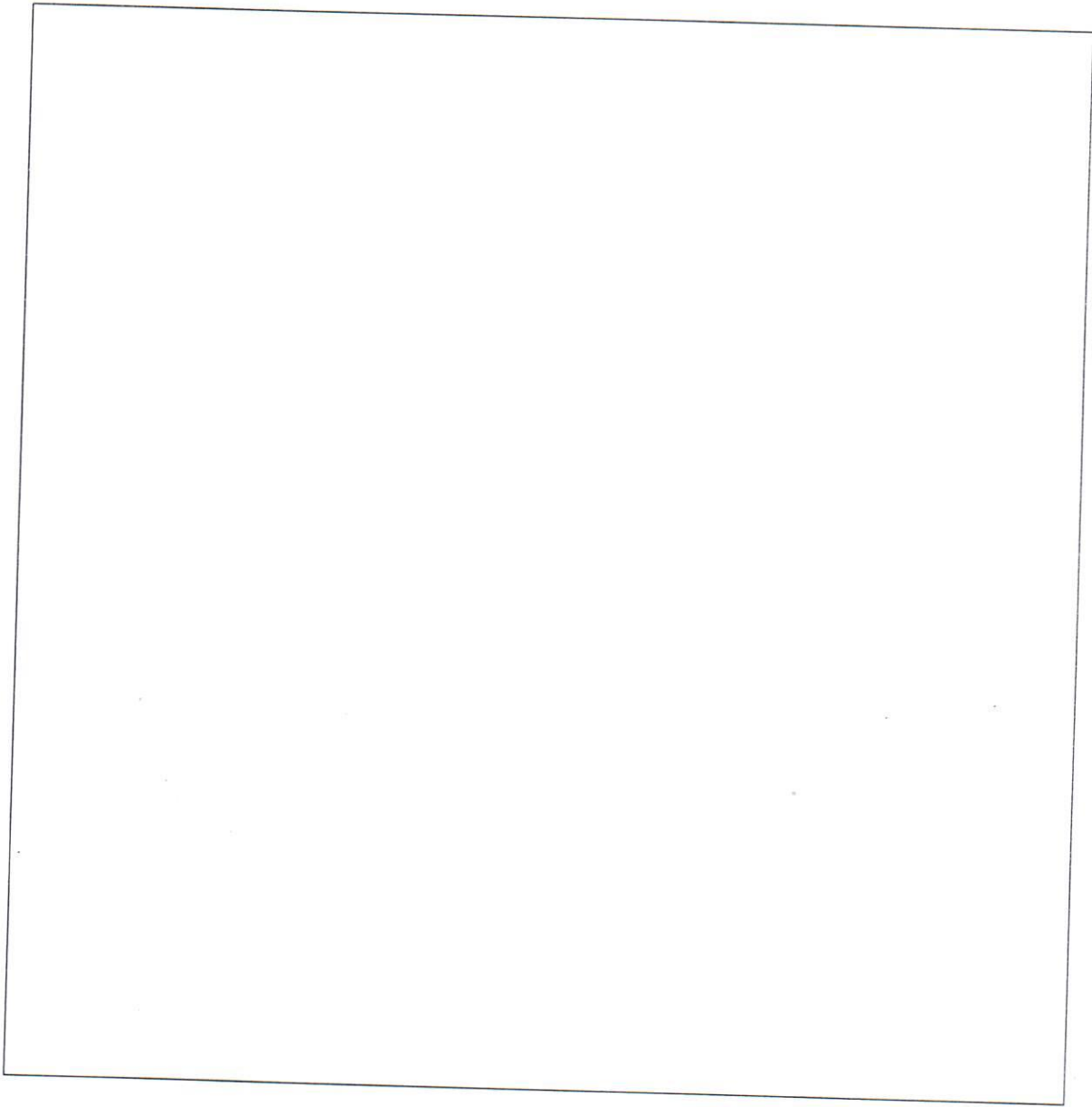
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

