X É IRRACIONAL SSE $X \in \mathbb{R}$ E NÃO PODE SER ESCRITO NA FORMA DE $X = P/Q$, "TAL QUE"? $P, Q \in \mathbb{Z}$

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

~~O X É IRRA PARA X IRRACIONAL~~, $X \in \mathbb{R}$, ~~NÃO EXISTE UM P NEM Q INTEIROS~~

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\underbrace{\cancel{\neg(x \in \mathbb{R}) \wedge}}_{\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}!} \exists_p \exists_q [p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge \neg(q=0) \wedge x \cdot q = p]$

por que a necessidade disso??

B

Considere as 52 cartas de algum baralho. Compare com a Provinha 0 de 2017.1.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $\binom{52}{4} = \frac{52!}{(52-4)!\,4!} = \frac{52!}{48!\,4!}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $2 \cdot \frac{26!}{22!\,4!}$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(I) COMO $a|a$ É $a \cdot K = a$ ONDE $K \in \mathbb{Z}$, ~~TEMOS QUE~~ FAZEMOS $K = -1$

$a \cdot (-1) = -a$, ONDE $-1 \in \mathbb{Z}$. LOGO $a | -a$

(II) COMO $a \cdot p = b$ E $b \cdot q = c$, VOU MOSTRAR $a|c$

o que é p? ?

~~$a \cdot p = c$~~

~~$a \cdot p = b\,q$~~

$\boxed{a = c}$ por que $a=c$?

$= b \cdot q$

$= (a \cdot p) q$

$= a (p \cdot q)$

∴ LOGO $a|c$

D

C

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

(~~SEJA $K \in \mathbb{Z}$ $N^2 - 1$ NUNCA VAI SER PRIMO~~.
~~POIS, $N^2 - 1 = (N-1)(N+1)$~~) APENAS PARA OS NÚMEROS
(2 E -2) $N^2 - 1 = (N-1)(N+1)$, PARA TODOS OS DEMAIS
CASOS $N^2 - 1$ É A MULTIPLICAÇÃO DE DOIS NÚMEROS
DIFERENTES NÃO SENDO nem ELE PROPRIO NEM 1. (nem -1, nem...)

(não faz sentido essa frase.)

NÃO ESTA PROVADO.

(a ideia é correta)

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & (\text{mod } m) \\ x \equiv 1 & (\text{mod } n) \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \quad (\text{mod } mn)$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

COMO $M \mid X - 1$ E $N \mid X - 1$

$MP = X - 1$ $\quad$ $NQ = X - 1$

introduza/declare tuas variáveis!!

~~$MP + 1 = X$~~ QUERO MOSTRAR $MN \mid X - 1$

PARA $P = N$ OU $Q = M$, TEMOS

~~$MN(P+Q) = X - 1$~~

$MN = X - 1$

$MN \mid X - 1 = X \equiv 1 \ (\text{MOD } MN)$

de onde tu tirou essas igualdades?!

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

VOU FAZER A PROVA POR INDUÇÃO EM N

BASE N = 0 isso é o que tu queres provar!

$\boxed{\sum_{i=0}^{0} F_0 = F_{0+2} - 1} = F_2 - 1 = F_1 + F_0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$

$F_0 = 0$ [cuidado na escrita]

SEJA UM $K \in \mathbb{Z}$, ~~VOU~~ ~~SUPONHA~~ tal que $\sum_{i=0}^{K} F_i = F_{K+2} - 1$ (H.I.)

(VOU PROVAR PARA K + 1)

$\sum_{i=0}^{K+1} F_i = \left(\sum_{i=0}^{K} F_{K+2}\right) + F_{K+1}$ ~~(HI)~~ PROPRIEDADE SOMATORIO

i

$= F_{K+2} - 1 + F_{K+1}$ (HI)

$= (F_{K+2} + F_{K+1}) - 1$ (ASSOCIATIVA E COMUTATIVA) + DEF DE F_N

$= F_{K+3} - 1$

ASSIM!

$\therefore$ LOGO $\sum_{i=0}^{N} F_i = F_{N+2} - 1$

pleonasmo

"para todo $n \in \mathbb{N}$,"

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

3 → PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTÓRIO UNITÁRIO DE PRIMOS. $\prod_{i=1}^{1} 3$

1 → PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTÓRIO VAZIO $\prod_{i=1}^{0} 3$

daria sim...

0 → NÃO PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTÓRIO DE PRIMOS POIS PARA SER Ø, PELO MENOS UM TERMO PRECISA SER Ø E ZERO NÃO É PRIMO. [cuidado com o símbolo Ø.]

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

o que é N?

PROVA FEITA PELO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA FORTE. (não parece).

SUPONHA QUE N POSSA SER ESCRITO NA FORMA

não apareceu nenhum p.

$N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_N$, PRIMOS, ONDE $P \in \mathbb{Z}$; DA MESMA MANEIRA $N = q_1 q_2 q_3 \cdots q_N$, PRIMOS, ONDE $Q \in \mathbb{Z}$.

similarmente...

TEMOS QUE $0 < p < N$

$0 < q < N$

teu Capslock tá bugado, cuidado!

$N = (p_1 p_2 \cdots p_N)(q_1 q_2 \cdots q_N)$

matemática é case-sensitive, font-sensitive, boldness-sensitive, em geral, tudo-sensitive!

realmente...

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $\binom{52}{4}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \&\ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid -a \Leftrightarrow \exists q$ tal que $-a = a.q$ com $q \in \mathbb{Z}$ que pode ser descrito sendo $(-1).a = a.q$, tomando $q = -1$ temos que $(-1).a = a.(-1)$ Desta forma temos $a = a$. Portanto $a \mid -a$ com $q = -1$.

ok

???

CUIDADO!
Pelo fato que tu chegaste numa verdade $(a=a)$ tu não poder concluir nada!

