

✓ x É IRRACIONAL SSE $x \in \mathbb{R}$ E NÃO PODE SER
 A ESCRITO NA FORMA DE $x = \frac{p}{q}$, "TAL QUE" $p, q \in \mathbb{Z}$

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".
 DEFINIÇÃO.

~~x É IRRA PARA x IRRACIONAL, $x \in \mathbb{R}$, NÃO EXISTE UM p NEM q INTEIROS~~

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase " x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, N, Z.

FÓRMULA: $\neg(x \in \mathbb{R}) \wedge \exists p \exists q [p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge \neg(q=0) \wedge x \cdot q = p]$

B $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$! → por que a necessidade disso??

Considere as 52 cartas de algum baralho. Compare com a Provinha O de 2017.1.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52!}{4!48!}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: ~~2 · 26!~~ $2 \cdot \frac{26!}{22!4!}$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) como $a \mid a$ é $a \cdot k = a$ ONDE $k \in \mathbb{Z}$, FAZEMOS $k = -1$
~~TEMOS QUE~~
 $a \cdot (-1) = -a$, ONDE $-1 \in \mathbb{Z}$. LOGO $a \mid -a$

(ii) como $a \cdot p = b$ e $b \cdot q = c$, VOU MOSTRAR $a \mid c$
 o que é p? ?
 ~~$a \cdot p = c$~~ $a = c$ ← por que $a=c$?
 ~~$a \cdot p = b \cdot q$~~
 $= b \cdot q$
 $= (a \cdot p) \cdot q$
 $= a \cdot (p \cdot q)$

∴ LOGO $a \mid c$

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

~~(SEJA $k \in \mathbb{Z}$ $n^2 - 1$ NUNCA VAI SER PRIMO. POIS, $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$) APENAS PARA OS NÚMEROS $(2 \text{ e } -2)$ $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, PARA TODOS OS DEMAIS CASOS $n^2 - 1$ É A MULTIPLICAÇÃO DE DOIS NÚMEROS DIFERENTES NÃO SENDO ^{NEM} ELE PRÓPRIO ^{NEM} 1. (nem -1, nem...)~~

NÃO ESTÁ PROVADO. (não faz sentido essa frase.)
(a ideia é correta)

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

COMO $m \mid x-1$ e $n \mid x-1$

$mp = x-1$ $nq = x-1$ ← introduza/declare tuas variáveis!!

~~$mp + nq = x-1$~~ QUERO MOSTRAR $mn \mid x-1$

POIS $p = n$ OU $q = m$, TEMOS

~~$mn(p+q) = x-1$~~

$mn = x-1$

$mn \mid x-1 = x \equiv 1 \pmod{mn}$

de onde tu tirou essas igualdades?!

I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

VOU FAZER A PROVA POR INDUÇÃO EM \mathbb{N}

BASE $N=0$

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = F_1 + F_0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$F_0 = 0$ [cuidado na escrita]

isso é o que tu queres provar!

SEJA UM $k \in \mathbb{Z}$, ~~VOU~~ SUPONHA tal que $\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$ (H.I.)

(VOU PROVAR PARA $k+1$)

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \left(\sum_{i=0}^k F_i \right) + F_{k+1}$$

$$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1}$$

$$= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1$$

$$= F_{k+3} - 1$$

~~III~~ PROPRIEDADE SOMATORIA

(H.I.)

(ASSOCIATIVA E COMUTATIVA) +

DEF DE F_N

ASSIM!

\therefore LOGO $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$

pleonasma

"para todo $n \in \mathbb{N}$,"

J

X X

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$\checkmark 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
 3 \rightarrow PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTÓRIO UNITÁRIO $\prod_{i=1}^1 3$ *DE PRIMOS.*
 1 \rightarrow PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTÓRIO VAZIO $\prod_{i=1}^0$
 0 \rightarrow NÃO PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTÓRIO DE PRIMOS
 POTS PARA SER \emptyset , PELO MENOS UM TERMO PRECISA SER \emptyset E
 ZERO NÃO É PRIMO. *[Cuidado com o símbolo \emptyset .]*

daría sim...

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

PROVA FEITA PELO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA FORTE. *(não parece).*
 SUPONHA QUE N POSSA SER ESCRITO NA FORMA *não apareceu nenhum p.*
 $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n$, PRIMOS, ONDE $p \in \mathbb{Z}$; DA MESMA
 MANEIRA $N = q_1 q_2 q_3 \dots q_n$, PRIMOS, ONDE $q \in \mathbb{Z}$. *similarmente..*
 TEMOS QUE $0 < p < N$
 $0 < q < N$ *teu Capslock tá bugado, CUIDADO!*
 $N = (p_1 p_2 \dots p_n) (q_1 q_2 \dots q_n)$ *matemática é case-sensitive, font-sensitive, boldness-sensitive, em geral, tudo-sensitive!*

realmente...

X

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

52^4

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

<p>???</p> <p>$a \mid a \iff \exists q \text{ tal que } -a = a \cdot q \text{ com } q \in \mathbb{Z}$ <u>que pode ser descrito sendo</u> $(-1) \cdot a = a \cdot q$, tomando $q = -1$ temos que $(-1) \cdot a = a \cdot (-1)$.</p> <p><u>Nesta forma temos</u> $a = a$.</p> <p><u>Portanto</u> $a \mid -a$ com $q = -1$.</p> <p style="text-align: right;">OK</p>	<p>Suponha que $a \mid b$ e $b \mid c$, desta forma temos que $b = a \cdot q$ e $c = b \cdot q'$ com $q, q' \in \mathbb{Z}$, substituindo I em II temos $c = (a \cdot q) \cdot q'$ que equivale a $c = a \cdot q^2$ todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k = q^2$ chegamos a $c = a \cdot k$ o que implica em $a \mid c$.</p> <p>Portanto se $a \mid b$ e $b \mid c$ logo $a \mid c$.</p> <p style="text-align: right;">então OK</p>
--	--

robou o '!

CUIDADO!

Pelo fato que tu chegaste numa verdade ($a=a$) tu não poder concluir nada!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

$n=2$ tome $n^2 - 1$ com $n \in \mathbb{Z}$, desta forma temos que $\forall p \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau(p | (n^2 - 1))$ temos n sendo primo.

? mesmo?

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Suponha $x = 5$, $m = 2$ e $n = 4$, desta forma temos $5 \equiv 1 \pmod{2}$ e $5 \equiv 1 \pmod{4}$ que equivale a $\begin{cases} 2 | 5 - 1 = 0 \\ 4 | 5 - 1 = 0 \end{cases}$

no entanto as equações " $5 \equiv 1 \pmod{2 \cdot 4}$ " temos que $8 | 5 - 1$ que não é verdade; Portanto a afirmação é inválida.

OK

I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

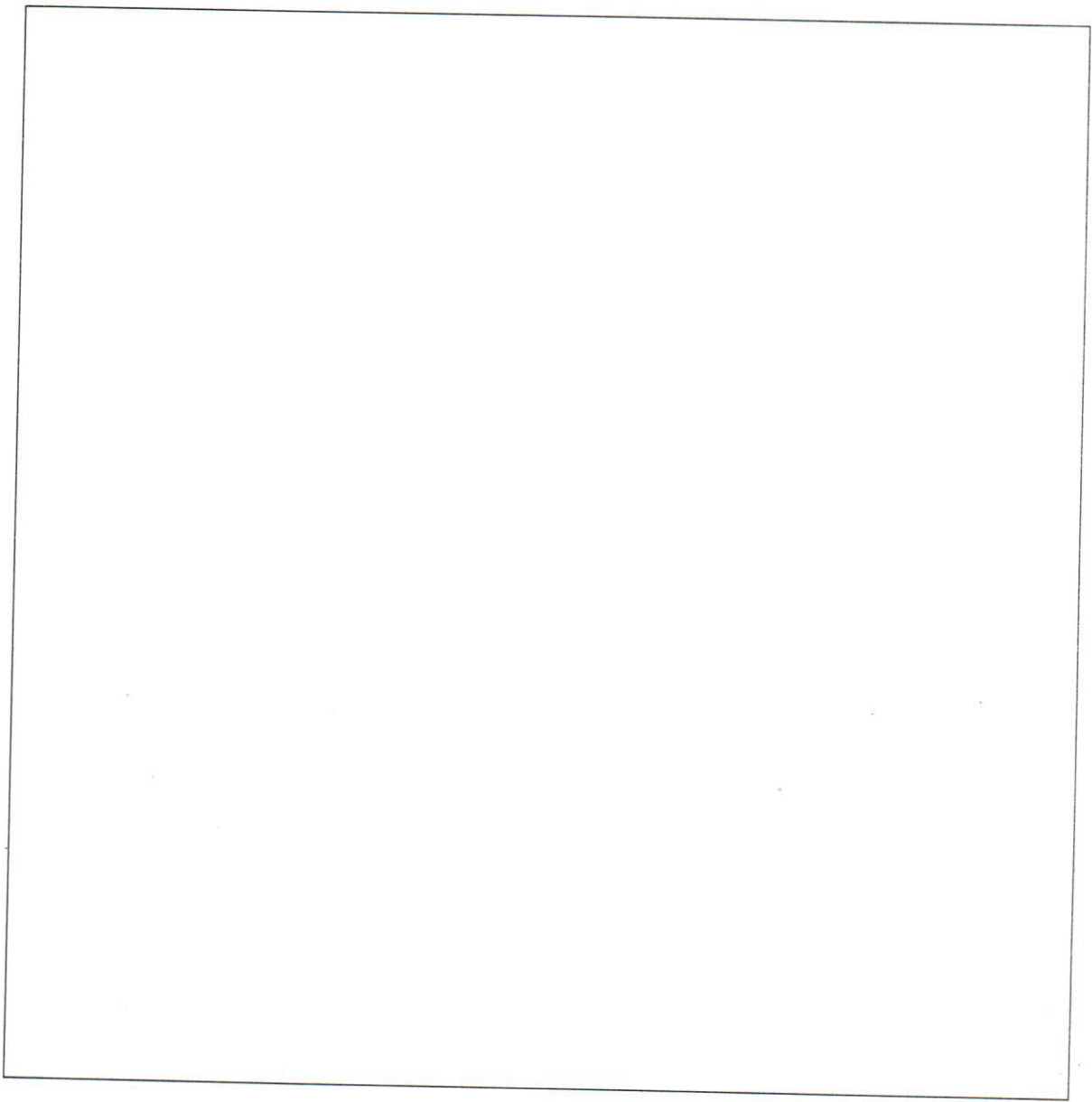
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ ✓

$3 = 3$

$1 = 1$

1 não é primo.

Primos? Não!!

Ó "a resposta verdadeira é que multiplicações iguais a 0" não existe números primos que multiplicados sejam iguais a 0"

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

é exatamente isso que queremos explicar aqui.

(não use aspas assim)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO:

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

52.51.50.49 ✓

parece IP address ip.
(use · para multiplicação)

X Seria correto se a ordem importasse.

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

NUNCA use o "!" como "t.q."

(i) $a \mid -a \implies \exists k \mid ak = -a$ FAZENDO: $k = -1$ LOGO: $(-1) \cdot a = -a$ ✓
"tome" $a(-1) = -a$

(ii) Seja k e q inteiros tal que: $ak = b$ e $bq = c$ (tais) PORTANTO, $a \mid -a$ ✓

$\implies a(kq) = c$ ✓
Como k, q FORMARAM UM INTEIRO LOGO TEREMOS QUE $a \mid c$. ✓
É

pleonasma

evite o uso dessas Setinhas!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

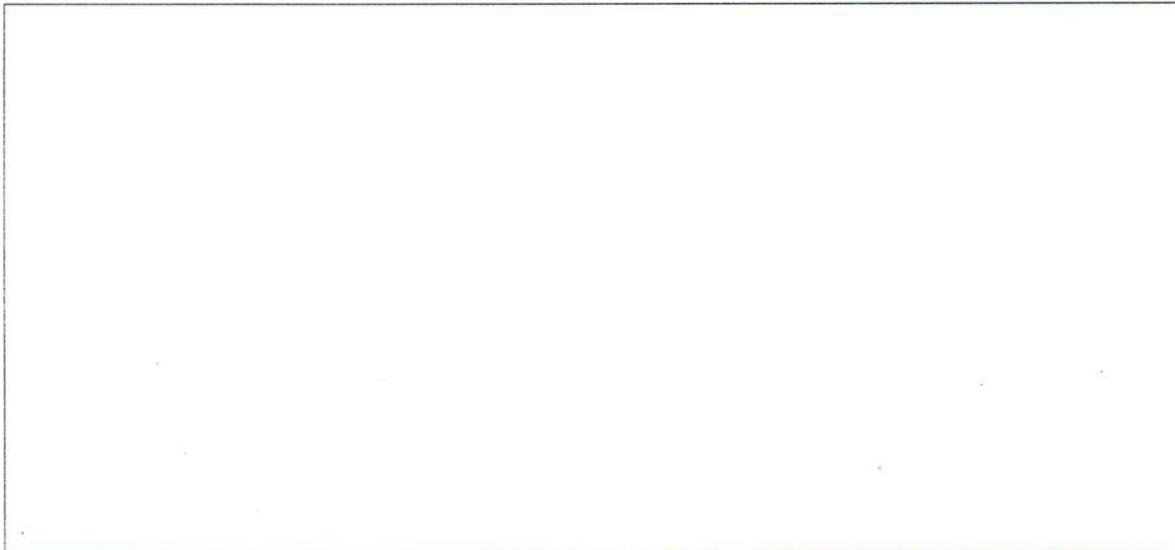
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