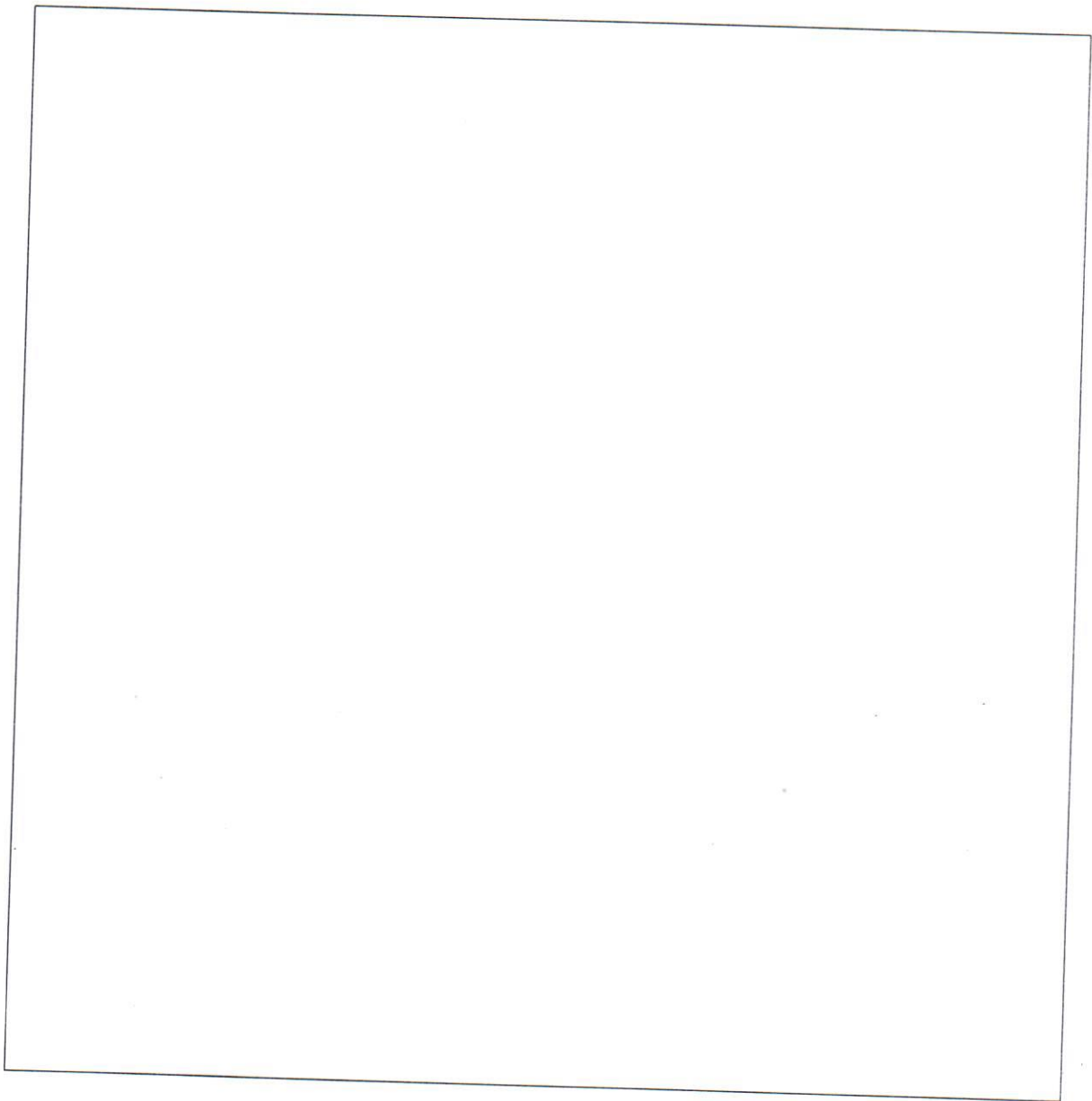
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

caso base:  $n=0$

~~$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$~~

$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$  ?

$\sum_{i=0}^0 f_0 = f_{0+2} - 1$  → não tens isso!

$0 = 1 - 1$

$0 = 0$  → sim,  $0=0$ , nem precisamos Fibonacci para saber disso!

passo indutivo  $\sum_{i=0}^k f_i = f_{k+2} - 1, \forall k \in \mathbb{N}$

Prova  $\sum_{i=0}^{k+1} f_i = f_{k+1+2} - 1, \forall k \in \mathbb{N}$ .

$\sum_{i=0}^{k+1} f_i = \sum_{i=0}^k f_i + f_{k+1}$

$= f_{k+2} - 1 + f_{k+1}$  (H.I.)

$= f_{k+2} + f_{k+1} - 1$

$= f_{k+3} - 1$  (Def. Fibonacci)  $\square$

H.I. → NAO!

Supomos que é válido para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

(o que faltou para ser 100% correto?)