Suponha que $a \mid b$ e $b \mid c$, desta forma temos que $b \overset{(I)}{=} a.q$ e $c \overset{(II)}{=} b.q'$ com q e $q' \in \mathbb{Z}$, substituindo I em II temos $c = (a.q).q'$ que equivale a $c = a.q^2$ tendo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k = q^2$ chegamos a $c = a.k$ o que implica em $a \mid c$. Portanto se $a \mid b$ e $b \mid c$ ~~logo~~ então $a \mid c$.

robou o '.

ok

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

$n = 2$

tome n^2-1 com $n \in \mathbb{Z}$, desta forma temos que $\forall p \in \mathbb{Z}$ tal que $\neg(p|(n^2-1))$ temos n sendo primo.

? ?

. Mesmo.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & (\text{mod } m) \\ x \equiv 1 & (\text{mod } n) \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \quad (\text{mod } mn)$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Suponha $x = 5$, $m = 2$ e $n = 4$, desta forma temos

$5 \equiv 1 \bmod 2$ e $5 \equiv 1 \bmod 4$ que equivale a $\begin{cases} 2 | 5-1 = 0 \\ 4 | 5-1 = 0 \end{cases}$

??

no entanto ao efetuar "$5 \equiv 1 \bmod 2.4$" temos que $\{8 | 5-1$ o que não é verdade; Portanto a afirmação é inválida "8"

OK

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0\\
F_1 &= 1\\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, $\underbrace{1, \text{ e } 0}_{\text{Primos??}}$, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

Não!!

RESPOSTA.

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ ✓

$\boxed{1} \cdot 3 = 3$

$\boxed{1} \cdot \boxed{1} = 1$

1 não é primo.

não Existe números primos que multiplicados sejam iguais a "0"

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

é exatamente isso que queremos explicar aqui.

(não use aspas assim)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

parece IP address ip.
(use · para multiplicação)

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: 52.51.50.49

Seria correto se a ordem importasse.

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

NUNCA use o "|" como "t.q."

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a(-1) = -a$

(i) $a|-a \rightarrow \exists K \boxed{|} aK = -a$ FAZENDO: $K = -1$ "tome" LOGO: $(-1).a = -a$ ~~$a = -a$~~ PORTANTO, $a|-a$

(ii) Sejam K e q inteiros tal que (tais): $ak = b$ e $bq = c$

$\rightarrow a(Kq) = c$

COMO K.q FORMARAM UM (É) INTEIRO LOGO TEREMOS QUE $a|c$.

pleonasmo

evite o uso dessas Setinhas!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

O teorema fundamental da aritmética diz que apenas inteiros ~~são~~ primos podem ser escritos como produto de primos. logo, 3 não pode.

J

Não... (veja tua prova.)

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

3 é primo.

RESPOSTA.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad$ $3 = 3$

O "1" e o "0" NÃO PODEM SE REPRESENTADO POR PRIMOS POIS NÃO EXISTEM PRIMOS MENORE QUE 2.

PODE-SE CONSIDER: infinitos representações de produtorios de si mesmo $1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \ldots$

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).*

PROVA.

por que isso justifica tua tese?

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

sse NÃO EXISEM a e b INTEIROS ~~TAL~~ TAIS QUE $x = \frac{a}{b}$

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\cancel{\exists a, b \in \mathbb{N}}$ $\cancel{\exists a, b \in \mathbb{N}\ x = \frac{a}{b}}$ $\exists a b \in \mathbb{N}\ x \cdot a = b$

não tem esse simbolo.

preconceito com os negativos?

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!48!}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $4 \times \binom{13}{4} = 4 \times \frac{13!}{9!.4!} = \frac{13!}{9!.3!}$ "✓"

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \&\ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid -a \Rightarrow -a = k \cdot a, k \in \mathbb{Z}$ para algum

~~SE ASSUMIRMOS~~ tomando $k = -1$,

CHEGAMOS A UMA IGUALDADE VÁLIDA

$a \mid b \Rightarrow b = ka, k \in \mathbb{Z}$

$b \mid c \Rightarrow ka \mid c$

$c = l.k.a, l \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\frac{c}{a} = l.k}$ não é valido se $a = 0$!

$\frac{c}{a}$ É UM INTEIRO. × $\frac{3}{2}$ não é inteiro

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

COMO $n^2 - 1$ É UM PRODUTO DE INTEIROS, ESSE NÚMERO SÓ PODE SER PRIMO SE UM DOS fatores for 1 (ou −1!) SE TOMARMOS $n + 1 = 1$, TEREMOS QUE $n^2 - 1 = -1$, UM NÚMERO NÃO PRIMO. RESTANDO APENAS O CASO EM QUE $n - 1 = 1$, QUE LEVA A $n^2 - 1 = 3$

(faltou o $n = -2$).

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

CONTRA-EXEMPLO:

$X = 31$
$n = 6$
$m = 10$

Verifique que realmente é!!

?

tu precisas:

① $31 \equiv 1 \pmod{10}$

② $31 \equiv 1 \pmod{6}$

③ $31 \not\equiv 1 \pmod{60}$

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

0 ∈ ℕ.

CASO BASE: 1

$$\sum_{i=0}^{1} f_i = f_3 - 1$$

$$0 + 1 = 2 - 1$$

$f_0 = 0$
$f_1 = 1$
$f_2 = 1$
$f_3 = 2$
$f_4 = 3$

HIPÓTESE:

PARA ALGUM n, $\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$

PASSO:

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = f_{n+3} - 1 \quad \boxed{\Rightarrow}$$

$$\cancel{f_{n+1}} + \sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} + \cancel{f_{n+1}} - 1 \quad \boxed{\Rightarrow}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

VERDADEIRO PELA HIPÓTESE

CUIDADO!
com essa direção, você tá supondo o que tu queres provar, e concluindo algo que já tens!