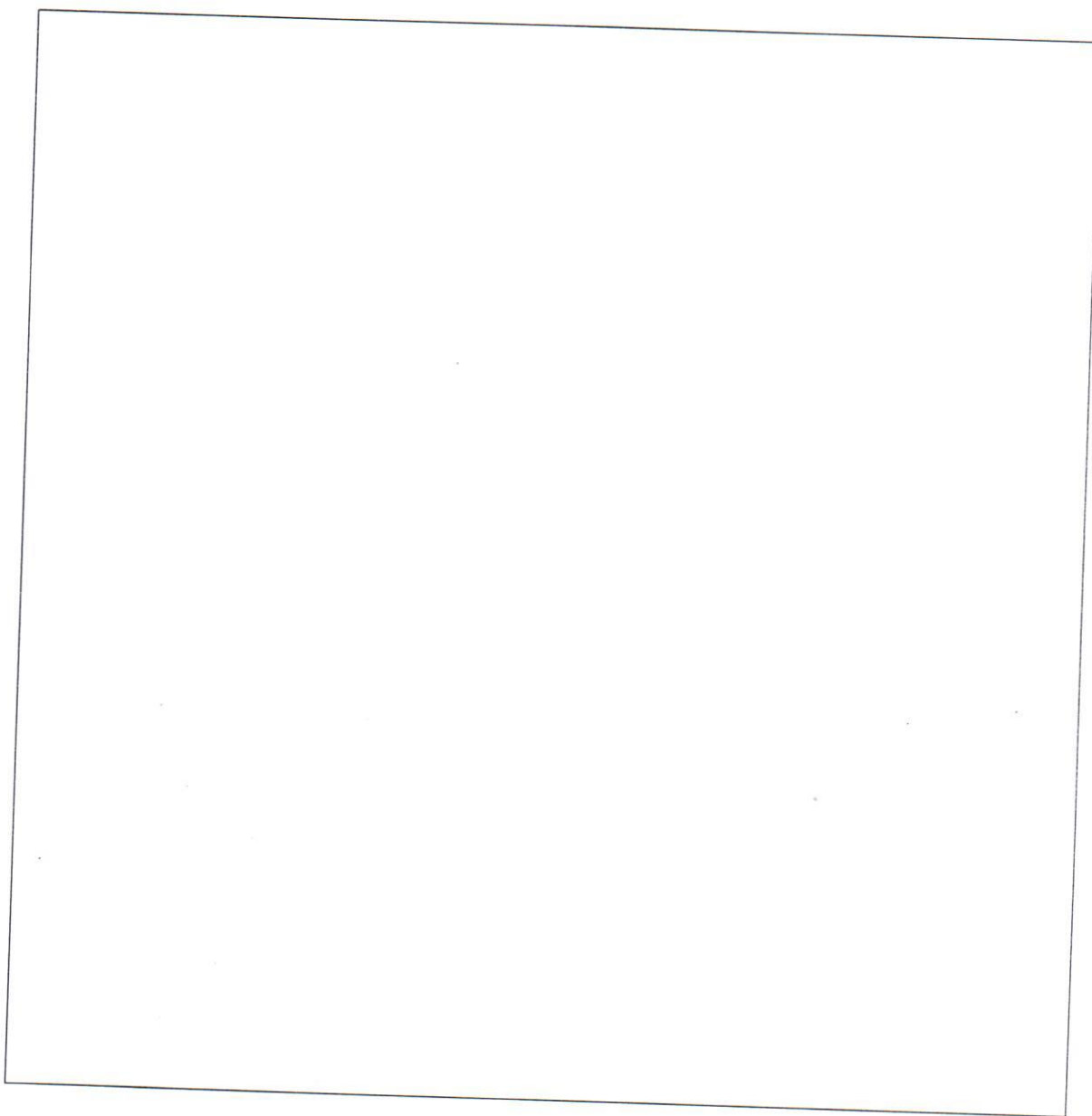
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J ✓ O teorema fundamental da aritmética diz que apenas inteiros ~~nao~~ primos podem ser escritos como produto de primos. Logo, 3 não pode. Não... (veja tua prova.)

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

3 é primo.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ ✓ $3 = 3$ ✓ ~~_____~~
 O "1" ~~_____~~ e o "0" NÃO PODEM ~~_____~~
 SE REPRESENTADO POR PRIMOS POIS NÃO PODE-SE CONSIDER:
 EXISTEM PRIMOS MENORE QUE 2. ✓
 infinitas representações de produtórios de $1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots$
 SI MESMO

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos. **Dica:** Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

por que isso justifica tua tese?

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

~~X~~ ~~sse~~ NÃO EXISEM a e b INTEIROS TAL QUE $x = \frac{a}{b}$
TAIS

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional".

Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA: ~~$\exists a, b \in \mathbb{N}$~~ ~~$\exists a, b \in \mathbb{N} x = \frac{a}{b}$~~ $\exists a, b \in \mathbb{N} x \cdot a = b$

↳ não tem esse símbolo.

↳ preconceito com os negativos?

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!48!}$ ✓

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $4 \times \binom{13}{4} = 4 \times \frac{13!}{4!9!} = \frac{13!}{3!4!}$ ("✓")

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid -a \implies -a = k \cdot a, k \in \mathbb{Z}$
Se assumirmos $k = -1$,
tomando
CHEGAMOS A UMA IGUALDADE
VÁLIDA ✓ ✓

$a \mid b \implies b = ka, k \in \mathbb{Z}$

$b \mid c \implies ka \mid c$

$c = l \cdot ka, l \in \mathbb{Z}$

$$\frac{c}{a} = l \cdot k$$

↳ não é válido se $a = 0$!

$\left(\frac{c}{a}\right)$ é um INTEIRO. $\times \frac{3}{2}$ não é inteiro ✓

X

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

Como $n^2 - 1$ é um produto de inteiros, esse número só pode ser primo se um dos fatores for 1 (ou -1!).

Se tomarmos $n+1 = 1$, teremos que $n^2 - 1 = 0 - 1$, um número não primo, restando apenas o caso em que $n-1 = 1$, que leva a $n^2 - 1 = 3$

(faltou o $n = -2$),

x

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

CONTRA-EXEMPLO:

$x = 31$
 $n = 6$
 $m = 10$

Verifique que realmente é!!

tu precisas:

?

- ① $31 \equiv 1 \pmod{10}$ ✓
- ② $31 \equiv 1 \pmod{6}$ ✓
- ③ $31 \not\equiv 1 \pmod{60}$ ✓

I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

OEN.

CASO BASE:

$$\sum_{i=0}^1 f_i = f_3 - 1$$

$$0 + 1 = 2 - 1 \quad \checkmark \quad \checkmark$$

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = 2$$

$$f_4 = 3$$

HIPÓTESE:

$$\text{PARA ALGUM } n, \quad \sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

PASSO:

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = f_{n+3} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$f_{n+1} + \sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} + f_{n+1} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{VERDADEIRO} \\ \text{PELA HIPÓTESE} \end{array}$$

CUIDADO!

com essa direção, você

tá supondo o que tu queres provar, e concluindo algo que já tens!

✓

~ ✓

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
 $3 = 3$
 $1 = \prod_{p \text{ Primo}} p^0$

0 NÃO PODE SER ESCRITO COMO PRODUTO DE PRIMOS, JÁ QUE NÃO É UM NÚMERO NATURAL. Aqui OEN sim! ✓

1 NÃO PODE SER ESCRITO COMO PRODUTO DE PRIMOS PORQUE ELE É MENOR QUE O MENOR PRIMO

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

~~Todo número natural:~~ CASO BASE:
 2 PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTO DE PRIMOS (ELE PRÓPRIO) ✓

~~O caso~~

HIPÓTESE:
 PARA TODO $x \in \mathbb{Z}$, $2 \leq x \leq n$ (sendo algum inteiro), x PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTO DE PRIMOS ✓

PASSO: Se OLHARMOS PARA $n+1$, TEMOS QUE ELE É UM PRIMO OU COMPOSTO. Se for PRIMO, EXISTE UM PRODUTO DE PRIMOS QUE O REPRESENTA (ELE PRÓPRIO). CASO CONTRÁRIO, ELE PODE SER ESCRITO COMO ab com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $1 < a, b \leq n$. PELA HIPÓTESE, TEMOS QUE a e b PODEM SER ESCRITOS COMO PRODUTO DE PRIMOS. ✓

muito bem! ✓

veja também o gabarito!

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase " x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

b) Suponha que $a \mid b$ e $b \mid c$ é verdade.

Pela def. de divisibilidade temos que, ↳ pleonasmo

$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak_1$ e $c = bk_2$

então $c = a(k_1 k_2)$ ✓

Como o produto de k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, isso implica que alc (F)

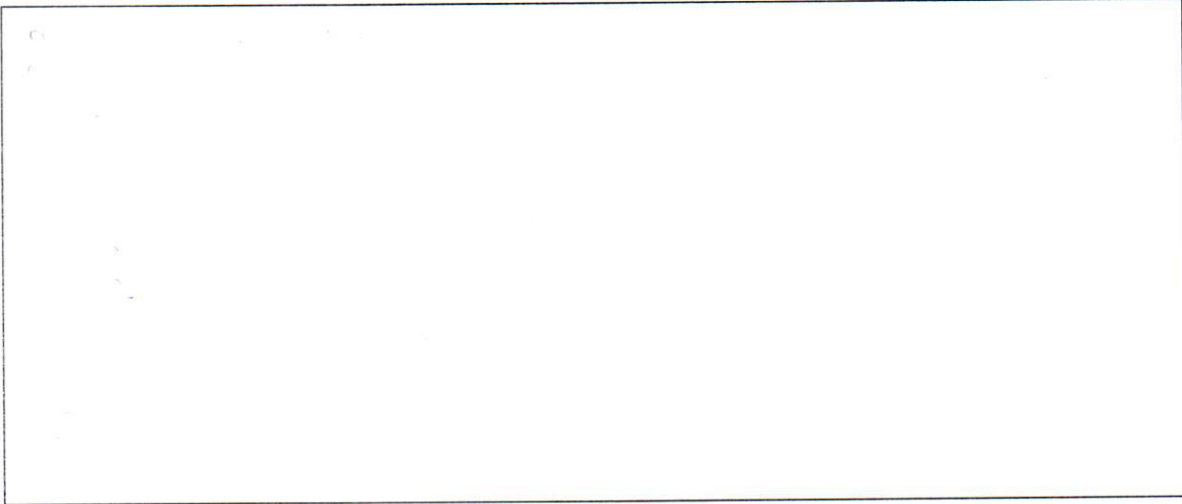
Logo, $a \mid b$ e $b \mid c \rightarrow a \mid c$ é verdade

O fato de aparecer o "a" na decomposição do "c" que indica que ele divide o "c" ✓

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

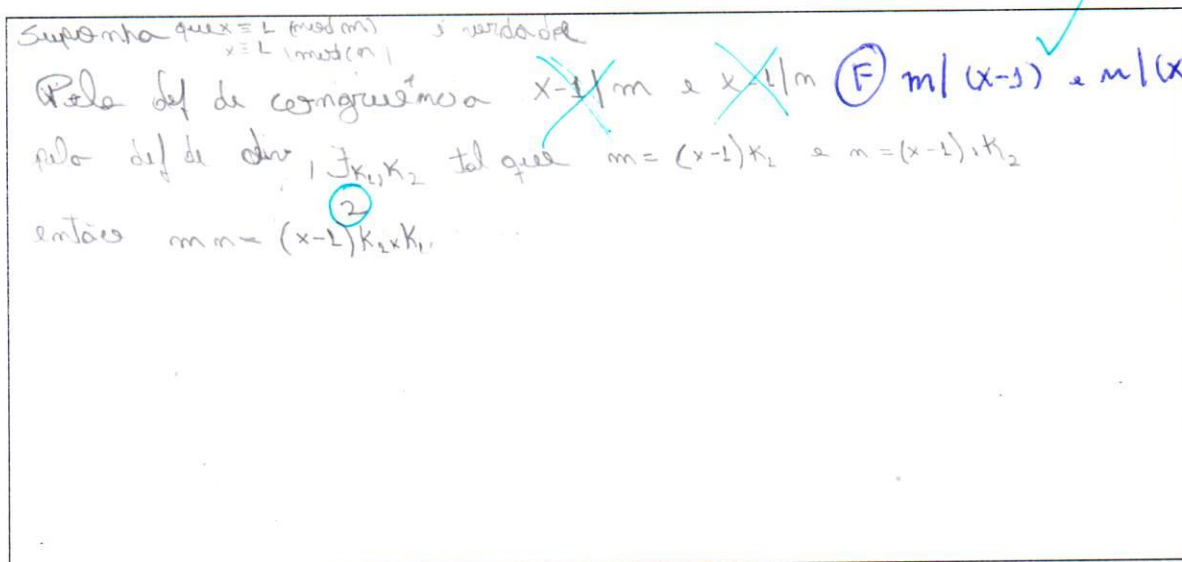
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