✓

# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

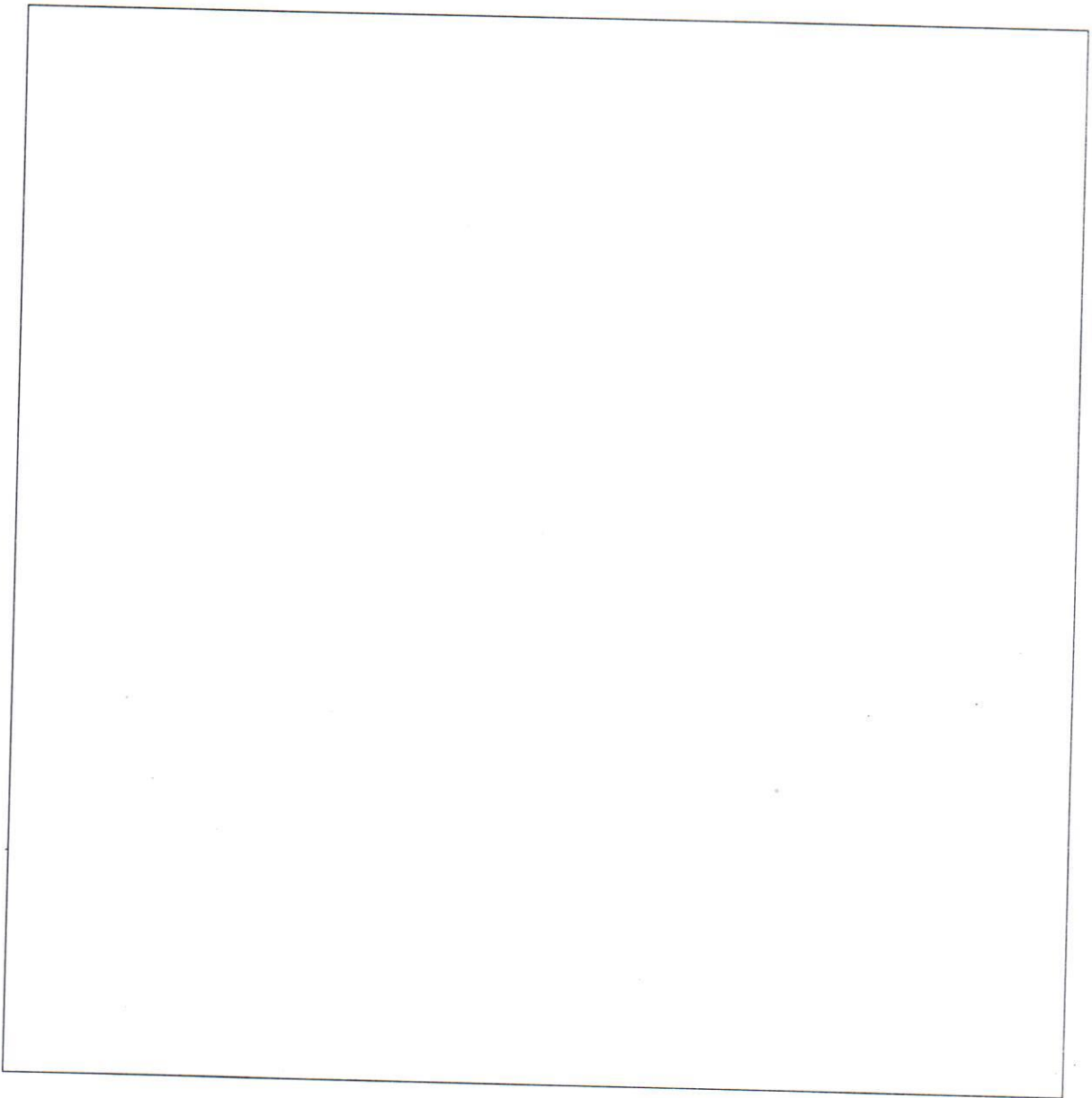
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