~

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$3 = 3$

$1 = \prod_{P_i \text{ primo}} P_i^0$

0 NÃO PODE SER ESCRITO COMO PRODUTO DE PRIMOS, JÁ QUE NÃO É UM NÚMERO NATURAL. Aqui $0 \in \mathbb{N}$ sim!

1 NÃO PODE SER ESCRITO COMO PRODUTO DE PRIMOS PORQUE ELE É MENOR QUE O MENOR PRIMO

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

~~TODO NÚMERO NATURAL~~

~~CASO~~

CASO BASE: 2 PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTO DE PRIMOS (ELE PRÓPRIO)

HIPÓTESE:

PARA TODO $x \in \mathbb{Z}$, $2 \leq x \leq n$ (n SENDO ALGUM INTEIRO), x PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTO DE PRIMOS

PASSO: SE OLHARMOS PARA $n+1$, TEMOS QUE ELE É UM PRIMO OU COMPOSTO. SE FOR PRIMO, EXISTE UM PRODUTO DE PRIMOS QUE O REPRESENTE (ELE PRÓPRIO). CASO CONTRÁRIO, ELE PODE SER ESCRITO COMO $a b$ COM a E $b \in \mathbb{Z}$ E $1 < a, b \leq n$ E, PELA HIPÓTESE, TEMOS QUE a E b PODEM SER ESCRITOS COMO PRODUTO DE PRIMOS.

Muito bem!

Veja também o gabarito!

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

b) Suponha que $a|b$ e $b|c$ é verdade.
Pela def de divisibilidade temos que, ↳ pleonasmo
$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak_1$ e $c = bk_2$
então $c = a(k_1k_2)$ ✓
Como o produto de k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, isso implica que $a|c$ F
Logo, $a|b$ e $b|c \to a|c$ é verdade

O fato de aparece o "a" na decomposição do "c" que indica que ele divide o "c" ✓

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod{m} \\ x \equiv 1 & \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Suponha que $x \equiv 1 \pmod{m}$ é verdade
$x \equiv 1 \pmod{n}$

Pela def de congruência ~~$x-1 \mid m$~~ e ~~$x-1 \mid n$~~ F $m \mid (x-1)$ e $n \mid (x-1)$

pela def de div, $\exists k_1, k_2$ tal que $m = (x-1)k_1$ e $n = (x-1) \cdot k_2$

2

então $mn = (x-1)k_2 \times k_1$

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

~~0~~ Para 0 não é possível por que?

Para 3 não é possível pois 3 é um numero primo F $\prod_{i=1}^{1} 3$

Para 1 não é possível pois ele teria que resulta de uma multiplicação de um numero maior que 1. F

$\prod_{i=1}^{0} 3$??

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF) *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

sim ;)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

13

RESPOSTA: $C_{52,4} = \frac{52!}{4!\,48!}$ | ? $\frac{51 \cdot 25 \cdot 49}{3}$

~~ACHO QUE NÃO~~ JOVEM...
ACHO QUE NÃO JOVEM...

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

(Quase)

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $-a = k \cdot a \to k = -1$ Já que existe um inteiro [illegible] que satisfaz [illegible] verdade

se $a=0$??

OK

ii) $b = ka \to c = q \cdot k \cdot a$
$c = q \cdot b$

O fato de aparecer o "a" na composição do "c" mostra que ele divide o "c"

OK

sem aspas ;)

dá ideia que é única

Stick to the definition!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

Resposta & Prova.

Apenas para $\overset{0}{2}$ e $-\overset{0}{2}$.

$n^2 - 1 = n^2 - 1^2 = (n+1)(n-1)$

→ Tem que ser impar o resultado pois exceto o "2" todos os primos são impares e na multiplicação os 2 tem que ser impares

NÃO SOU CAPAZ DE OPINAR.

como isso prova que n^2-1 não é primo se $n \notin \{2,-2\}$?

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

$m \mid x-1 \rightarrow x-1 = k_1 . m \rightarrow x = k_1 . m + 1$

$n \mid x-1 \rightarrow x-1 = k_2 . n \rightarrow x = k_2 . n + 1$

$k_1 . m + 1 = k_2 . n + 1$ $\qquad$ $x = mn + n$

$k_1 . m = k_2 . n$

NÃO SOU CAPAZ DE OPINAR.

??

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

cuidado com a direção!!

PROVA.

Caso base ($m = 0$)

$\sum_{i=0}^{0} f_i = f_{0+2} - 1 \boxed{\rightarrow} f_0 = f_2 - 1 \boxed{\Rightarrow} 0 = f_1 + f_0 - 1$

$0 = 1 + 0 - 1$

- verdadeiro

Passo Indutivo: No caso base eu provei que a expressão é verdadeira para $m=0$, ~~falta provar que ela é válida para um valor qualquer, "k", e~~ se é válida para "k" também é válida para o seu sucessor "k+1".

Hipótese: $m = k$

$\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$

$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$

Tese $\boxed{k = k+1}$

$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1+2} - 1 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^{k} F_i}_{\text{Hipótese}} + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

$F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = \underbrace{F_{k+3}}_{\text{Hipótese}} - 1$

$F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+2} + F_{k+1} - 1$

NÃO SOU CAPAZ DE OPINAR

ideia correta mas a forma de "indução" é errada.

k núnca será igual ao k+1 !!

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 9 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$3 = \boxed{1} \prod_{i=1}^{1} 3$

não é primo

O zero "0" não pode ser reescrito como um produtório de primos pois para que uma multiplicação dê igual a "0" necessita da presença do "0" mais ele não é primo.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

Caso Base $n = 2$

$2 = \prod_{i=1}^{1} 2$

Passo Indutivo: tu provei o caso base, falta provar para um valor qualquer "k" (?) se é válida para o seu sucessor "k+1". para "k" é válida

que?

Hipótese $n = k$

$k =$

X

("se é válida a... quem?)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

$\forall_x \left[x \in \mathbb{R} \mid \exists_p \nexists_q \in \mathbb{Z} \left(x = \frac{p}{q} \right) \right]$

(português!!!)

exato!!

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\forall_x \exists_p \exists_q [\quad p = x \cdot q \rightarrow \boxed{(p \wedge q)} \in \mathbb{Z}]$

$q = 0$

$p = x \cdot q \Rightarrow x = \frac{p}{q}$

começando assim já perdeu qualquer chance de afirmar algo sobre o x!!

a conjução dos... ...inteiros p e q??

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $\binom{52}{4}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $2 \cdot \binom{26}{4}$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) $a \mid -a \Leftrightarrow \boxed{a \cdot q = -a \quad (q \in \mathbb{Z})}$

$\Leftrightarrow \boxed{a \cdot (-1) = -a}$

essas duas affirmações não são equivalentes!!

como $-1 \in \mathbb{Z}$, $a \mid -a$.