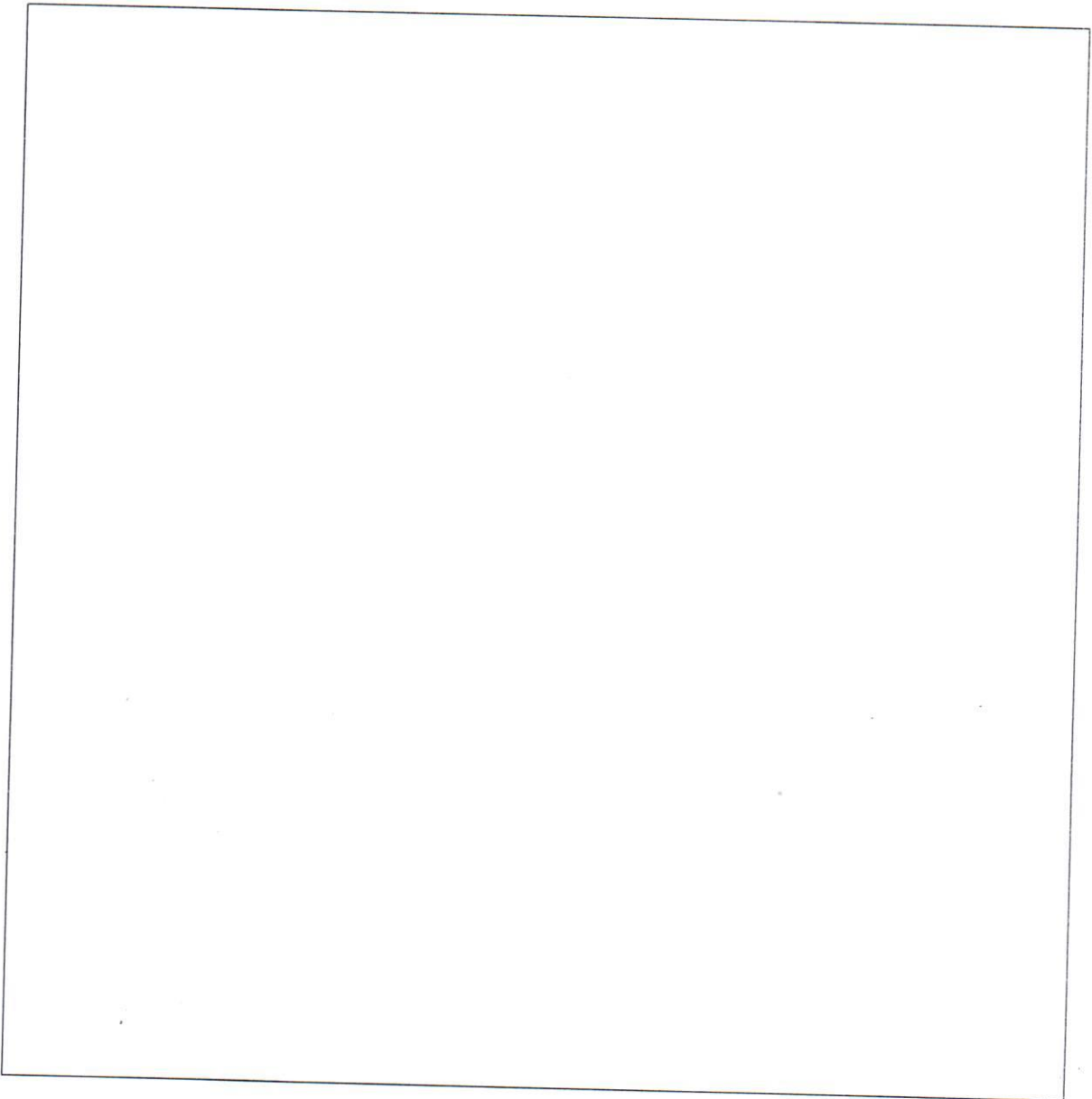
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

~~0~~ Para 0 não é possível ~~0~~ por que? (F) $\prod_{i=1}^3$ ✓
Para 3 não é possível pois 3 é um número primo
Para 1 não é possível pois ele teria que resultar de uma multiplicação de um número maior que 1. (F) ??

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução forte (PIF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

sim i)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO:

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$$C_{52}^4 = \frac{52!}{4!48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 270725$$

ACHO QUE NÃO JOVEM... ACHO QUE NÃO JOVEM...

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

(Quase)

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a = k \cdot a \implies k = 1$ já que existe um inteiro que satisfaz sendo a qualquer

$a = 0$ se $a=0$?? OK

(ii) $b = ka \implies c = qa = q \cdot ka = (qk) \cdot a$

O fato de aparecer a na composição do c mostra que $a \mid c$

$0 \mid c$ OK

sem aspas ;)

*dá ideia que é única
Stick to the definition!*

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

Apenas para 2 e -2 . ✓

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$$

→ Tem que ser ímpar o resultado pois exceto o "2" todos os primos são ímpares e na multiplicação os 2 tem que ser ímpares

NÃO SOU CAPAZ DE ORGANIZAR. ✗

↳ como isso prova que $n^2 - 1$ não é primo se $n \notin \{2, -2\}$?

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

$$m \mid x-1 \rightarrow x-1 = k_1 \cdot m \rightarrow x = k_1 \cdot m + 1$$

$$n \mid x-1 \rightarrow x-1 = k_2 \cdot n \rightarrow x = k_2 \cdot n + 1$$

$$k_1 \cdot m + 1 = k_2 \cdot n + 1$$

$$k_1 \cdot m = k_2 \cdot n$$

$$x = mn + 1$$

??

NÃO SOU CAPAZ DE ORGANIZAR. ✗

I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

cuidado com a direção!!

PROVA.

Caso base ($m=0$)

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_{0+2} - 1 \Rightarrow F_0 = F_2 - 1$$

$$0 = F_1 + F_0 - 1$$

$$0 = 1 + 0 - 1$$

- verdadeiro

Passo Indutivo: No caso base eu provei que a expressão é verdadeira para $m=0$, ~~falta provar que ela é válida para um valor qualquer "k", e se é válida para "k" também é válida para o seu sucessor "k+1"~~.

Hipótese: $m=k$

$$\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$$

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

Tese $k = k+1$

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^k F_i + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

$$F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

$$F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1$$

NAO SOU CAPAZ DE OPINAR

ideia correta mas a forma de "indução" é errada.

k nunca será igual ao k+1 !!

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 9 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ ✓
 $3 = \prod_{i=2}^1 3$
 não é primo
 O zero "0" não pode ser escrito como um produtório de primos pois para que uma multiplicação de igual a "0" necessita da presença do "0" mais ele não é primo. ✓

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos. 11A
 Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

caso base $n = 2$
 $2 = \prod_{i=2}^1 2$
 Passo Indutivo: tu prova e mostra que
 prova para um valor qualquer "k" e se é válida
 para "k" e é válida para o seu sucessor "k+1".
 Hipótese $n = k$
 $k =$
 ("se é válida a... quem?")

X

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

$\forall x \left[x \in \mathbb{R} \mid \exists p \nexists q \in \mathbb{Z} \left(x = \frac{p}{q} \right) \right]$ (português!!!)

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, N, Z.

FÓRMULA: $\forall x \exists p \exists q \left[p = x \cdot q \rightarrow (p \wedge q) \in \mathbb{Z} \right]$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$\binom{52}{4}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

$2 \cdot \binom{26}{4}$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) $a \mid -a \iff a \cdot q = -a \ (q \in \mathbb{Z})$
 $\iff a \cdot (-1) = -a$
 como $-1 \in \mathbb{Z}$, $a \mid -a$.

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$
 $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \cdot q = b \ \& \ b \cdot p = c \ (q, p \in \mathbb{Z})$
 $\implies b \cdot p = c \ (\text{? se onde veio?})$
 $\implies a \cdot q \cdot p = c$
 $\implies q \cdot p \in \mathbb{Z} \implies a \mid c$

essas duas afirmações não são equivalentes!!
 daqui:

ideias certas mas...

leia com calma!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

Não.

Contra-exemplo: $n=0$.

$$0^2 - 1 = -1 \text{ (não é primo)}$$

(Isso prova / me ignora)

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

$$\begin{array}{l} m=6 \\ n=2 \end{array} \quad x=7$$

~~$x \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow m \mid (x-1)$~~
 ~~$x \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow n \mid (x-1)$~~
 ~~\dots~~
 ~~$\therefore m \mid (x-1) \ \& \ n \mid (x-1) \Rightarrow m \cdot n = x-1 \ \& \ n \cdot q = x-1 \ (p, q \in \mathbb{Z})$~~
 ~~$\Rightarrow m \cdot n = x-1$~~
 ~~$\Rightarrow m \cdot n \cdot q$~~

Assumindo os valores:
 $m=6, n=2 \ \& \ x=7$
 encontramos um
 contra exemplo:

~~$\Rightarrow m \cdot n = x-1$~~
 ~~$6 \cdot 2 = 7-1$~~
 ~~$12 = 6$~~
 ~~$12 \neq 6$~~
 ~~\dots~~

$$\left. \begin{array}{l} 6 \mid 7-1 \\ 2 \mid 7-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{6 \mid 6} \ \& \ 2 \mid 6$$

Calculando:

~~$12 \cdot x = 6$~~

~~$x = \frac{6}{12}$~~

~~$\therefore x \notin \mathbb{Z}$~~

~~$\therefore 12 \nmid 6$~~

(Cuidado na escrita)

I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

PROVA.

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

Por indução:

$$\text{Base (n=0)}: \sum_{i=0}^0 F_i = F_0 + 1 = 0 + 1 = 1 = F_2 - 1 = F_1 + F_0 - 1 = 0$$

Rasso indutivo: Vou provar que

$$\text{Para todo } k \in \mathbb{N}, \underbrace{\left(\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1 \right)}_{\text{H.I.}} \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1 \right)$$

~~estratégia~~

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \sum_{i=0}^k F_i + F_{k+1} \quad (\text{def. } \Sigma)$$

$$= F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \quad (\text{H.I.})$$

$$= F_{k+2} - 1 + 1$$

$$= F_{k+2}$$

$$F_{k+3} - 1 = F_{k+3} - F_2$$

$$\text{ex } F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_k - F_2$$

$$= F_{k+2} \quad ???$$

começou bem mas,...

χ

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê. ✓

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ✓
 $3 = 3$ ✓ ✓
 $1 \Rightarrow$ seria o produtório vazio, pois 1 não é primo. ✓
 $0 \Rightarrow$ não pode ser escrito como produtório de primos.
só podemos escrever como produtório de primos os números diferentes de zero. porque...?

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA:

$\exists x \neg (x \in \mathbb{N}) \wedge x \in \mathbb{Z}$

B

Sintaxe incorreta!

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6.497.400$ ~~POSSIBILIDADES~~ POSSIBILIDADES.

seria certo se a ordem importasse

ninguém merece!!

52	
x 51	
52	
x 260	
2652	
x 50	
13260	
132600	
x 49	
1193400	
530400	
6497400	2
04	3248700
09	00
17	
14	
000	

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

$6.497.400 / 2 = 3.248.700$ POSSIBILIDADES

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(II) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$

$a \mid b \iff a \cdot k = b$

$b \mid c \iff b \cdot l = c \implies b = \frac{c}{l}$

$a \cdot k = b \implies a \cdot k = \frac{c}{l}$

$a \cdot k \cdot l = c$

Poderia ser usado a distributiva, da seguinte forma:

$b \cdot l = c \implies (a \cdot k) \cdot l = c \implies a \cdot (k \cdot l) = c \implies k \cdot l = m$

$a \cdot m = c$

$a \mid c$

$k, l, m \in \mathbb{Z} \implies a \cdot m = c$

(I) $a \mid -a \iff a \cdot k = -a$

$a \cdot k = -a$

$a \cdot k = a \cdot (-1)$

$a \cdot k = -a$

$a \cdot (-1) = -a$

$k = -1$ logo $k \in \mathbb{Z}$

o que são??