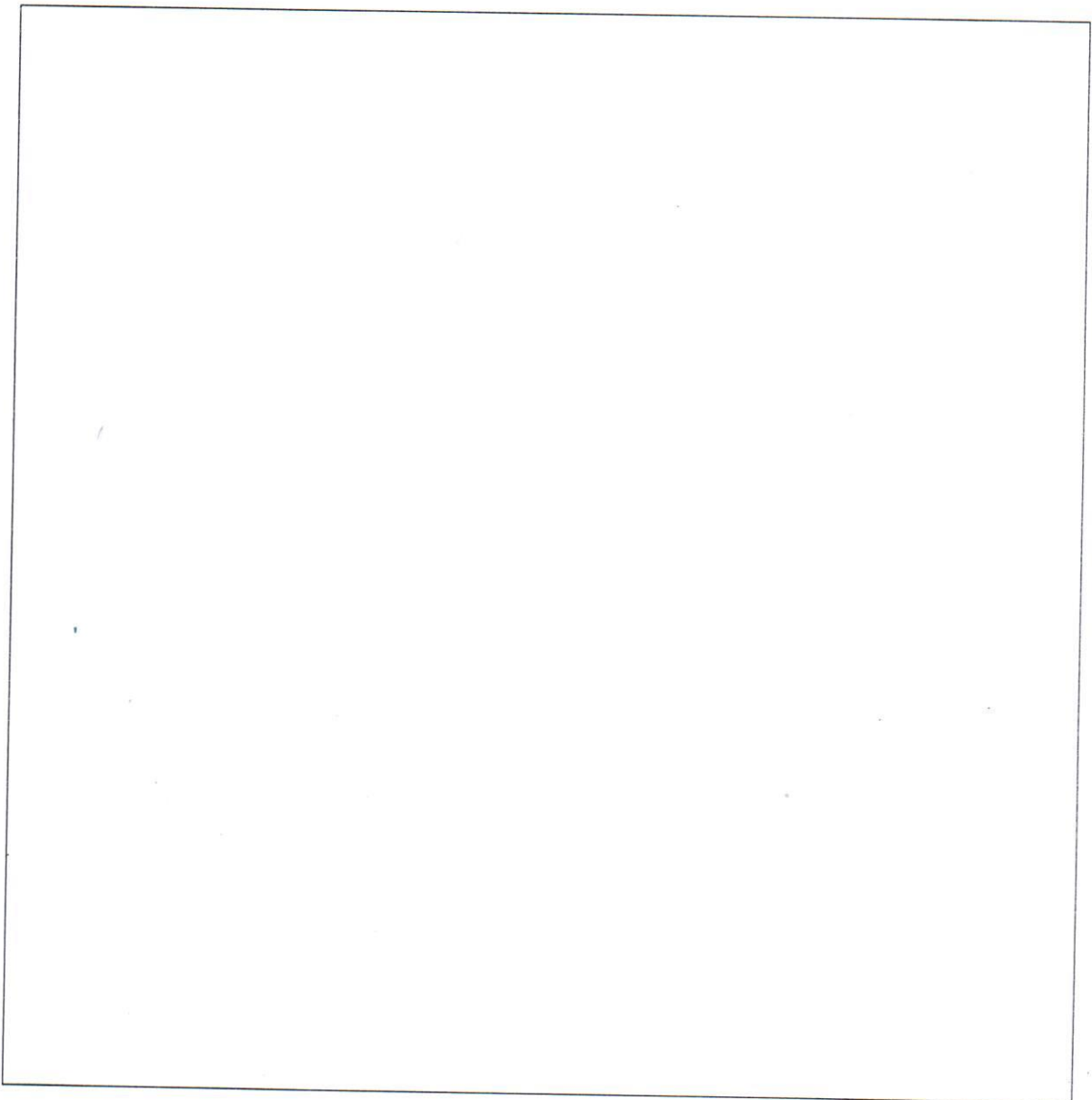
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

Provando o teorema por indução em  $n$  temos:  
caso base  $n=0$

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_{0+2-1}$$

$$F_{0+2-1} =$$

$$F_{2-1} =$$

$$(F_1 + F_0) - 1 =$$

$$(1 + 0) - 1 = 0 \quad \checkmark$$

certo!

cuidado com o "alignment"

Hipótese Indutiva:

Seja  $k \in \mathbb{N}$ , temos:

$$\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2-1}$$

por que? de onde?

"Suponha que... para algum  $k \in \mathbb{N}$ ..."

Tese de Indução:

Preciso provar que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{(k+1)+2-1}$$

Assim:

$$\sum_{i=0}^{k+1} = \left( \sum_{i=0}^k F_i \right) + F_{k+1}$$

(somatório) ✓

$$= (F_{k+2-1}) + F_{k+1}$$

(H.I.) ✓

$$= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1$$

$$= F_{k+3-1}$$

✓

✓

# I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

PASSO BASE:

PARA  $n=0$

~~...~~

$$F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = 1 - 1 = 0. \checkmark$$

A FÓRMULA É VERDADEIRA.

PASSO INDUTIVO:

H.I.: SUPONHA QUE A FÓRMULA É VERDADEIRA PARA  $n=k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$F_k = F_{k+2} - 1$$

TESE: PROVAR QUE <sup>a fórmula</sup> É VERDADEIRA PARA  ~~$k+1$~~   $k+1$  e pronto.

$$F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

SABEMOS QUE:

$$F_{k+3} = F_k + F_{k+2}$$

ASSIM:

$$F_k + F_{k+2} = F_{k+3} - 1$$
$$F = F_{k+2} - 1$$

?? QUE F É ESSE?

Boa pergunta.

**FALTOU CONCLUIR** QUE  $F_{k+3} - 1 = F_k + F_{k+2} - 1$  concluindo.

$$\begin{aligned}F_{k+3} - 1 &= F_k + F_{k+2} - 1 \\F_{k+3} - 1 &= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 \\&= F_{k+2} + F_{k+1} - F_1 \\&= F_{k+2} + F_k ?? \\&= F_{k+2} + F_{k+2} - 1 \\&= \dots\end{aligned}$$

AFF!  
Me enrolou  
também!