(ii) $\boxed{a \mid b \;\&\; b \mid c \Rightarrow a \mid c}$

$a \mid b \;\&\; b \mid c \Rightarrow a \cdot q = b \;\&\; b \cdot p = c \quad (q \;\&\; p \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow b \cdot p = c$ (? de onde veio?)

$\Rightarrow a \cdot q \cdot p = c$

daqui:

$\Rightarrow q \cdot p \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \mid c$

ideias certas mas...

leia com calma!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

Não.
Contra-exemplo : $n = 0$.
$0^2 - 1 = -1$ (não é primo).
(Isso prova/ne ignore

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

$m = 6$, $n = 2$, $x = 7$

~~$x \equiv 1 \pmod m \Rightarrow m \mid (x-1)$~~ ~~Alvo: $mn \mid (x-1)$~~

~~$x \equiv 1 \pmod n \Rightarrow n \mid (x-1)$~~

~~$\therefore m \mid (x-1)$ & $n \mid (x-1) \Rightarrow m \cdot p = x-1$ & $n \cdot q = x - 1$ $(p, q \in \mathbb{Z})$~~

~~$\Rightarrow mp = nq$~~

~~$\Rightarrow m \mid nq$~~

~~$\Rightarrow mp \cdot nq = (x-1)(x-1)$~~

~~$= x^2 - 2x + 1$~~

Assumindo os valores:
$m = 6$, $n = 2$ e $x = 7$
encontramos um contra exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 6 \mid 7-1 \\ 2 \mid 7-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \mid 6 \text{ e } 2 \mid 6$$

Calculando:
$12 \cdot x = 6$
$x = \frac{6}{12}$
$\therefore x \notin \mathbb{Z}$
$\therefore 12 \nmid 6$

(Cuidado na escrita)

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA. $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_k$

Por indução:

Base ($n=0$): $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_{0+2} - 1 \Rightarrow F_2 - 1 = F_1 + F_0 - 1 = 0$.

Passo indutivo: Vou provar que

Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1}_{\text{H.I.}}\Big) \Rightarrow \Big(\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1\Big)$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \sum_{i=0}^{k} F_i + F_1 \quad \text{(def. } \Sigma)$$
k+1
$$= F_{k+2} - 1 + F_1 \quad \text{(H.I.)}$$
$$= F_{k+2} - 1 + 1$$
$$= F_{k+2}.$$

começou bem mas,...

$F_{k+3} - 1 = F_{k+3} \big(\quad \big) - F_1$

$= F_{k+2}$???

X

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$3 = 3$

$1 \Rightarrow$ seria o produtório vazio, ~~pois 1 não é primo~~

$0 \Rightarrow$ não pode ser escrito como produtório de primos.
Só podemos escrever como produtório de primos os números diferentes de zero. porque...?

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\exists x \neg (\in \mathbb{N}) \wedge \neg (\in \mathbb{Z})$

Sintaxe incorreta!

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

seria certo se a ordem importasse.

RESPOSTA: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6.497.400$ ~~[illegible]~~ POSSIBILIDADES.

ninguém merece!! :(

52
×51
52
260
2652
×50
0
13260
132600
×49
1193400
530400
6497400 | 2
04 3248700
09
17
14
000

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $6.497.400/2 = 3.248.700$ POSSIBILIDADES

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

o que são?

(II) $a|b$ e $b|c \Rightarrow a|c$

$a|b \Leftrightarrow a \cdot \boxed{K} = b$

$b|c \Leftrightarrow b \cdot \boxed{L} = c \rightarrow b = \frac{c}{L}$

$a \cdot K = b \rightarrow a \cdot K = \frac{c}{L}$

se 0?

$a \cdot \underbrace{K \cdot L}_{m} = c$

$a \cdot m = c$

$a | c$

$K, L, m \in \mathbb{Z}$.

Poderia ser usado a distributividade, da seguinte forma

$b \cdot l = c \Rightarrow (a \cdot K) \cdot l = c$
$\Rightarrow a \cdot (K \cdot l) = c \Rightarrow K \cdot l = m$
$\Rightarrow a \cdot m = c$

(I) $a | -a \Leftrightarrow aK = -a$

$\boxed{L} \rightarrow K \in \mathbb{Z}$

$aK = -a$

$aK = a \cdot (-1)$

$\frac{\cancel{a} \cdot K}{\cancel{a}} = -1$

se $a = 0$?

$K = -1$ Logo $K \in \mathbb{Z}$

o que significa isso??

?

não use setinha e notação improvisadas!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2.2.3.3$

3	3
1	

$3 = 3$

1 e 0 não pode ser escrito por uma multiplicação de números primos pois não existe números primos que multiplicados possam assumir esses valores.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

CUIDADO

aqui você tá dizendo:

« não pode acontecer o X,

pois X é algo que não pode acontecer".

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

use $52 \cdot 51 \cdots$ para a multiplicação.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = \cancel{649740}$

× Para esse resultado a ordem de cartas deveria importar.

perfeito

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $2(26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23) = \cancel{717400}$

× seria $4 \cdot \left(\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!}\right)$

"✓"

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

use "existe" mesmo.

Definição: $a | b$ sse $\exists k \in \mathbb{Z}$, t.q. $a . k = b$ ✓

(I) Pela definição;

$a | -a$ sse $\exists k \in \mathbb{Z}$, t.q. $ak = -a$

$ak = -a$

$k = -\frac{a}{a}$

$k = -1$

Logo, a sentença é verdadeira. ✓

essas afirmações parecem do nada.