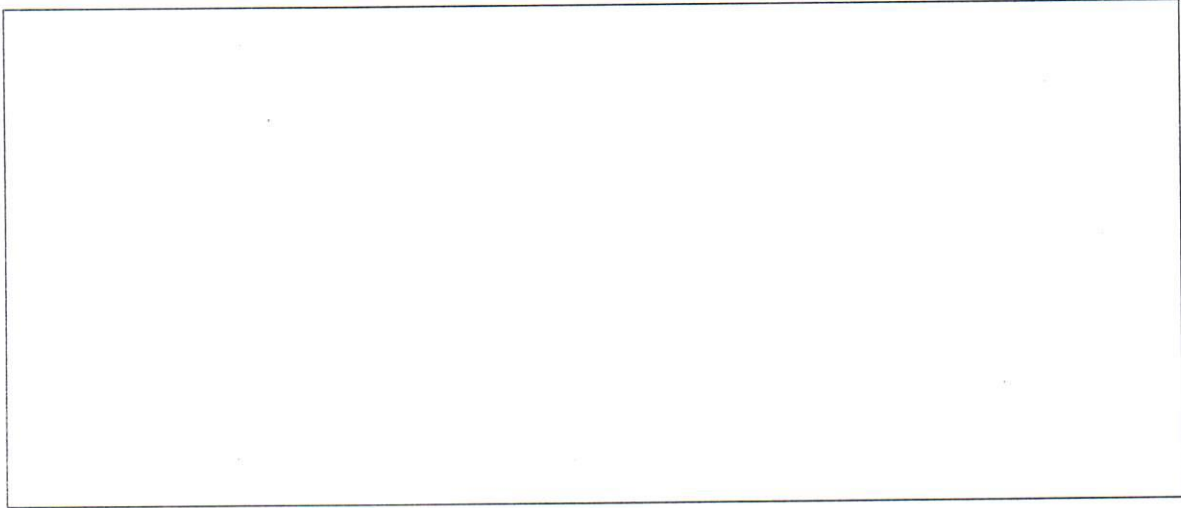
o que significa isso??

não use setinha e notação improvisadas!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

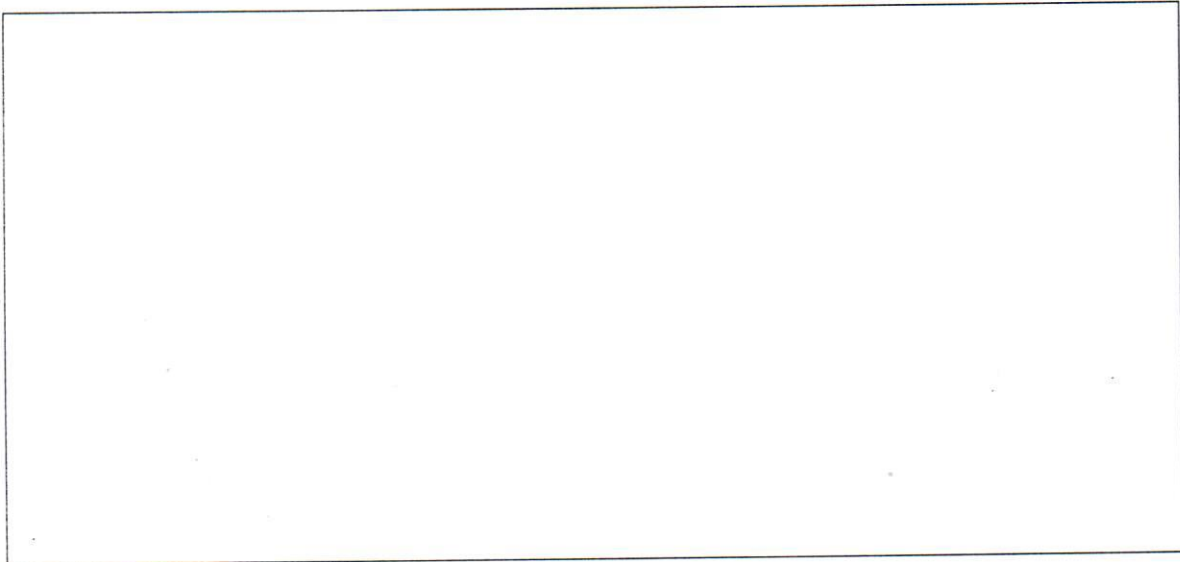
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

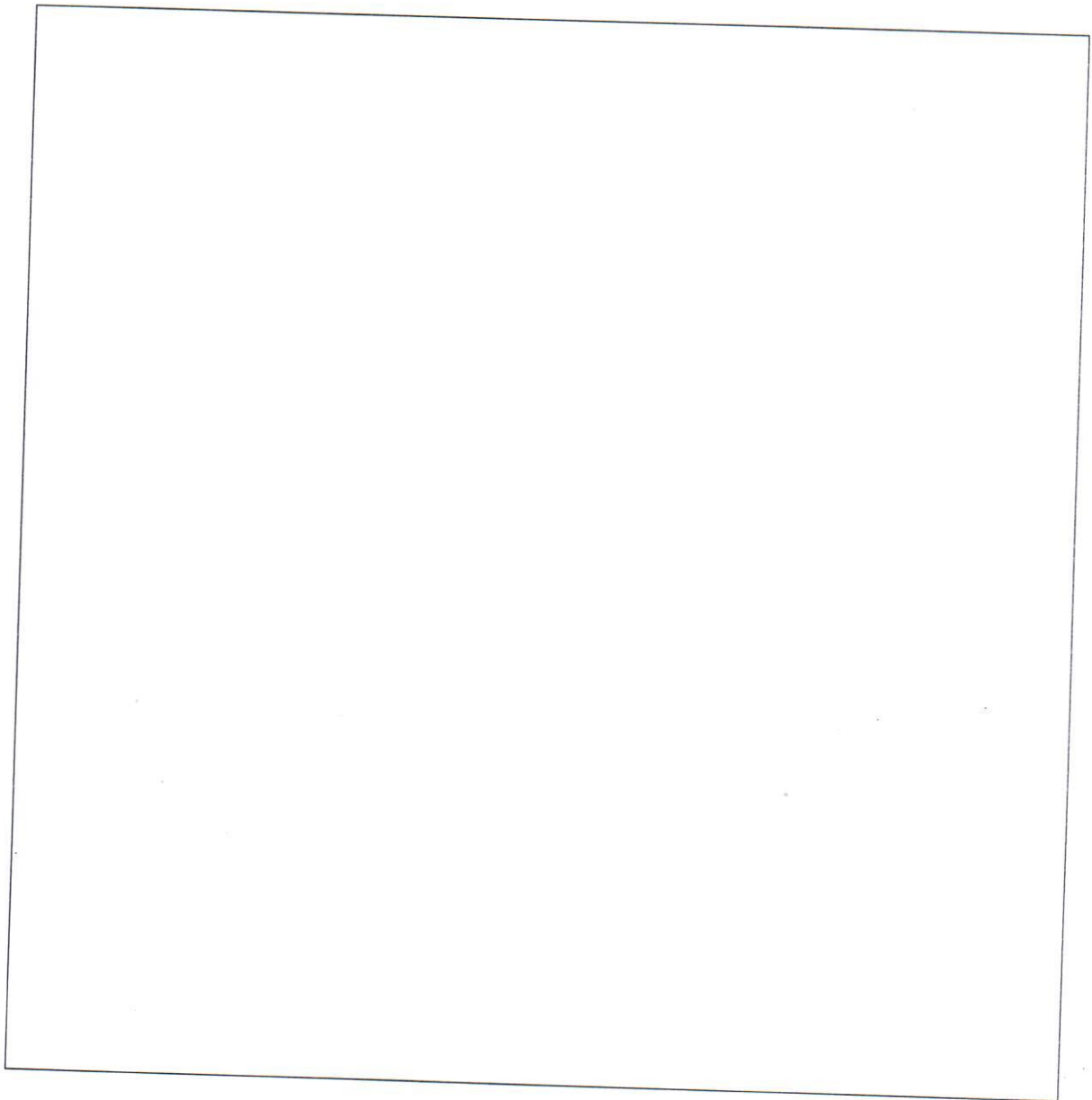
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$\begin{array}{r l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$3 = 3$

1 e 0 não pode ser escrito por uma multiplicação de números primos pois não existe número primo que multiplicados possam assumir esses valores.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

CUIDADO

aqui você tá dizendo:

« não pode acontecer o X,
pois X é algo que não pode acontecer ».

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 649740$$

X para esse resultado a ordem de cartas deveria importar.

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

$$2(26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23) = 717400$$

X seria $4 \cdot \left(\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!}\right)$

"✓"

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

Definição: $a \mid b$ nre $\exists k \in \mathbb{Z}$, t.q. $a \cdot k = b$

(I) Pela definição:

$a \mid -a$ nre $\exists k \in \mathbb{Z}$, t.q. $a \cdot k = -a$

$$a \cdot k = -a$$

$$k = -\frac{a}{a}$$

$$k = -1$$

Logo, a sentença é verdadeira. ✓

(II) Supondo que $a \mid b$ e $b \mid c$, ou seja:

~~$a \mid b$ nre $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$, t.q. $a \cdot k_1 = b$~~

~~$b \mid c$ nre $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$, t.q. $b \cdot k_2 = c$~~

Para provar que $a \mid c$ temos que chegar a:

~~$a \mid c$ nre $\exists k_3 \in \mathbb{Z}$, t.q. $a \cdot k_3 = c$~~

Substituindo as igualdades, temos

$$c \text{ como: } c = b \cdot k_2$$

$$c = a \cdot \underbrace{k_1 \cdot k_2}_{k_3}$$

$$c = a \cdot k_3$$

Com isso, provamos a sentença. ✓

essas afirmações parecem do nada.

use "existe" mesmo.

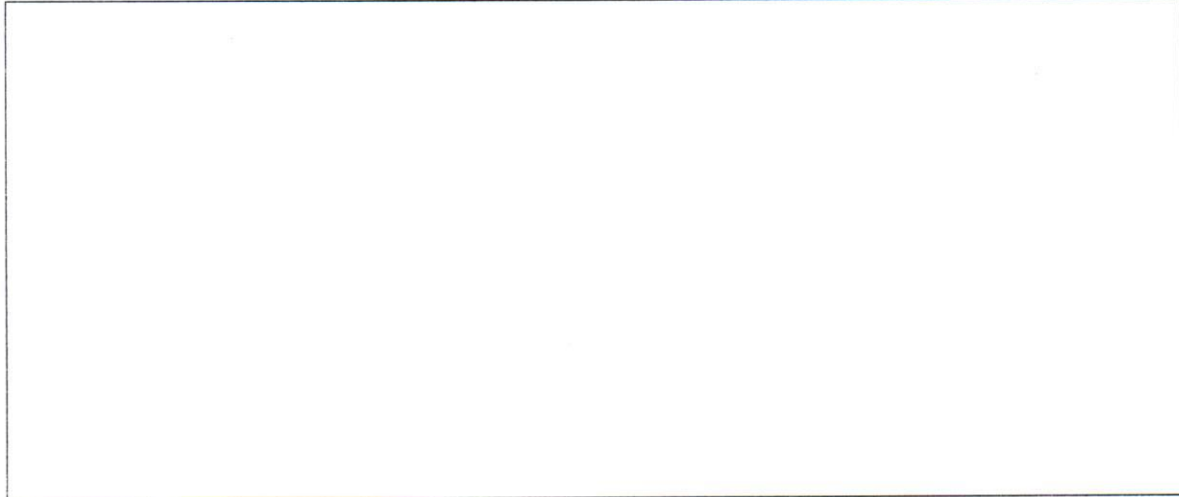
perfeito

(veja gabarito)

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

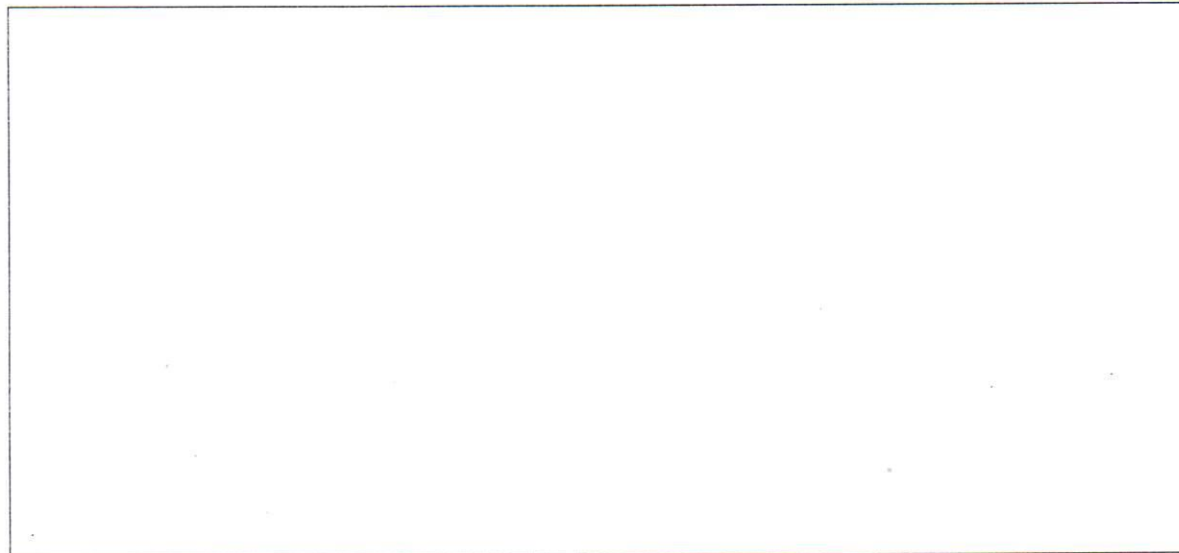
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