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

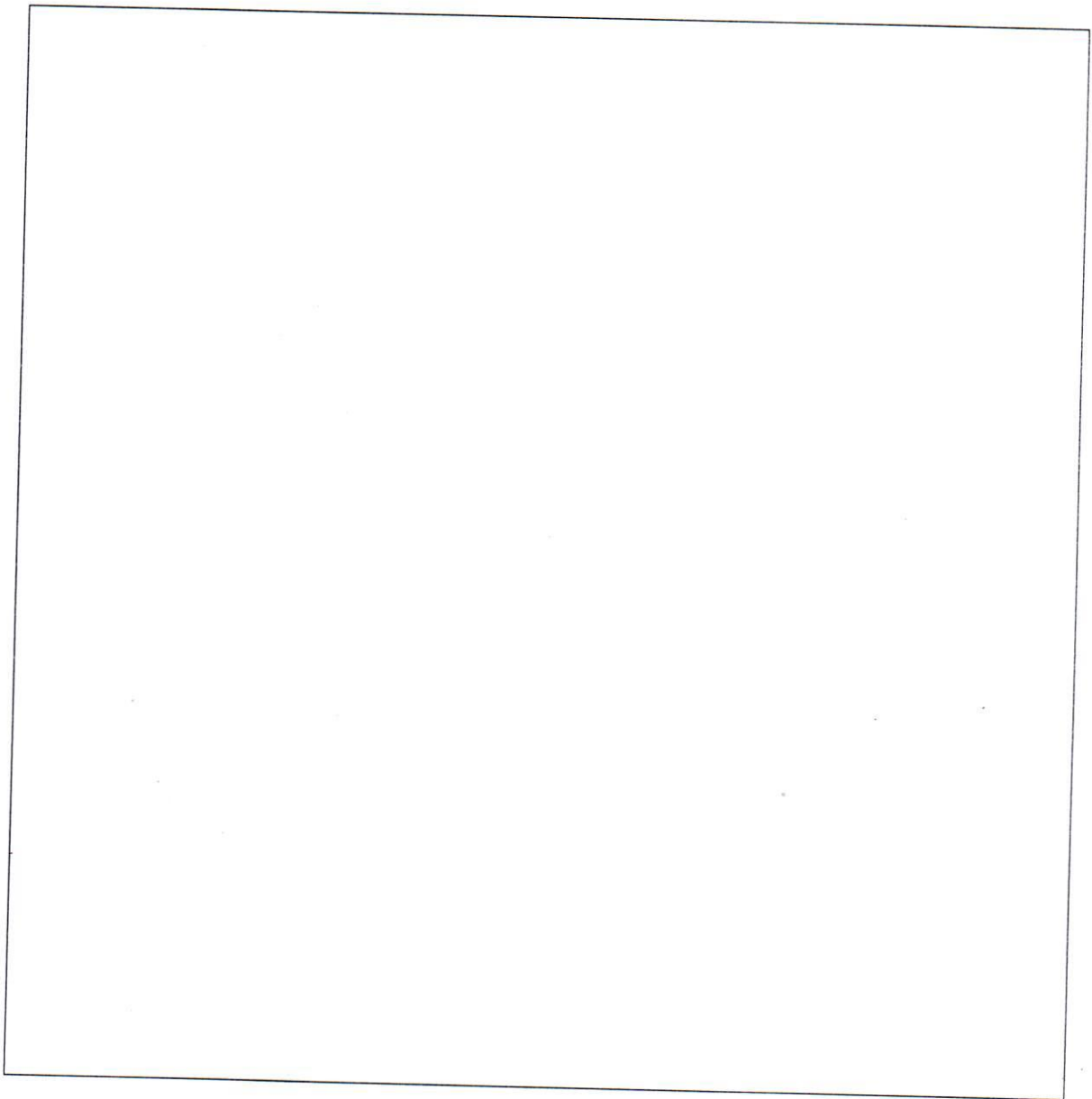
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