(veja gabarito)

(II) Supondo que $a|b$ e $b|c$, ou seja:

$\boxed{\cancel{a|b \text{ sse}}}$ $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$, t.q. $a . k_1 = b$

$\boxed{\cancel{b|c \text{ sse}}}$ $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$, t.q. $b . k_2 = c$

Para provar que $a|c$ temos que chegar a:

$\boxed{\cancel{a|c \text{ sse}}}$ $\exists k_3 \in \mathbb{Z}$, t.q. $a k_3 = c$

Substituindo as igualdades, temos c como: $c = b . k_2$

$c = a \underbrace{k_1 k_2}_{k_3}$

$c = a . k_3$

Com isso, provamos a sentença. ✓

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0\\
F_1 &= 1\\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

- $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ✓
- $3 = 3^1$. ✓

✓

- Já para 1 e 0 não é possível por causa da definição de número primo, que diz:

n é primo sse $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 1$ e...

não por esse motivo

exato...

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

x é irracional se não existem k1, k2 inteiros que satisfação o seguinte: x pode ser escrito como uma divisão de k1 pelo k2, para k2 diferente de zero. [muito texto!]

isso não é redundante?

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. [pense].

Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\exists k1, k2 \in \mathbb{Z}\ [\underbrace{\neg(k2 = 0)}_{\text{redundante}} \Rightarrow x = k1 / k2]$

não tem!

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b\ \&\ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) a, b ∈ ℤ (hip)
$\boxed{\text{seja } b = -a\ (1)}$
tome z ∈ ℤ t.q. z = −1 (2)
concluo a · −1 = b, por (1) e (2). (4)
conclua a | −a, por (4) e (div).

(ii) Prova direta
Suponha a|b e b|c. (1)
Conclua a·z1 = b e b·z2 = c, z1, z2 ∈ ℤ
↳ Apenas hipótese

...?

b já foi declarado!

ideia correta mas escrita erroneamente.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod{m} \\ x \equiv 1 & \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

começando assim perdemos qualquer esperança/chance de conseguir afirmar algo sobre o objeto x.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

$\exists x \in \mathbb{R}, \neg(\exists u \in \mathbb{Z} \wedge \exists v \in \mathbb{Z})$ tq, $x = \frac{u}{v}$. X PORTUGUÊS matemático SIM!!

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: ~~$\exists x \in \mathbb{R}, x = \frac{u}{v}$~~ $\exists x \in \mathbb{R} \exists u \in \mathbb{Z} \exists v \in \mathbb{Z}$, tq. $x = \frac{u}{v}$ X

utilização de outros símbolos (v, u, —)

sim

não: temos uma infinidade de variáveis.

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $C\binom{52}{4}$ ✓

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $4 \cdot \frac{C\binom{13}{4}}{C\binom{52}{4}}$ X X

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \&\ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $a|-a$ sse $a \cdot k = -a$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

~~como podemos~~

você não tem isso!!

$\boxed{a \cdot k = -a}$ como -1 é um valor inteiro sabemos que $a|-a$ ~ ✓

$k = \frac{-a}{a}$ e se $a=0$?

$k = -1$

ii) como $a|b$, ganhamos que $b = a \cdot q$, $q \in \mathbb{Z}$ (*)

como $b|c$, ganhamos que $c = b \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$. (**)

$\boxed{a|c} \Rightarrow c = a \cdot w$, $w \in \mathbb{Z}$

$b \cdot t = a \cdot w$ (**)

$a \cdot q \cdot t = a \cdot w$ (*)

→ como temos o a multiplicando dos dois lados, logo $a|c$. pois c é multiplo de a.

X "a|c" e "c é multiplo de a" são 100% sinônimos!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

como $n^2-1 = (n+1)(n-1)$ ou -1

teremos o produto de dois números e que para n^2-1 ser primo um dos números deve ser 1, já que primos só são divisíveis por 1 ou por eles mesmos.

nesse caso: n só pode ser 0 ou 2, mas para ? $n=0$, teremos $1 \cdot (-1)$, portanto o n só pode ser 2. tem razão!

Verifique que 2^2-1 é primo!

(Faltou o $n := -2$).

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Prova.

caso base: $n = 0$

$\cancel{f_{0+2} = f_{0+1} + f_0}$

$\cancel{f_2 =}$

$\boxed{\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.}$?

$\sum_{i=0}^{0} f_0 = f_{0+2} - 1$ → não tens isso!

$0 = 1 - 1$

$0 = 0$ → Sim, $0=0$, nem precisamos Fibonacci para saber disso!

passo indutivo $\sum_{i=0}^{k} f_i = f_{k+2} - 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$

H.I → NÃO! Supomos que é válido para algum $k \in \mathbb{N}$.

Prova $\sum_{i=0}^{k+1} f_i = f_{k+1+2} - 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} f_i = \sum_{i=0}^{k} f_i + f_{k+1}$$
$$= f_{k+2} - 1 + f_{k+1} \quad (\text{H.I})$$
$$= f_{k+2} + f_{k+1} - 1$$
$$= f_{k+3} - 1 \quad (\text{Def. Fibonacci})$$

(o que faltou para ser 100% correto?)

✓

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ou $2^2 \cdot 3^2$

$3 = 3$

$1 =$ qualquer primo elevado a 0. ~

$0 =$ não pode escrito como o produto de primos pois a única maneira de zero ser o resultado de uma multiplicação seria se o zero estivesse na multiplicação, mas o zero não é primo.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).*

PROVA.

~~Supondo que em meu conjunto A estão presentes todos os números primos existentes.~~

~~$A = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$~~

~~É fácil encontrar um absurdo, porque o número $(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n) + 1$, não é divisível por nenhum dos primos do conjunto A e portanto também é um número primo.~~

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: ~~30 maneiras possíveis~~ X não há um cálculo que justifique a resposta

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: ~~26 cartas vermelhas; 26 cartas pretas~~

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

?

isso é o que queremos provar!

$a \mid -a$ significa dizermos que $a \mid a \cdot (-1)$. Logo, $a \in \mathbb{Z}$. Então é sabido que um inteiro qualquer divide a si mesmo, por que? e sabendo-se que um inteiro qualquer é divisível por 1 ou -1, então se conclui que $a \mid a(-1)$

como?

não misture "$\wedge$" com português. use "e" (ou "&".)

Suponha $a \mid b \wedge b \mid c$, então $\exists K, K' \in \mathbb{Z}$ t.q $\underset{(I)}{a \cdot K = b} \wedge \underset{(II)}{b \cdot K' = c}$.