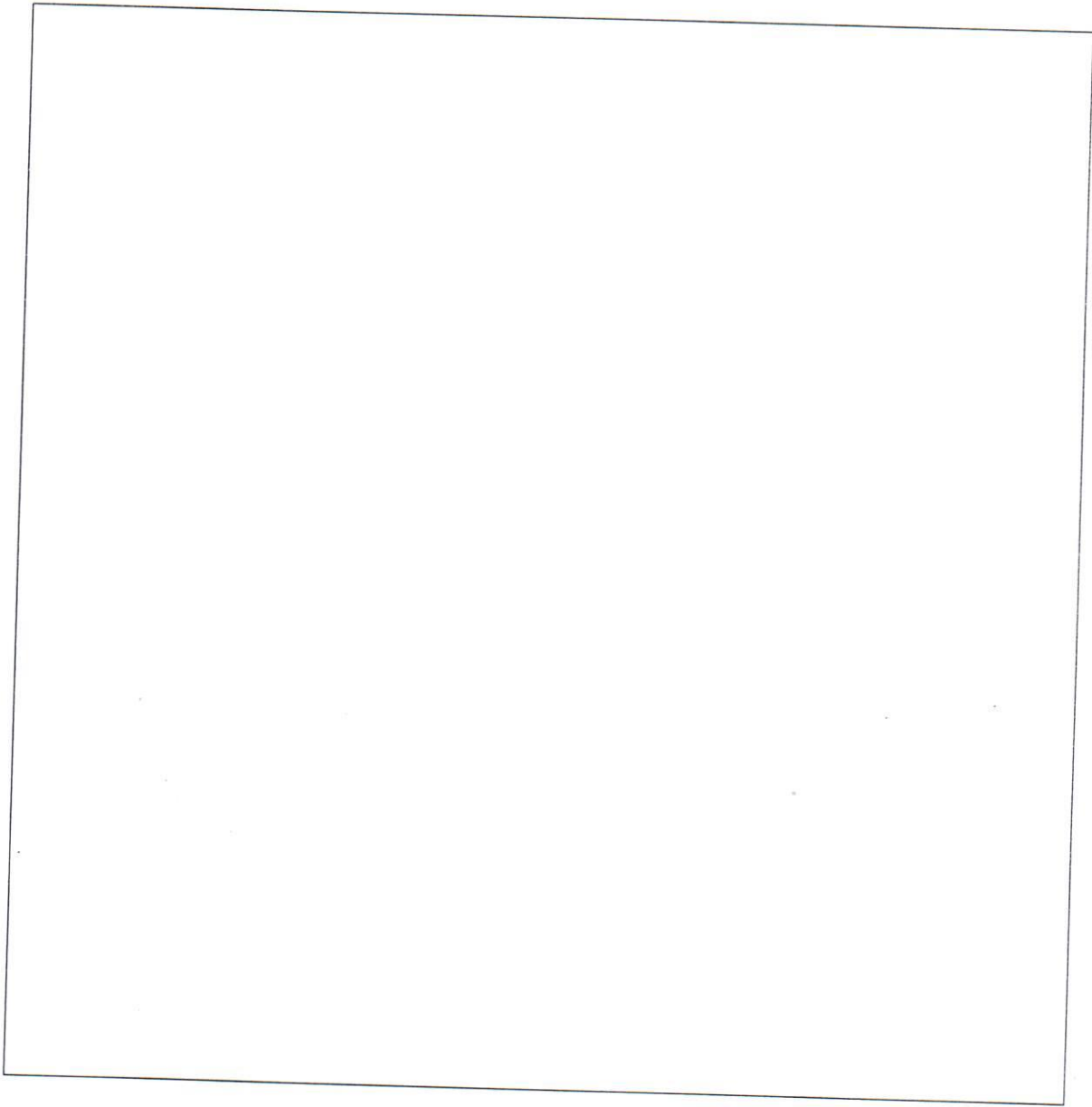
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

• $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ✓
• $3 = 3^1$ ✓

• Já para 1 e 0 não é possível por causa da definição de número primo, que diz:
 n é primo se $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 1$.
e... X

→ não por esse motivo
↑
...exato...

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".
DEFINIÇÃO.

x é irracional se não existem k_1, k_2 inteiros que satisfazem a seguinte condição: x pode ser escrito como uma divisão de k_1 por k_2 , para k_2 diferente de zero. [muito texto!]

isso não é redundante?

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". [pense].
Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} [\neg (k_2 = 0) \rightarrow x = k_1 / k_2]$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) $a, b \in \mathbb{Z}$ (hipótese)
 $\exists z \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = -a \cdot 1$
 tome $z \in \mathbb{Z}$ t.q. $z = -1$
 conclua $a \cdot z = b$, por (1) e (2). (4)
 conclua $a \mid -a$, por (1) e (4).

(ii) Prova direta
 suponha $a \mid b$ e $b \mid c$.
 conclua $a \cdot z_1 = b$ e $b \cdot z_2 = c$
 \implies A mesma hipótese.

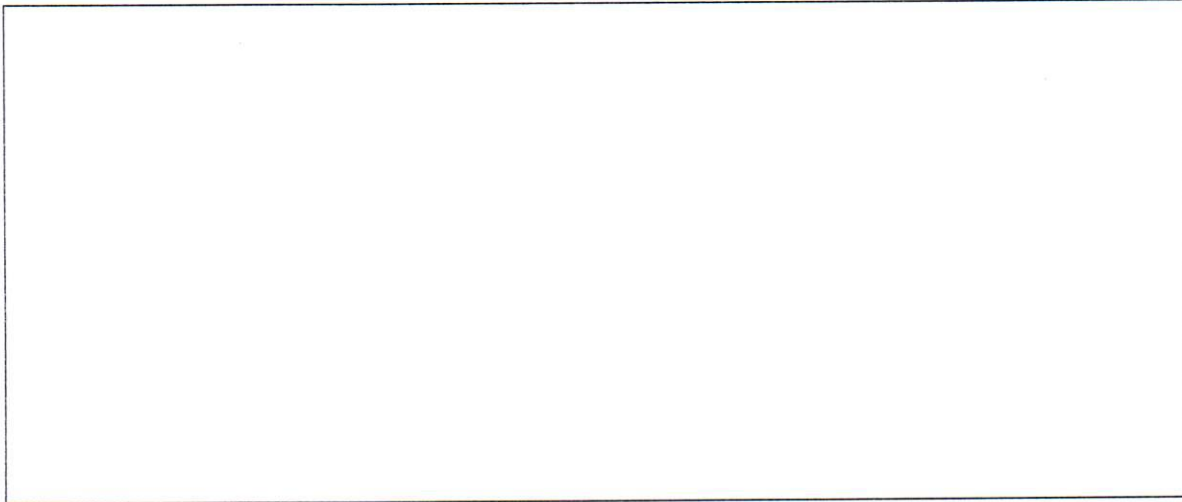
b já foi declarado!

ideia correta mas escrita erroneamente.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

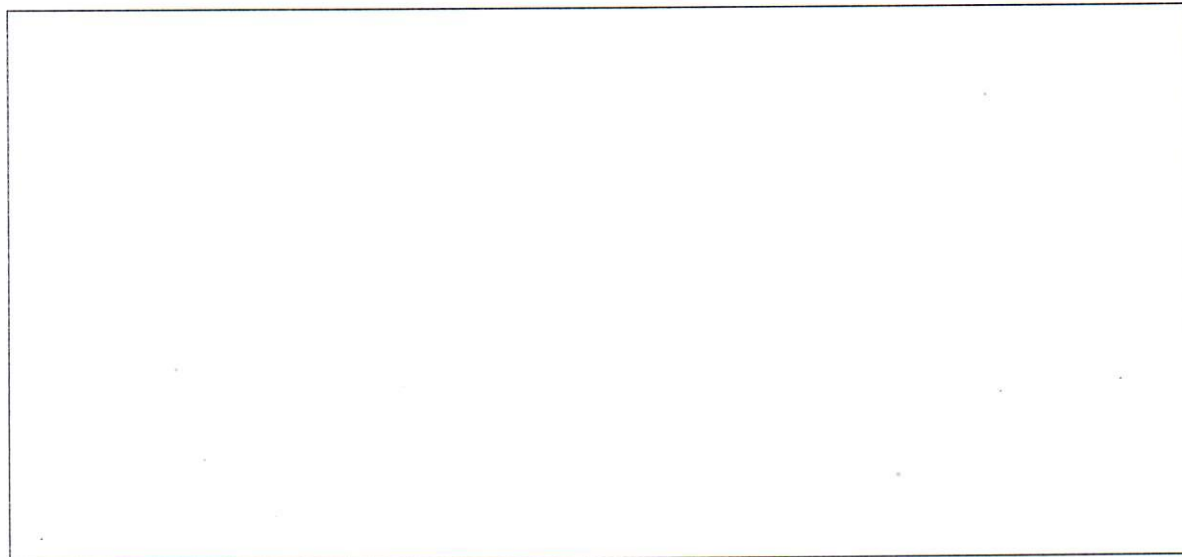
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

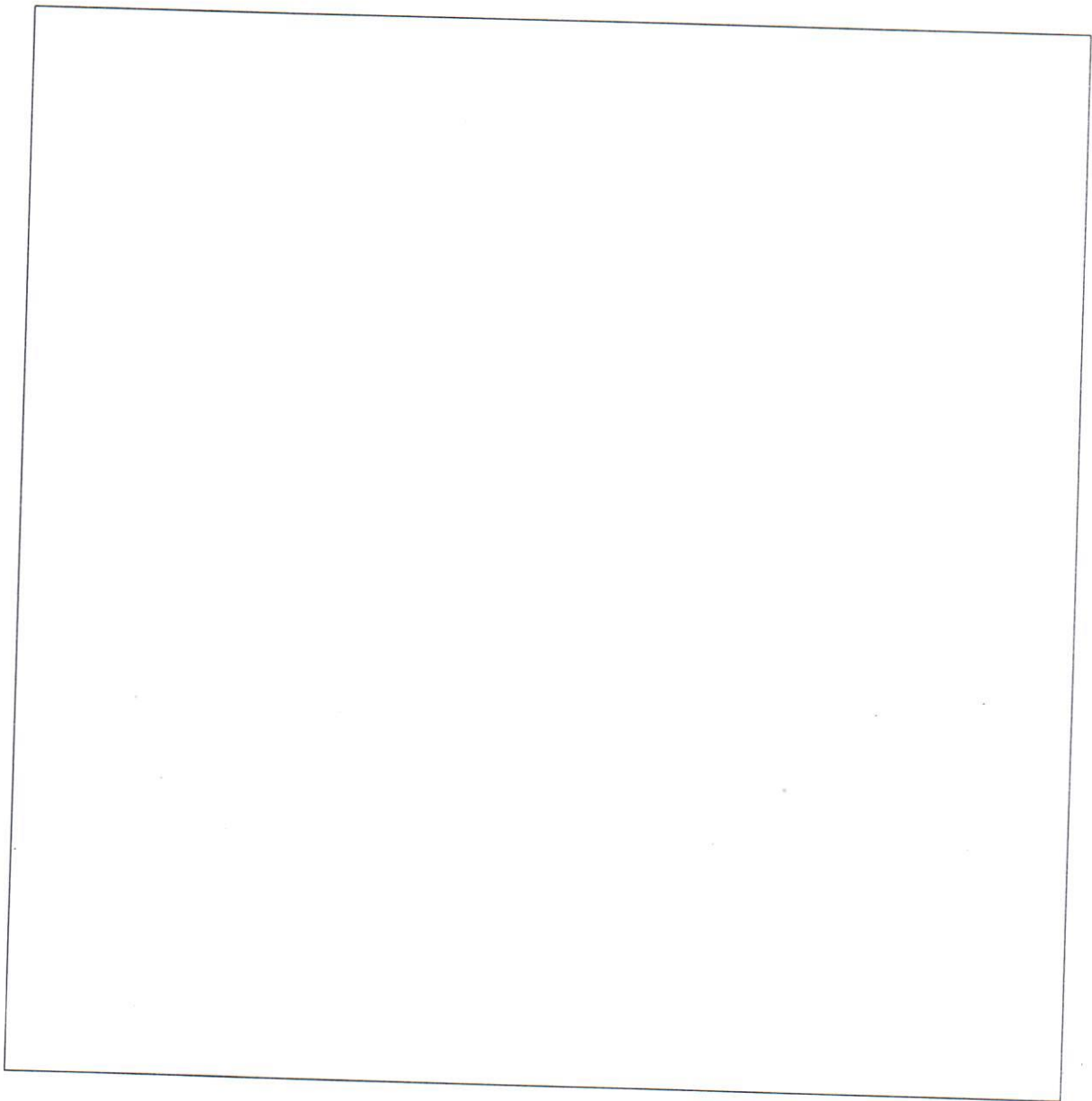
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

começando assim perdemos qualquer esperança/chance de conseguir afirmar algo sobre o objeto x.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".
DEFINIÇÃO.