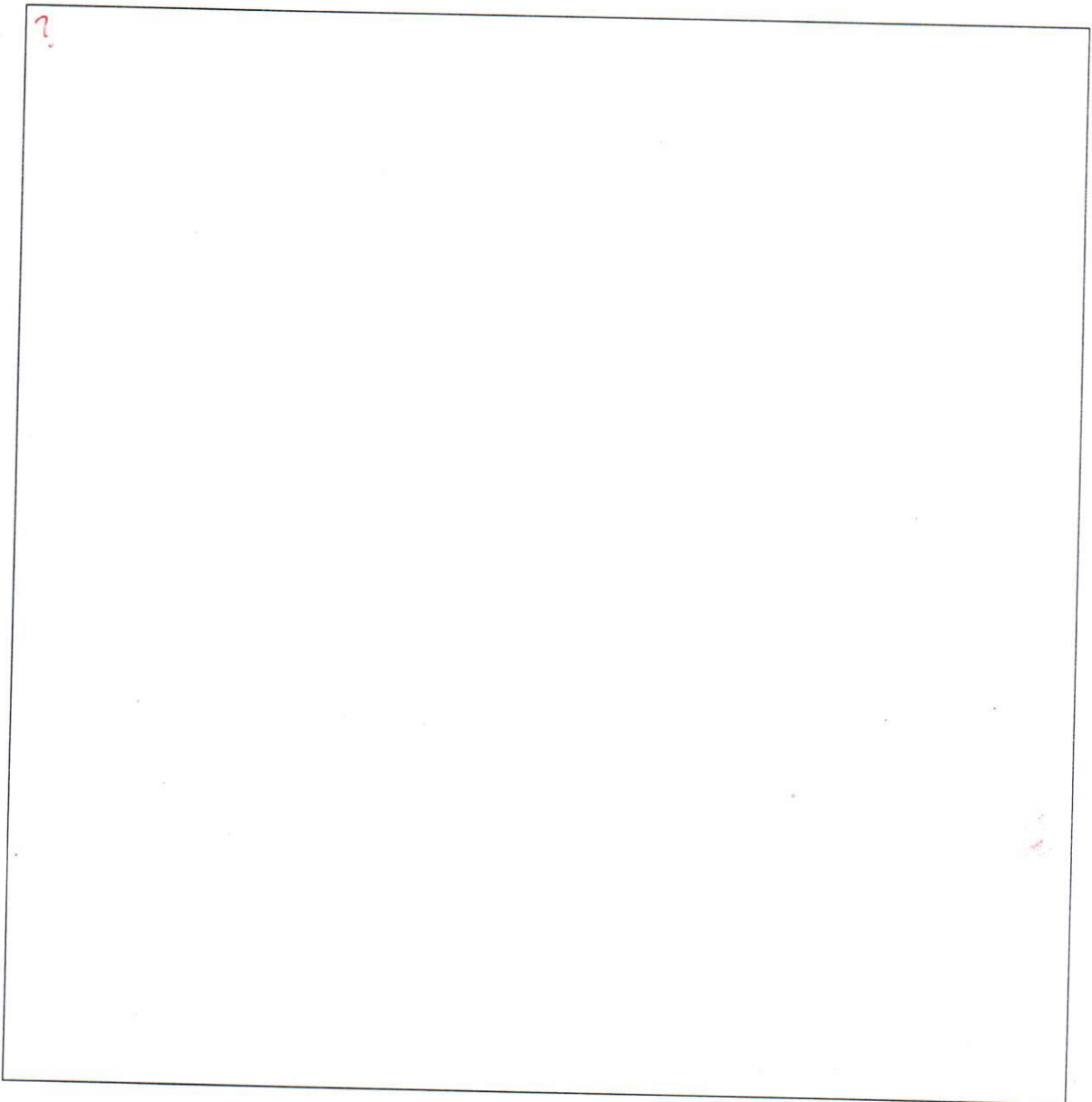
Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

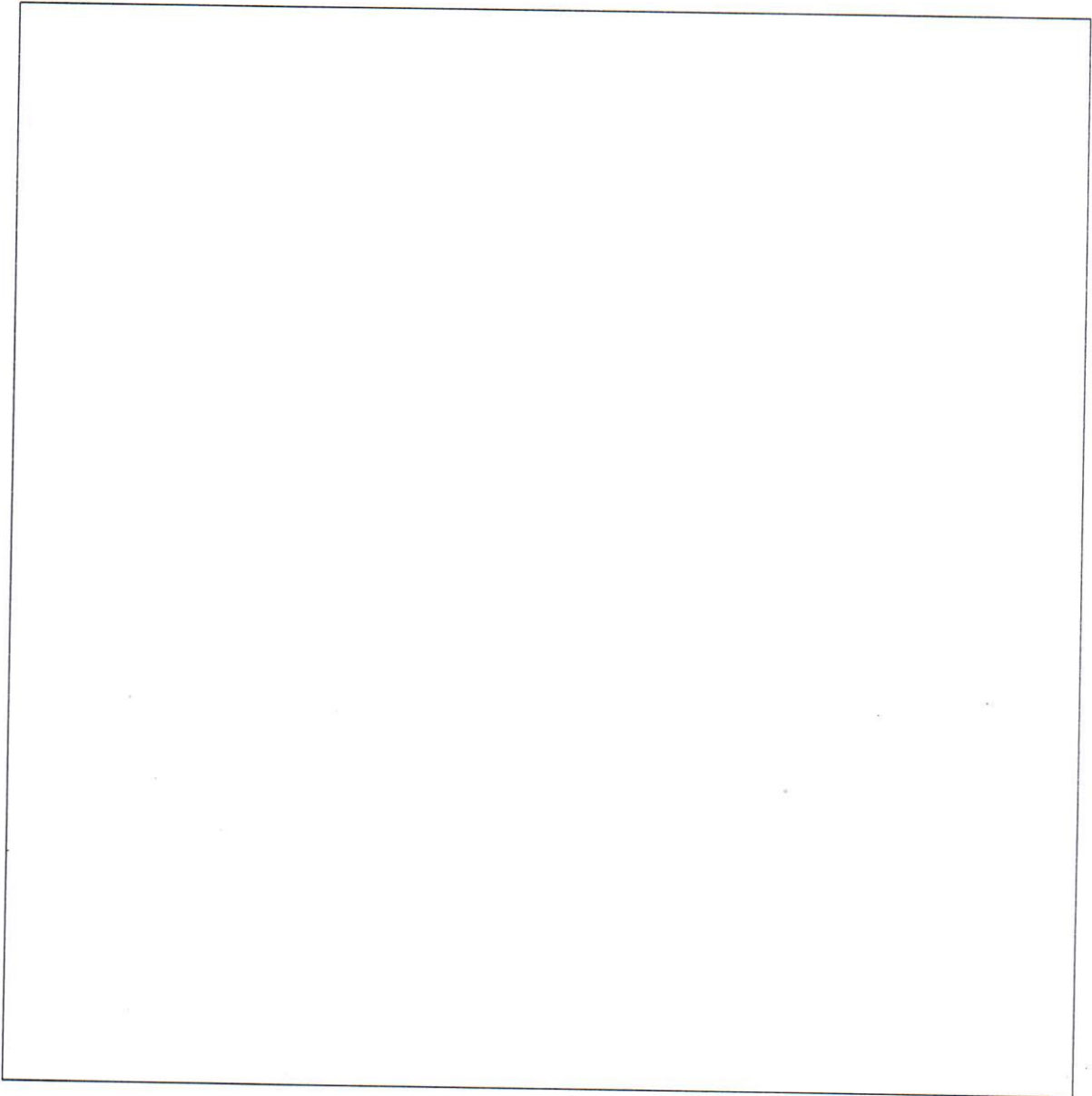
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