Substituindo (I) em (II) temos $(a \cdot K) \cdot K' = c$, por distributividade temos $a \cdot (K \cdot K') = c$. Seja $K'' = K \cdot K'$; então $a \cdot K'' = c$.

* Falta uma conclusão que $a \mid c$

não precisa dar um nome para o kk'.
Precisa apenas observar que $kk' \in \mathbb{Z}$.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 6 \cdot 6 = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2)$

3 é primo, portanto já esta na forma de produtório de primos

1

0 não é primo, pois não pode dividir a si mesmo

(realmente não é, mas o que isso tem a ver com a pergunta?)

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

- Definiu o termo "racionalizado" mas nem o usou depois.
- Escreveu três vezes a mesma coisa.

(veja gabarito)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

Assuma que racional é todo número que pode ser racionalizado, escrito no formato $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, irracional é todo número que não pode ser escrito na forma a/b. Logo, dizer que "o número real x é irracional" significa dizer que x não pode ser escrito na forma a/b. ~

??

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\cancel{x \in \mathbb{R} \iff x = \frac{a}{b} \ \forall\ a, b \in \mathbb{Z}}$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

o que é isso? (tem um "type error" aqui...)

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $C_{52,4} \Rightarrow \frac{52!}{48!\,4!}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $C_{52,4}/2 \Rightarrow \frac{52!}{48!\,4!\,2}$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) $a / -a \iff$ existe $K \in \mathbb{Z}$, t.q., $aK = -a$. ~
Se $K \in \mathbb{Z}$ e $ak = -a$, então $K = -1$... e se não!? (ideia correta mas escrita erroneamente)
Portanto, $a / -a$.

(ii) a/b e $b/C \Rightarrow a/C$
$a/b \iff b = a \cdot K$, $K \in \mathbb{Z}$ (I)
$b/C \iff C = b \cdot l$, $l \in \mathbb{Z}$ (II)

Substituindo I em II, temos
$C = a \cdot \underbrace{K \cdot l}_{\in \mathbb{Z}}$
Portanto, a / C.

aqui ideia e escrita corretas!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod{m} \\ x \equiv 1 & \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

pra que isso?

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

Resposta.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$3 = \cancel{2^0} \cdot 3^1$

~~1~~ 1: Não é possível. Pois qualquer número (primo ou não) elevado à 0 é igual à 1. (E daí?)

0: Não é possível. Pois o produto de uma multiplicação só será 0 quando uma de suas parcelas também o for. E como 0 não é primo, da mesma forma que nenhum primo elevado à n, $n \in \mathbb{Z}$ pode ser 0. 0 não pode ser escrito como produtório de primos.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).*

Prova.

• Base da Indução

Para $n = 2$, $2 = 2^1$, portanto, a base é verdadeira.

• Passo da Indução

supor o que ??

• Hipótese da Indução

Suponha que $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 11^d \ldots$ é verdade para $n = k$, ou seja, $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 11^d \ldots$

• Tese da Indução

X

Cuidado com os pontinhos "..."!

Usamos indução para os eliminar!

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

Um número real x é irracional sse não ~~existir~~ em um inteiro p e um inteiro q ~~tal~~ taiso que ~~X=~~(q diferente de 0) e que x · q = p.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\underbrace{x \in \mathbb{R} \land}_{\text{por que isso?}} \exists p \exists q [p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{Z} \land \neg(q=0) \land x \cdot q = p]$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 - 4 = 48!$??

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: 26

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $a \mid -a$, sse ~~existir~~ existe um $K \in \mathbb{Z}$, tal que $a \cdot K = -a$

PODERIA DIZER QUE
É PARA O CASO $K = -1$

Tá sendo "bonzinho" demais!

O Que tá escrito é apenas a definição! cadê a prova?

ii) Supondo que $a \mid b$ e $b \mid c$
Temos $a \cdot K = b$ e $b \cdot l = c$
para ~~algum~~ alguns K e $l \in \mathbb{Z}$
Preciso mostrar que $a \mid c$
Assim, temos:

$$c = b \cdot l$$
$$= (a \cdot K) \cdot l$$
$$= a(K \cdot l)$$

mostrando que $a \mid c$ pois $\underbrace{K e l}_{K \cdot l} \in \mathbb{Z}$

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

Provando oteorema por indução em n temos:

Caso base $n=0$

$$\sum_{i=0}^{0} F_0 = F_{0+2-1}$$

certo!
cuidado com o "alignment"

$$F_{0+2-1} =$$
$$F_{2-1} =$$
$$(F_1 + F_0) - 1 =$$
$$(1+0) - 1 = 0$$

Hipótese Indutiva:

Seja $K \in \mathbb{N}$, temos:

por que? de onde?

$$\sum_{i=0}^{K} F_i = F_{K+2-1}$$

"Suponha que... para algum $K \in \mathbb{Z}$"

Tese de Indução:

Preciso provar que:

$$\sum_{i=0}^{K+1} F_i = F_{(K+1)+2-1}$$

Assim:

$$\sum_{i=0}^{K+1} = \left(\sum_{i=0}^{K} F_i\right) + F_{K+1} \quad (\text{somatório})$$
$$= (F_{K+2-1}) + F_{K+1} \quad (H.I)$$
$$= (F_{K+2} + F_{K+1}) - 1$$
$$= F_{K+3-1}$$

cuidado: 1 não é primo.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

Resposta.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$3 = \boxed{1} \cdot 3$ ou pode ser escrito como $\prod_{i=1}^{1} 3$

$1 =$ produtório de primos de tamanho 0 ou vazio

$0 =$ não é possível escrever o produtório de 0, pois ele não é um número primo.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

Prova.

36 também não é primo,

mesmo assim...

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $C_{52,4}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b$ & $b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) $a \mid -a$

def.

essa é a definição do que queremos provar.

$-a = a \cdot K$, PARA $K \in \mathbb{Z}$

FALTOU $\boxed{\text{CONCLUIR}}$ QUE

$K = -1$ e $-1 \in \mathbb{Z}$.