$\exists x \in \mathbb{R}, \neg (\exists u \in \mathbb{Z} \wedge \exists v \in \mathbb{Z}) \text{ t.q. } x = \frac{u}{v}$ X PORTUGUÊS matemático SIM!!

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, N, Z.

FÓRMULA: ~~$\exists x \in \mathbb{R}, x = \frac{u}{v}$~~ $\exists x \in \mathbb{R} \exists u \in \mathbb{Z} \exists v \in \mathbb{Z}, \text{ t.q. } x = \frac{u}{v}$ X

utilização de outros símbolos (v, u, -)

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)
RESPOSTA: ~~$\binom{52}{4}$~~ $\binom{52}{4}$ ✓ sim não: temos uma infinidade de variáveis.

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $4 \cdot \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$ X X

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $a \mid -a$ use $a \cdot k = -a$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
~~logo como podemos~~
 $a \cdot k = -a$ como -1 é um valor inteiro sabemos que $a \mid -a$
 $k = \frac{-a}{a}$
 $k = -1$ e se $a=0$?

ii) como $a \mid b$, ganhamos que $b = a \cdot q$, $q \in \mathbb{Z}$ (*)
como $b \mid c$, ganhamos que $c = b \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$. (**)
 $a \mid c \implies c = q \cdot w$, $w \in \mathbb{Z}$
 $b \cdot t = a \cdot w$ (***)
 $a \cdot q \cdot t = a \cdot w$ (*) } como temos o a multiplicando dos dois lados, logo $a \mid c$, pois c é múltiplo de $q \cdot t$.

você não tem isso!!

X "a|c" e "c é múltiplo de a" são 100% sinônimos!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

Como $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$ ou -1

teremos o produto de dois números e que para $n^2 - 1$ ser primo um dos números deve ser 1, já que primos só são divisíveis por 1 ou por eles mesmos.

nesse caso: n só pode ser 0 ou 2, mas para $n = 0$, temos $1 \cdot (-1)$, portanto o n só pode ser 2. ?

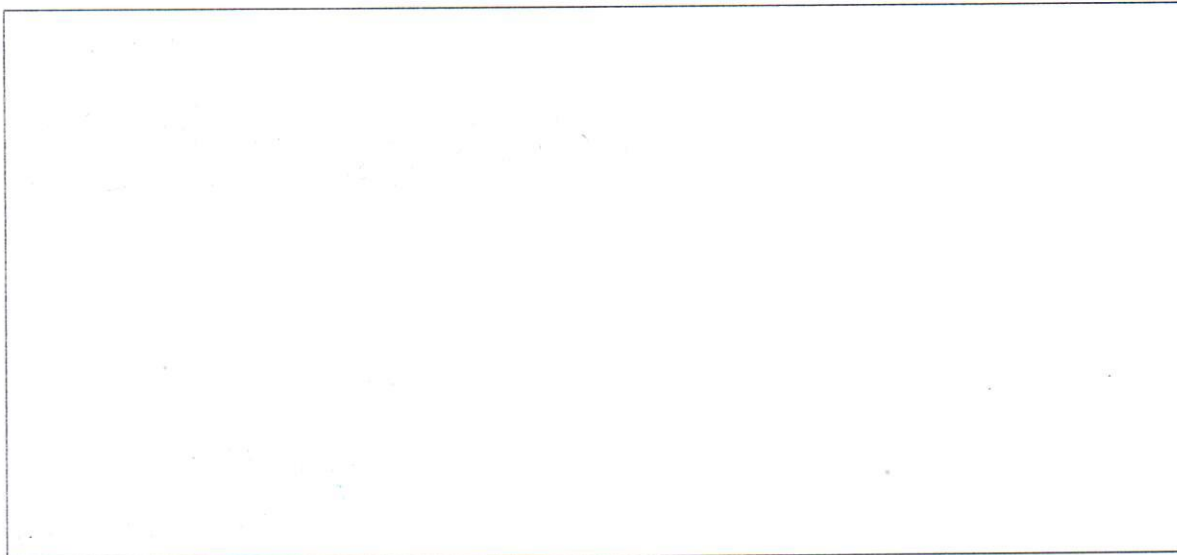
Verifique que $2^2 - 1$ é primo!
(Faltou o $n := -2$)

tem razão!

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

caso base: $n=0$

~~$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$~~

$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$?

$\sum_{i=0}^0 f_0 = f_{0+2} - 1$ → não tens isso!

$0 = 1 - 1$

$0 = 0$ → sim, $0=0$, nem precisamos Fibonacci para saber disso!

passo indutivo $\sum_{i=0}^k f_i = f_{k+2} - 1, \forall k \in \mathbb{N}$

Prova $\sum_{i=0}^{k+1} f_i = f_{k+1+2} - 1, \forall k \in \mathbb{N}$. (H.I. → NAO!)

$\sum_{i=0}^{k+1} f_i = \sum_{i=0}^k f_i + f_{k+1}$

$= f_{k+2} - 1 + f_{k+1}$ (H.I.)

$= f_{k+2} + f_{k+1} - 1$

$= f_{k+3} - 1$ (Def. Fibonacci) \square

Supomos que é válido para algum $k \in \mathbb{N}$.

(o que faltou para ser 100% correto?)

✓

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \text{ ou } 2^2 \cdot 3^2$$

$$3 = 3$$

1 = qualquer primo elevado a 0.

0 = não pode ser escrito como o produto de primos pois a única maneira de zero ser o resultado de uma multiplicação seria se o zero estivesse na multiplicação, mas o zero não é primo.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

~~Supondo que em meu conjunto A estão presentes todos os números primos existentes.~~

$$A = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$$

~~É fácil encontrar um absurdo, porque o número $(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$, não é divisível por nenhum dos primos do conjunto A e portanto também é um número primo.~~

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO:

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

~~30 maneiras possíveis~~ X não há um cálculo que justifique o resposta ✓

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

~~26 cartas vermelhas; 26 cartas pretas~~ X

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

<p>$a \mid -a$ significa dizemos que $a \mid a \cdot (-1)$. Logo, $a \in \mathbb{Z}$. Então a divide a si mesmo, e -1 é inteiro qualquer que a divide $a \cdot (-1)$. Então se conclui que $a \mid a \cdot (-1)$ como?</p>	<p>Suponha $a \mid b \ \& \ b \mid c$, então $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ s.t. $a \cdot k = b$ (I) e $b \cdot k' = c$ (II). Substituindo (I) em (II) temos $(a \cdot k) \cdot k' = c$, ou $a \cdot (k \cdot k') = c$. Seja $k'' = k \cdot k'$, então $a \cdot k'' = c$.</p> <p>* Falta uma conclusão que $a \mid c$ ✓</p>
---	---

so é o que queremos provar!

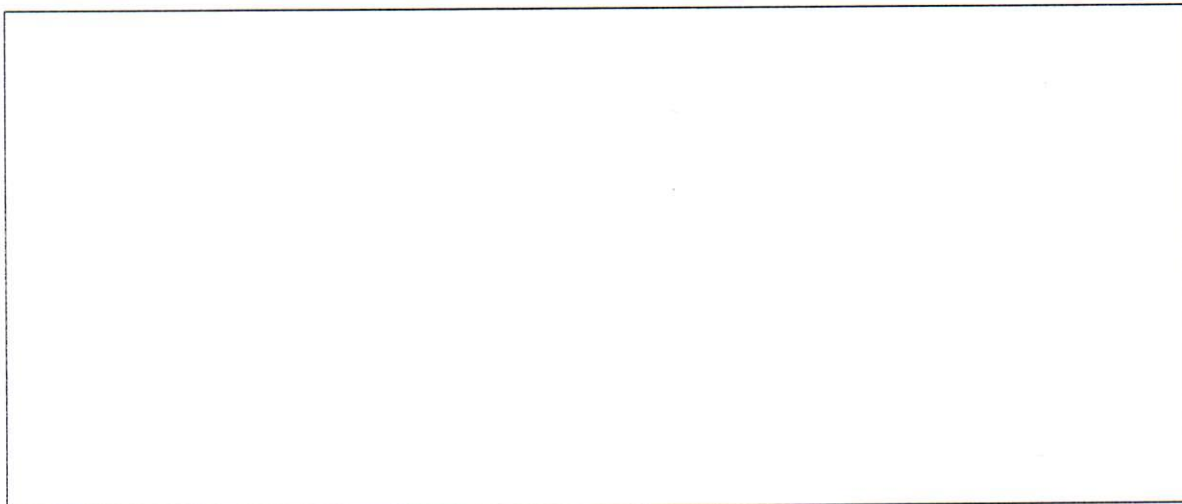
não misture "e" com português. use "e" (ou "&").

não precisa dar um nome para o kk' .
Precisa apenas observar que $kk' \in \mathbb{Z}$.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

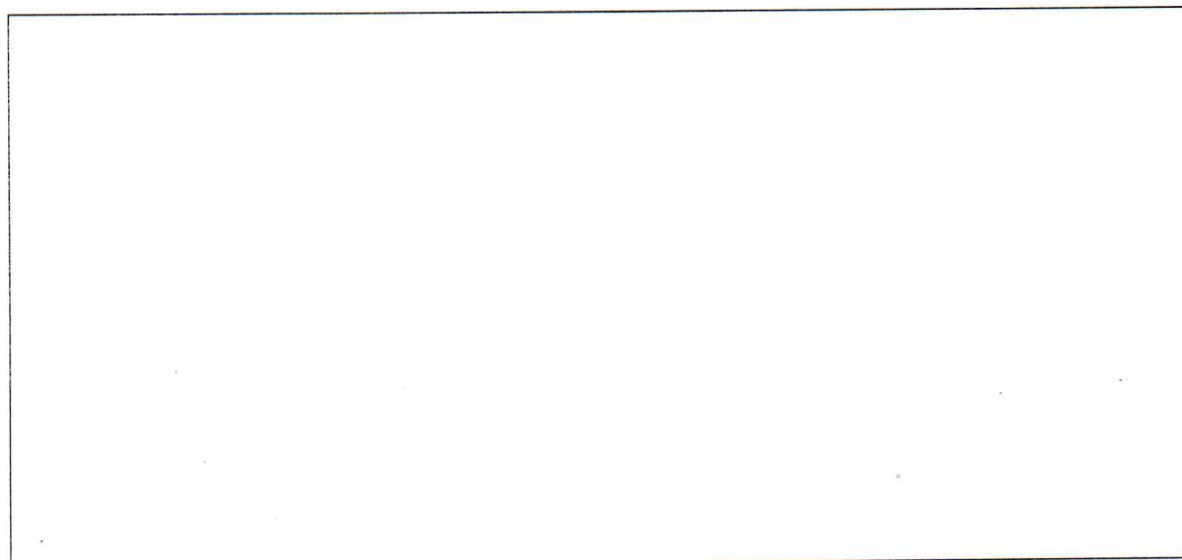
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