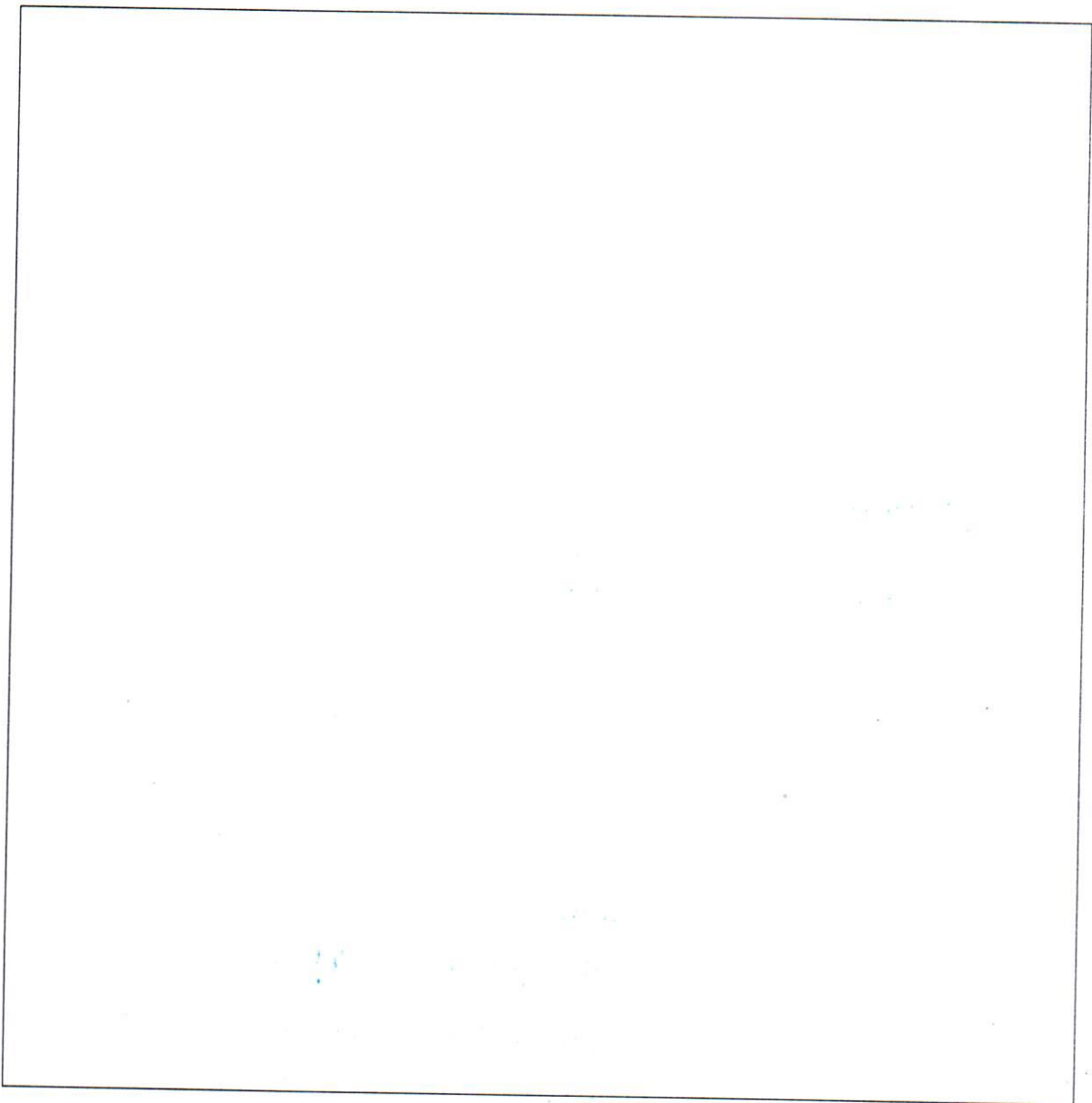
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