(ii). $a \mid b$

$\therefore b = a \cdot K_1$, PARA algum $K_1 \in \mathbb{Z}$.

. $b \mid c$

$\therefore c = b \cdot K_2$, PARA algum $K_2 \in \mathbb{Z}$.

. $a \mid c$

$c = a \cdot K$, PARA algum $K \in \mathbb{Z}$.

$b \cdot K_2 = a \cdot K$

$a \cdot K_1 \cdot K_2 = a \cdot K$

LOGO, $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$

CUIDADO!
a ideia é correta
mas bem-escondida

assim parece um fato,
mas é o que queremos provar.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

FALSA!
TOMANDO $x = 22$, $m = 21$ E $n = 7$.

$22 \equiv 1 \pmod{21}$

$22 \equiv 1 \pmod{7}$

PORÉM $22 \not\equiv 1 \pmod{147}$.

22 não é congruente com 1 mod 147.

C

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

PASSO BASE:

PARA $n = 0$

$F_{(0+2)} - 1 = F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$. ✓

A FÓRMULA É VERDADEIRA.

PASSO INDUTIVO:

H.I.: SUPONHA QUE A FÓRMULA É VERDADEIRA PARA $n = k$, $k \in \mathbb{N}$.

$F_k = F_{(k+2)} - 1$

TESE: PROVAR QUE A FÓRMULA É VERDADEIRA PARA $k+1$

$F_{(k+1)} = F_{(k+3)} - 1$

SABEMOS QUE:

$F_{(k+3)} = F_k + F_{k-1}$

ASSIM:

$F_k + F_{k-1} = F_{k+3} - 1$

$F = F_{k+2} - 1$

?? QUE F É ESSE?

Boa pergunta.

$\boxed{\text{FALTOU CONCLUIR}}$ QUE e pronto.

~~$F_{k+3} - 1 = F_k + F_{k-1}$~~

CONCLUINDO:

$F_{k+3} - 1 = F_{k+2} + F_{k+1} - 1$

$= F_{k+2} + F_{k+1} - F_1$

$= F_{k+2} + F_k$??

$= F_{k+2} + F_{k+2} - 1$

$= \ldots$

AFF! Me enrolei também!

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 \times 51 \times 50 \times 49 = 6\ 497\ 400$

SERIA 4‍8!

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: ~~[illegible]~~ $52 \times 25 \times 24 \times 23 = 746304$

DAS 52 METADE É VERMELHA E A OUTRA METADE É PRETA LOGO, SÃO 26.

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b$ & $b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

~~EXISTE~~
$a \mid b \iff$ EXISTE ALGUM INTEIRO K, TAL QUE $aK = b$
DADA A DEFINIÇÃO ACIMA TEMOS:

(I) $a \mid -a$ SSE ~~a~~ ~~$a \mid -a$~~ $aK = -a$ PARA ~~ISSO~~ tome $K = -1$. algum $K \in \mathbb{Z}$.

(II) ~~ε~~ $a \mid b$ SSE $aK_1 = b$ E $b \mid c$ SSE $bK_2 = c$ } ENTÃO ~~$a\ aK_1K_2 = c$~~ $aK_3 = C$ PARA $K_3 = K_1K_2$

(Cuidado na escrita)

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

X é irracional quando ele não pode ser escrito como uma razão de inteiros. ✓

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: [redacted] $[x \in \mathbb{R}]$[redacted]$[a, b \in \mathbb{Z}]$([redacted] , $b > 0$)

$a = x \cdot b$

?

X

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: [redacted] $52! \cancel{-} 4!$

X

seria mais correto escrever $52-4=48!$

isso é mais errado!
tu quis dizer $(52-4)!$
(veja gabarito)

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: ~~26~~

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

não use esse símbolo como se fosse uma abreviação de "tal que"!!!

PROVA.

$a \mid -a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a \cdot k = -a$ ✓

logo: $k = \frac{-a}{a}$

$k = -1$

$a(-1) = -a, \ldots$

Como [redacted] $-1 \in \mathbb{Z}$, e concluímos que $\exists k \in \mathbb{Z} \mid a \cdot k = -a$

?

estás concluindo algo usando o que tu queres provar?

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

1

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

1

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

?

J

1 não é primo!

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

??

$\cdot\ 3 = 3 \cdot \boxed{1}$ ✓

$\cdot\ 1 = \boxed{1} \cdot \boxed{1}$ C+ (acho que podia ~~acrescentar~~ escrever que 1 é produtório vazio ou = 0.

sim!

· 0 não é possível dividi-lo em um produto de números primos, pois não existe um número primo menor que ele. C+

0 0 não é primo, então não é possível por isso.

$\cdot\ 36 = 2^2 \cdot 3^2$ ✓

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).*

PROVA.

?

isso não é válido para o número 2 também?

isso não é válido para o número 36 também?

Cuidado com tua escrita. (Veja gabarito).

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

Dizer que "o número real x é irracional" significa que o x pode ser escrito em forma de potência. Por exemplo, ~~x^2 é um número irracional.~~ X

Um numero irracional não pode ser escrito como uma razão $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*. Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = \cancel{6497400}$

seria assim se a ordem importasse!

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $a \mid -a$

(a) divide (-a) se existe um inteiro K tal que (-a) possa ser escrito da forma: $(-a = aK)$. $\boxed{\text{Com isso}}$ Temos:

Não! Não temos isso..

$-a = aK$

(-1) $a = -aK$

$K = -\frac{a}{a}$

$K = -1$

ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \Rightarrow a \mid c$

(a) divide (b) se existe um inteiro (K) tal que (b) possa ser escrito da forma: $(b = aK)$

(b) divide (c) se existe um inteiro (x) tal que (c) possa ser escrito da forma: $(c = bx)$. Com isso, Temos:

$c = aKx$

$y = Kx$

$\boxed{\exists y / y \in \mathbb{Z}}$

$c = ay$ $\therefore$ logo $a \mid c$

é $\therefore$

pleonasmo.

① Aqui você tá apenas afirmando que existem inteiros.

② NUNCA use o símbolo "|" assim como se fosse abbr. de "tal que".

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \;\&\; b \mid c \implies a \mid c$.

muito bem.