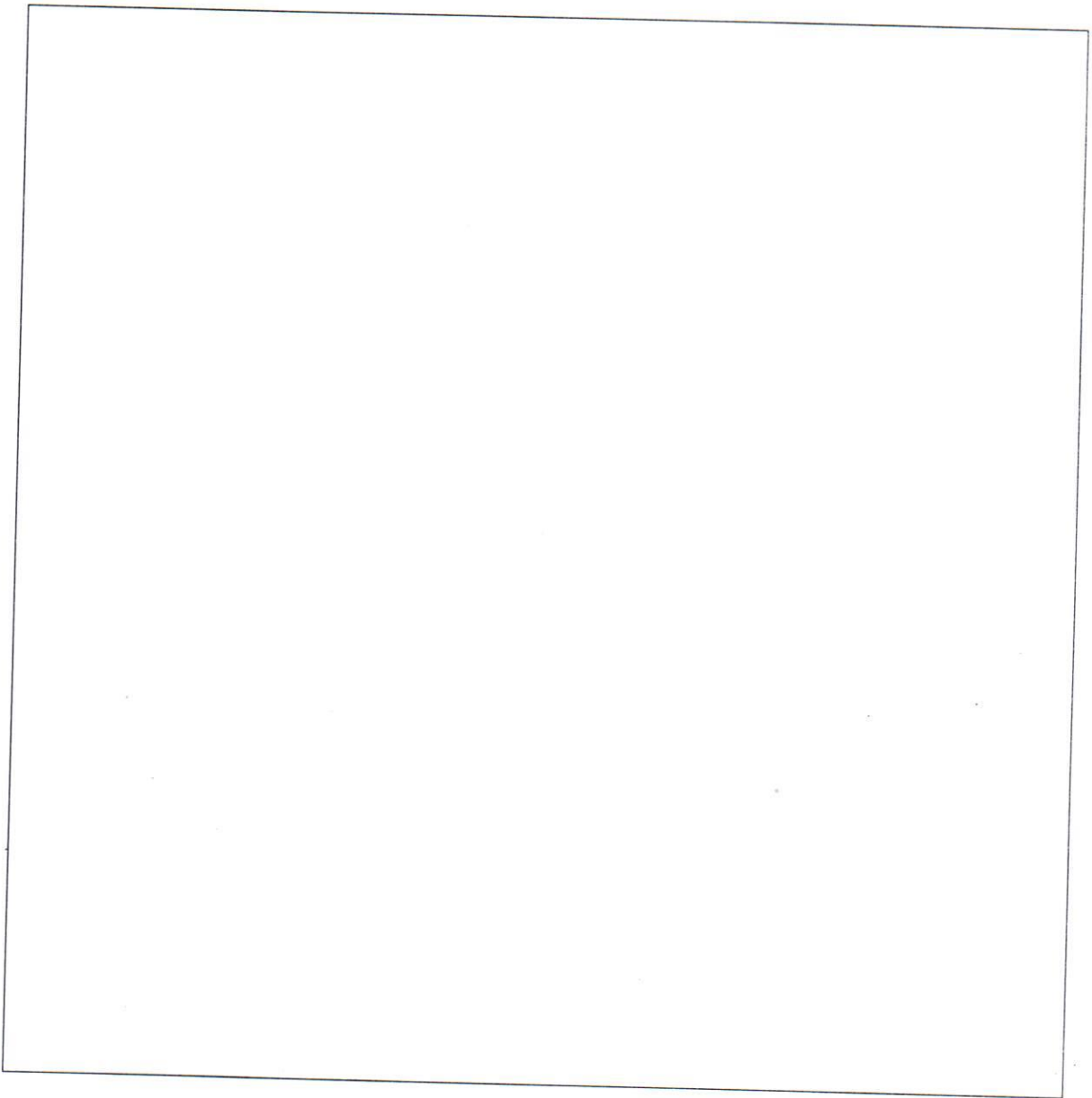
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$$36 = 6 \cdot 6 = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \quad \checkmark$$

3 é primo, portanto já está na forma de produtório de primos \checkmark

1

0 não é primo, pois não pode dividir si mesmo

(? realmente não é, mas o que isso tem a ver com a pergunta?)

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

- Definiu o termo "racionalizado" mas nem o usou depois.
- Escreveu três vezes a mesma coisa.
(veja gabarito)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".
DEFINIÇÃO.

Assuma que racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, irracional é todo número que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$. Logo, dizer que "o número real x é irracional" significa dizer que x não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, ℕ, ℤ.

FÓRMULA: $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \vee a, b \in \mathbb{Z}$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

o que é isso? (tem um "type error" aqui...)

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $C_{52,4} = \frac{52!}{48!4!}$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $C_{52,4} / 2 = \frac{52!}{48!4! \cdot 2}$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

- (i) $a \mid -a$;
- (ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

PROVA.

(i) $a \mid -a \Leftrightarrow$ existe $k \in \mathbb{Z}$, s.f., $ak = -a$.
se $k \in \mathbb{Z}$ e $ak = -a$, então $k = -1$... e se não!?

Portanto, $a \mid -a$.

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \Rightarrow a \mid c$

$a \mid b \Leftrightarrow b = a \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ (I)

$b \mid c \Leftrightarrow c = b \cdot l, l \in \mathbb{Z}$ (II)

Substituindo I em II, temos:
 $c = a \cdot \underbrace{k \cdot l}_{\in \mathbb{Z}}$

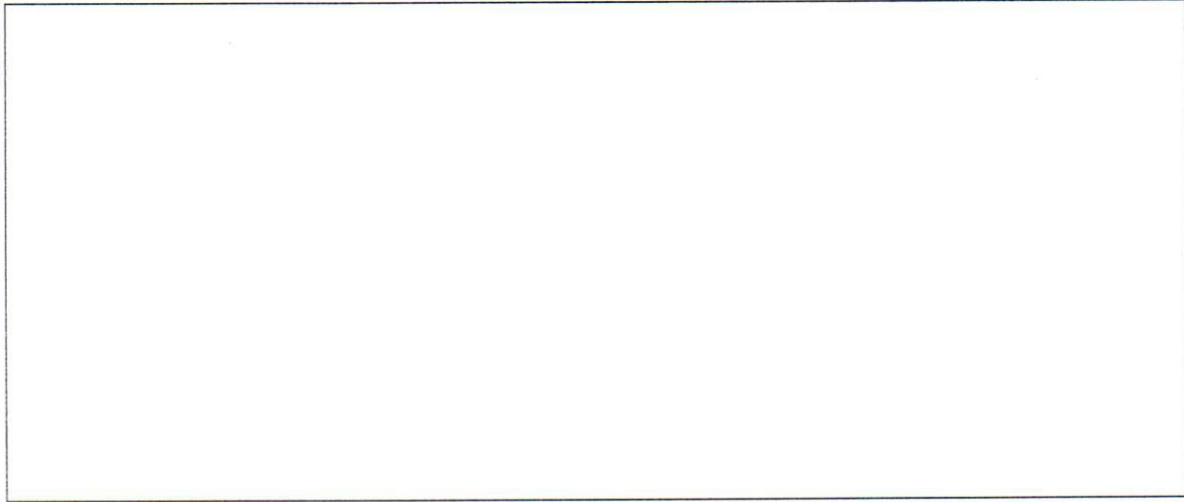
Portanto, $a \mid c$.

aqui ideia e escrita corretas!

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

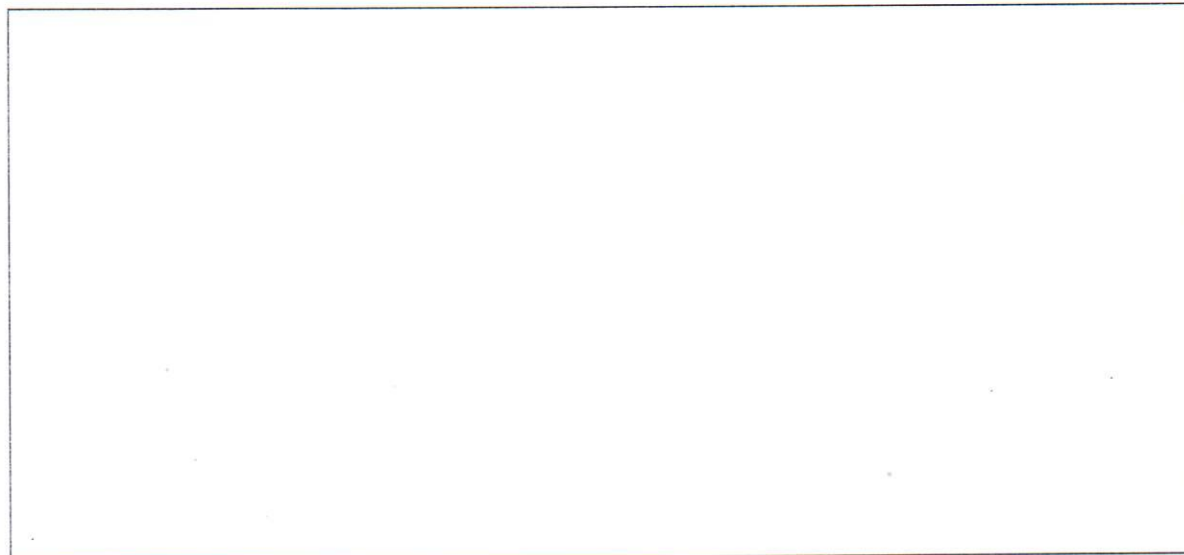
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

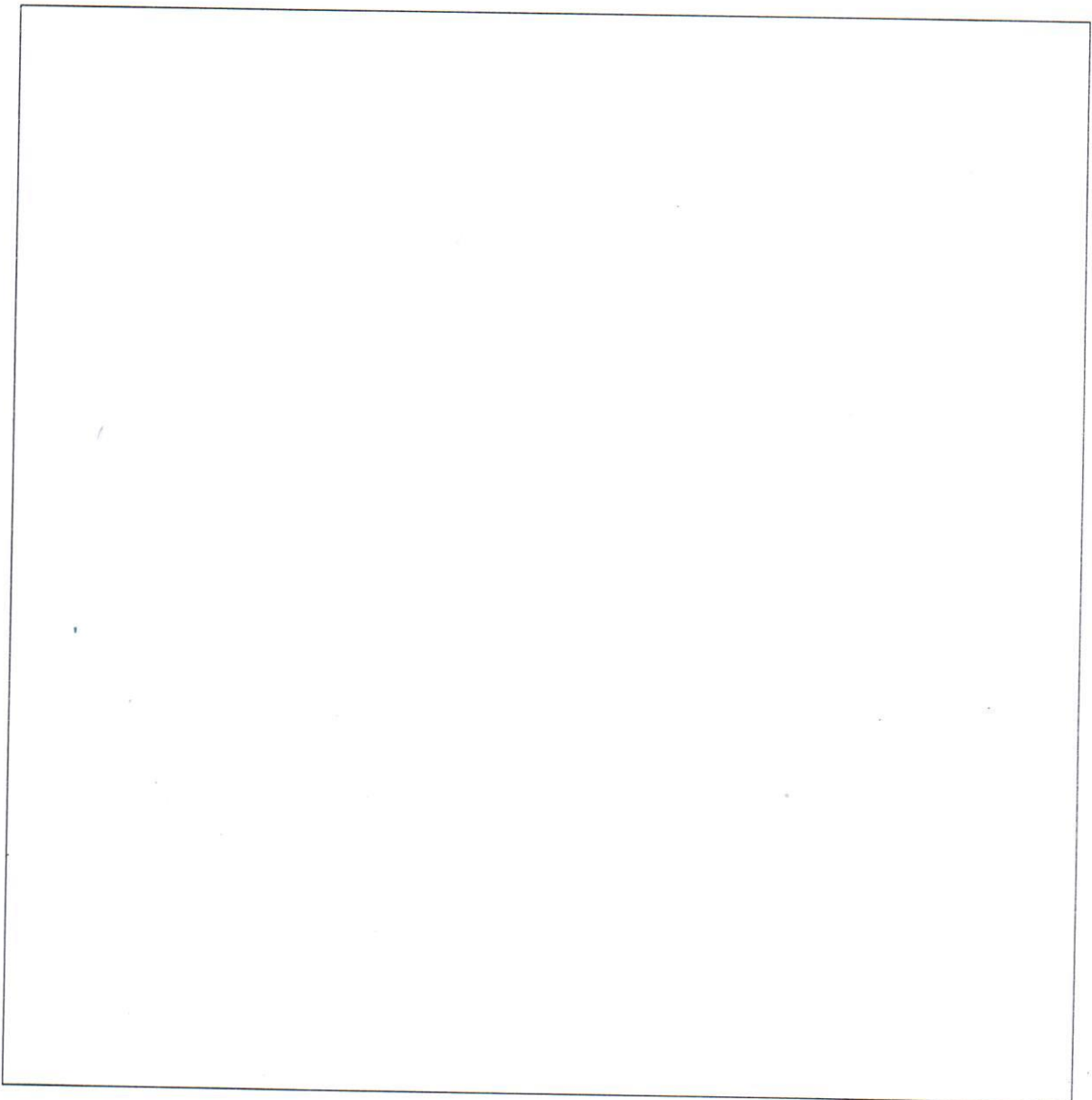
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



pra que isso?

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$
 $3 = 3^1$
 ~~$1 = 1^1$~~
 0

não é possível. Pois qual quer número (primo ou não) elevado à 0 é igual à 1. (E daí?)

0 : Não é possível. Pois o produto de uma multiplicação só será 0 quando uma de suas parcelas também o for. E como 0 não é primo, da mesma forma que nenhum primo elevado à $n, n \in \mathbb{Z}$ pode ser 0. 0 não pode ser escrito como produtório de primos.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

• Base da Indução
Para $n=2$, $2 = 2^1$, portanto, a base é verdadeira.

• Passo da Indução
• Hipótese da Indução
Se supomos que $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 11^d \dots$ é verdade para $n=k$, ou seja, $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 11^d \dots$

• Terc. da Indução

X

Cuidado com os pontinhos "...!"
Usamos indução para os eliminar!

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

Um número real x é irracional ~~se~~ ^{em} não existir um inteiro p e um inteiro q tal ^{tal} que $x = (q \text{ diferente de } 0)$ e que $x \cdot q = p$.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

$$x \in \mathbb{R} \wedge \exists p \exists q [p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge (q \neq 0) \wedge x \cdot q = p]$$

B

por que isso?

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$$52 - 4 = 48! \quad ??$$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

$$26$$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $a \mid -a$, ~~se~~ ^e existir um $k \in \mathbb{Z}$, tal que $a \cdot k = -a$

PODERIA DIZER QUE É PORÉM O CASO $k = -1$

→ tá sendo "bonzinho" demais!