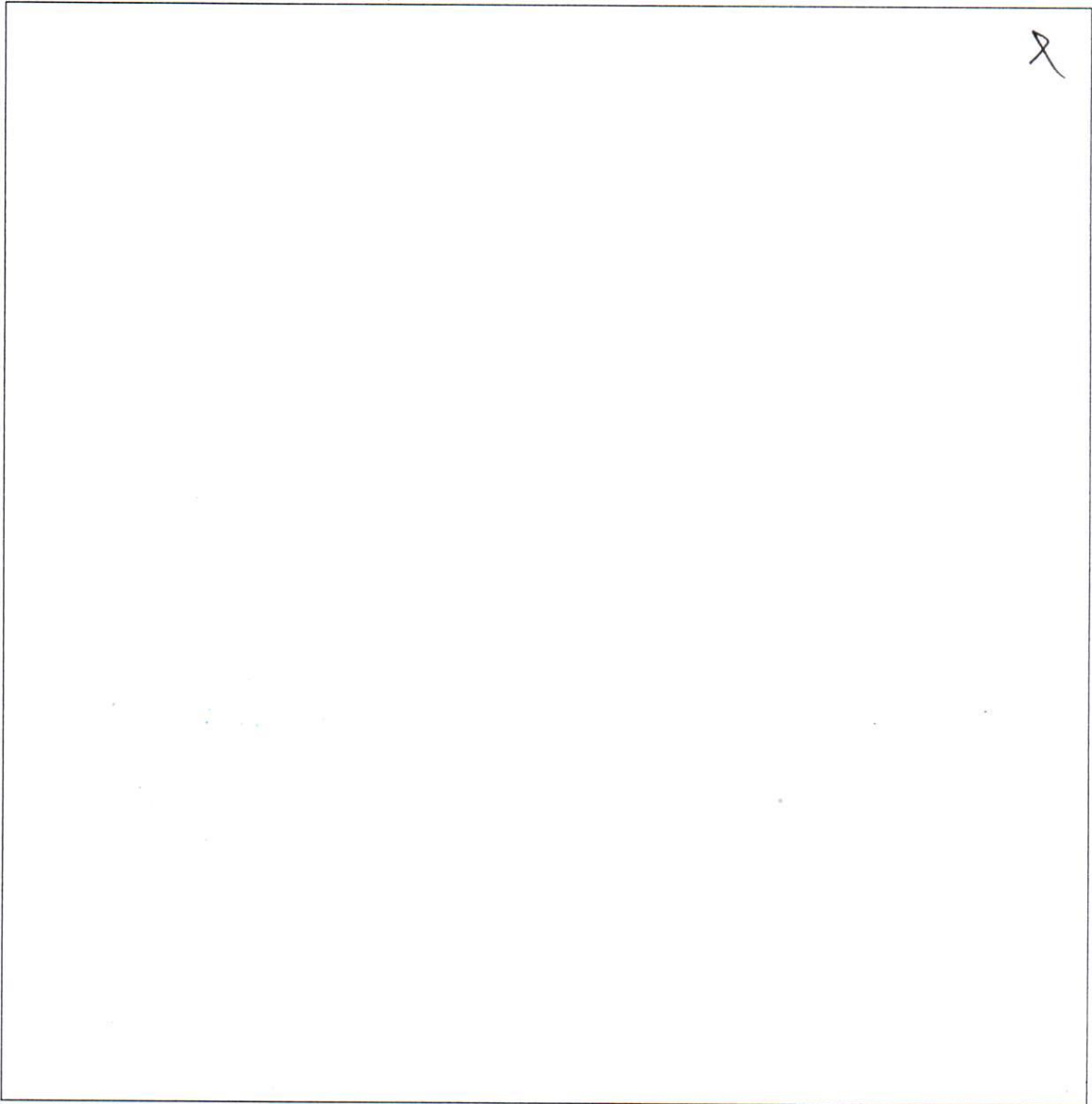
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



# I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