PROVA.

ii) Pelo teorema da divisibilidade, sabemos que se $a|b$ então $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a.q$ (i) Da mesma forma, se $b|c$, então $c = b.q$ (ii)
Substituindo (i) em (ii), temos que $c = (a.q).q$, ou seja $c = a.q^2$. Portanto, $a|c$.

Não tem como garantir que seria um q igual p/ ambos os casos.

i) $\boxed{\text{Se } a|-a}$, então $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que $-a = a.q$. Para que a igualdade seja verdadeira, basta que o inteiro q seja igual a -1. Como um número inteiro sempre divide a si mesmo, temos que $a|-a$.

por que tu precisa disso??

$a|b \Leftrightarrow a.i = b$
$b|c \Leftrightarrow b.j = c$

Não ligamos sobre o que acontece SE $a|-a$.
Queremos provar que realmente $a|-a$.

Ideia correta, mas escondida. Cuidado na escrita.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

Para todos os n ~~[illegible]~~ pares.

$4^2 - 1 = 15$, não primo.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod{m} \\ x \equiv 1 & \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

Se $x \equiv 1 \pmod m$ e $x \equiv 1 \pmod n$, então
$m \mid x-1$ e $n \mid x-1$.
Pelo ~~teorema~~ definição da divisibilidade, temos que $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que
$x - 1 = m.\boxed{q}^{(i)}$ e $x - 1 = n\boxed{q}^{(ii)}$, ~~[illegible]~~
Substituindo (i) em (ii), temos que $m.q = n.q$.
Então $m.n \mid x-1$ e, portanto, $x \equiv 1 \pmod{mn}$.

CUIDADO!
mesmo problema aqui.
tem que escolher variáveis
diferentes!

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), ou *princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

parece que você tá explicando porque o x é irracional.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

sse

DEFINIÇÃO.

$\boxed{x \text{ é irracional pois}}$ o mesmo não pode ser expresso da forma $\frac{p}{q}$; p e $q \in \mathbb{Z}$ e $\boxed{q \neq 0}$ ✓

verifique que é redundante!

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "*o x é racional*".
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{p}{q}$, ~~...~~ p e $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$

Não pode usar o $\mathbb{Q}$.

Nem o "|"! NUNCA assim!.

E nem o $\div$.

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$ ✓

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: ✗

C

Aqui tu quis dizer "logo".

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid -a$, E

~~...~~

$-a = (-1)a$

tomando $(-1) = k$

temos que $a \mid -a$

Pela definição de divisibilidade ✓

- Tem que chegar a conclusão dizendo que $k \in \mathbb{Z}$ ✓

- ~~...~~

Suponha que $a \mid b$ e $b \mid c$

$\Rightarrow b = ak_1$ e $c = bk_2$ (I)

para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

importantissimo escrever isso!!

$\boxed{\text{Se } a \mid c} \Rightarrow c = ak_3$ (II)

Substituindo I em II, temos

$bk_2 = ak_3$

$ak_1k_2 = ak_3$

Tomando $k_1k_2 = k_3$, temos $ak_3 = ak_3$

logo por transitividade se $a \mid b$ e $b \mid c$ $\Rightarrow a \mid c$ ✓

Não ligamos saber o que acontece SE $a \mid c$.
Queremos provar que realmente $a \mid c$.
Cuidado: Ideia correta mas escrita erroneamente.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

$2^2 - 1 = 3$

· Faltou a prova

(−2 também)

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 1 & \pmod{m} \\ x \equiv 1 & \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

$5 \equiv 1 \pmod{2}$

$5 \equiv 1 \pmod{4}$

$5 \equiv 5 \pmod{8}$

Portanto a afirmação é falsa.

− Poderia ter desenvolvido melhor

como?

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

36 ≠ 26

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

36 . 2 . 13

3 não é Possivel Pois o mesmo [illegible] é Primo ✓

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ 1 não é Possivel Pois o mesmo Possue ele mesmo como diviso. e 1 não é Primo. Isso não é verdade sobre o 36 também?

0 não é Possivel Pois ele Pode ser divisivel Por qualquer numero

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

Tomimos como Premissa que um número $n \in \mathbb{N}$ é Primo ou composto.

Caso n seja Primo não temos o que fazer.

Caso n seja composto, então n Pode ser expresso como $\{P_1 \times \dots \times P_j\}$

Faltou ~~[illegible]~~ desenvolver a segunda parte. ✓ Ex

(começou bem!)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".
DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z})[p = x \cdot q \wedge \neg(q = 0)]$ ✓

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$ X X

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor? → 26 vermelhas, 26 pretas

RESPOSTA: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ X X

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid b$ sse $\exists q \in \mathbb{Z} \mid b = a\,q$

$a \mid -a$, $\exists q \in \mathbb{Z} \mid a = a \cdot q(-1)$

???

NUNCA use o "|" assim!!

$a \mid b$ sse $\exists q \in \mathbb{Z} \mid b = a\,q$

$b \mid c$ sse $\exists p \in \mathbb{Z} \mid c = b \cdot p$

$a \mid c$ sse $\exists m \in \mathbb{Z} \mid c = a \cdot m$

$b \cdot p = a \cdot m$

$(a \cdot q) \cdot p = a \cdot m$

$a\,(q \cdot p) = a \cdot m$

$a \mid c$ X

Por que isso mostra que $a \mid c$?

ideia correta mas mal-escrita.

D

evite!

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
Resposta & Prova.

Apenas $\boxed{p/}$ $n = 2$; ×

falta a prova.

E o -2.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

Prova ou Refutação.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 . 2 . 3 . 3$

$3 =$ primo.

O teorema fundamental da aritmética diz que para todo número inteiro não primo, existe única fatoração em números primos, mas isso exclui 0 e o 1, pois ambos só podem ser escritos como produtos de si próprios

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: *Princípio da indução finita forte* (PIFF), *ou princípio da boa ordem* (PBO).

PROVA.

Teorema: cada numero $n > 5$ é positivo.

Questão: podemos concluir que os 0, 1, 2, 3, e 4 não são positivos por causa do teorema?