O que tá escrito é apenas a definição! cadê a prova?

ii) Supondo que $a \mid b$ e $b \mid c$

Temos $a \cdot k = b$ e $b \cdot l = c$ para algum $k, l \in \mathbb{Z}$

Preciso mostrar que $a \mid c$
Assim, temos:

$$c = b \cdot l \\ = (a \cdot k) \cdot l$$

$$= a(k \cdot l)$$

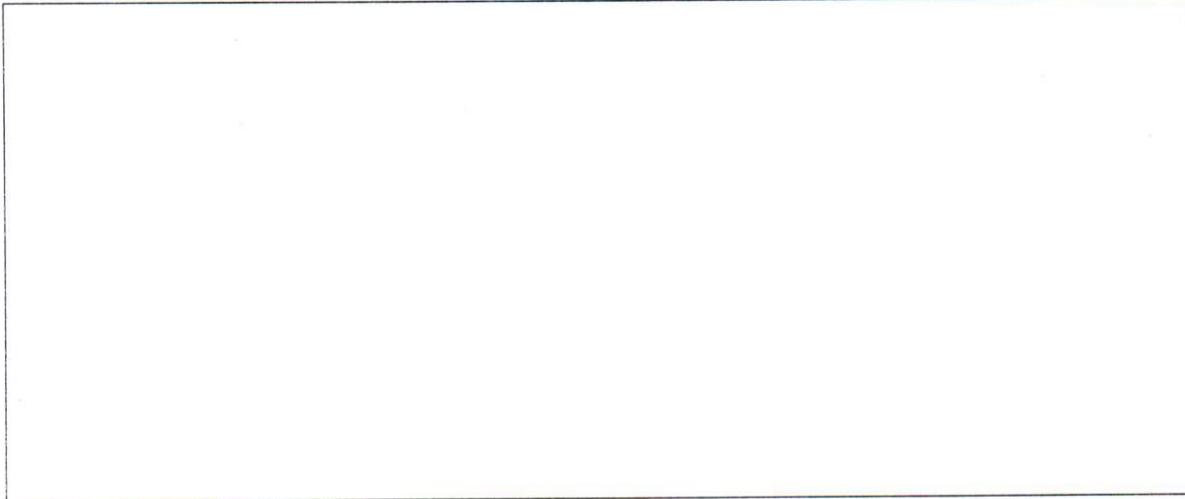
mostrando que $a \mid c$ pois $k \cdot l \in \mathbb{Z}$

$k \cdot l$

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

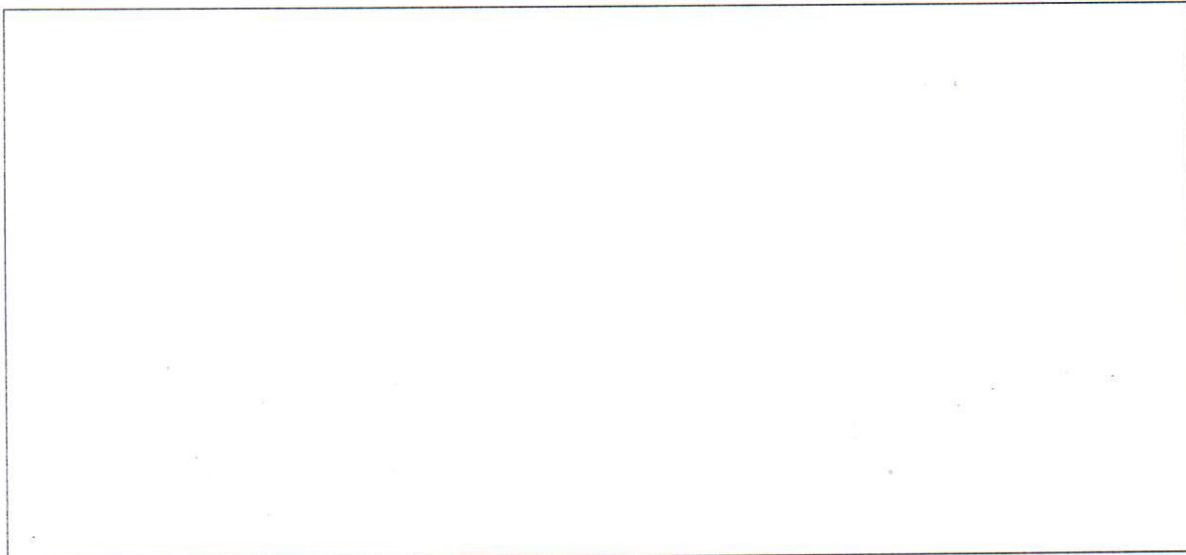
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

Provando o teorema por indução em n temos:
caso base $n=0$

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_{0+2-1}$$

$$F_{0+2-1} =$$

$$F_{2-1} =$$

$$(F_1 + F_0) - 1 =$$

$$(1 + 0) - 1 = 0 \quad \checkmark$$

certo!

cuidado com o "alignment"

Hipótese Indutiva:

Seja $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2-1}$$

por que? de onde?

"Suponha que... para algum $k \in \mathbb{N}$ "

Tese de Indução:

Preciso provar que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{(k+1)+2-1}$$

Assim:

$$\sum_{i=0}^{k+1} = \left(\sum_{i=0}^k F_i \right) + F_{k+1}$$

(somatório) \checkmark

$$= (F_{k+2-1}) + F_{k+1}$$

(H.I.) \checkmark

$$= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1$$

$$= F_{k+3-1}$$

\checkmark

\checkmark

Cuidado: 1 não é primo.

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ✓
 $3 = 1 \cdot 3$ ou pode ser escrito como $\prod_{i=1}^1 3$ ✓
1 = produtório de primos de tamanho 0 ou vazio
0 = não é possível escrever o produtório de 0, pois ele não é um número primo.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

36 também não é primo,
mesmo assim...

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$C_{52,4}$ ✓ ✓

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) $a \mid -a$
 $-a = a \cdot K$, PARA $K \in \mathbb{Z}$
~~.....~~
FAZEM
CONCLUIR QUE
 $K = -1 \in \mathbb{Z}$.

(ii) $a \mid b$
 $\therefore b = a \cdot K_1$, PARA $K_1 \in \mathbb{Z}$.
 $b \mid c$
 $\therefore c = b \cdot K_2$, PARA $K_2 \in \mathbb{Z}$.
 $a \mid c$
 $c = a \cdot K$, PARA $K \in \mathbb{Z}$.
 $b \cdot K_2 = a \cdot K$
 $a \cdot K_1 \cdot K_2 = a \cdot K$
Logo, $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$

def. \curvearrowright
essa é a definição do que queremos provar.

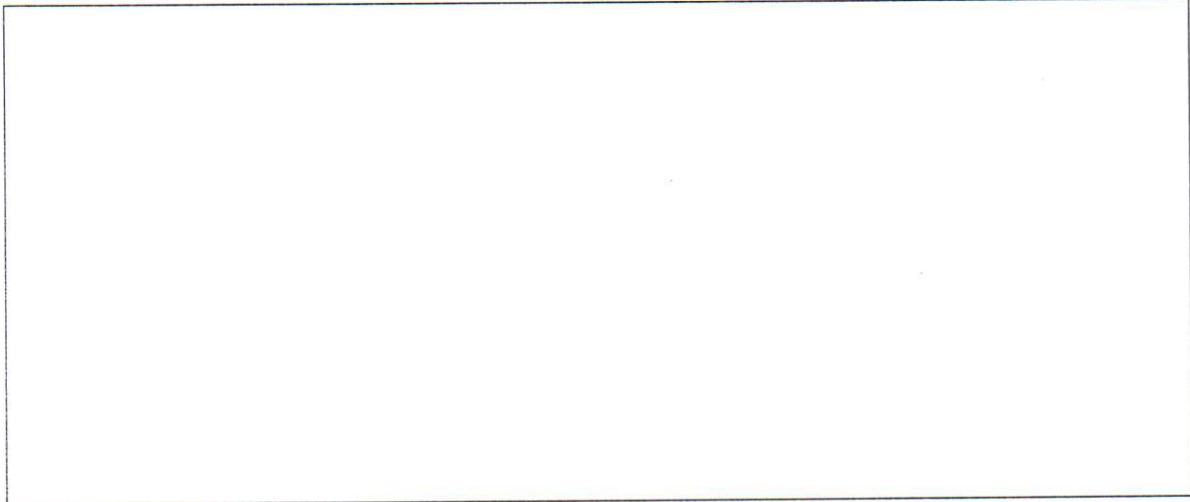
CUIDADO!
a ideia é correta mas bem-escondida

assim parece um fato, mas é o que queremos provar.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

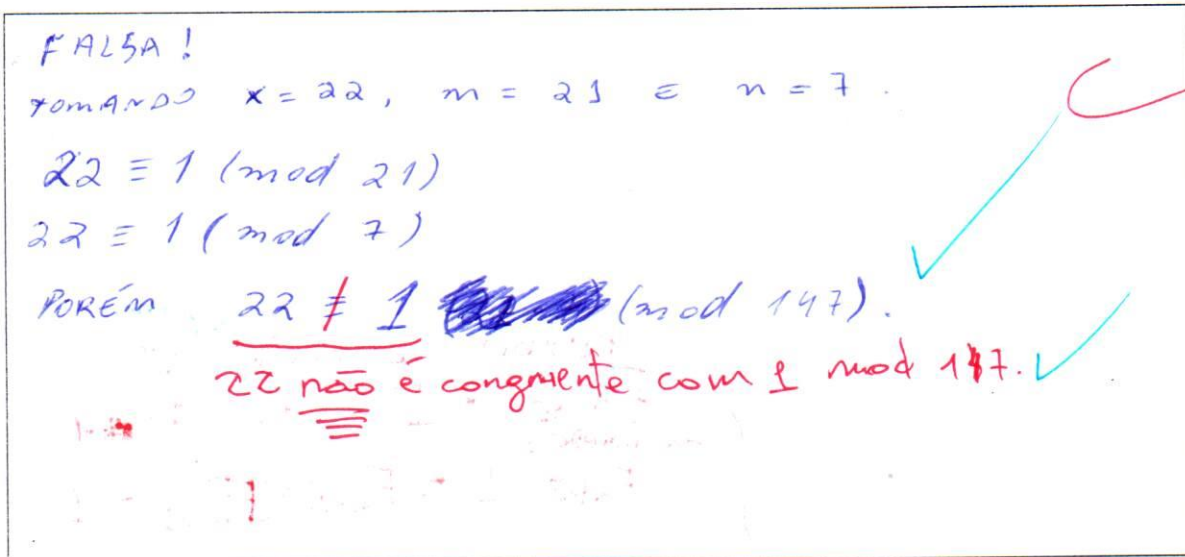
FALSA!

Tomando $x = 22$, $m = 21$ e $n = 7$.

$$22 \equiv 1 \pmod{21}$$
$$22 \equiv 1 \pmod{7}$$

Porém $22 \not\equiv 1 \pmod{147}$.

22 não é congruente com 1 mod 147.



I

Os números Fibonacci são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

PASSO BASE:

PARA $n=0$

~~...~~

$$F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = 1 - 1 = 0. \checkmark$$

A FÓRMULA É VERDADEIRA.

PASSO INDUTIVO:

H.I.: SUPONHA QUE A FÓRMULA É VERDADEIRA PARA $n=k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$F_k = F_{k+2} - 1$$

TESE: PROVAR QUE ^{a fórmula} É VERDADEIRA PARA ~~$k+1$~~ $k+1$ e pronto.

$$F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

SABEMOS QUE:

$$F_{k+3} = F_k + F_{k+2}$$

ASSIM:

$$F_k + F_{k+2} = F_{k+3} - 1$$
$$F = F_{k+2} - 1$$

?? QUE F É ESSE?

Boa pergunta.

FALTOU CONCLUIR QUE $F_{k+3} - 1 = F_k + F_{k+2} - 1$ concluindo.

$$\begin{aligned}F_{k+3} - 1 &= F_k + F_{k+2} - 1 \\F_{k+3} - 1 &= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 \\&= F_{k+2} + F_{k+1} - F_1 \\&= F_{k+2} + F_k ?? \\&= F_{k+2} + F_{k+2} - 1 \\&= \dots\end{aligned}$$

AFF!
Me enrolou
também!

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 = 6\,497\,400$$

SERIA 48!

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

$$52 \times 25 \times 24 \times 23 = 746\,304$$

AS 52 METADE É VERMELHA E A OUTRA METADE É PRETA. LOGO, SÃO 26.

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$. ✓

PROVA.

EXISTE

$a \mid b \iff$ EXISTE ALGUM INTEIRO K , TAL QUE $aK = b$

DADA A DEFINIÇÃO ACIMA TEMOS:

(I) $a \mid -a$ SSE ~~$aK = -a$~~ PARA ALGUM $K \in \mathbb{Z}$.
 isso K = -1 ✓

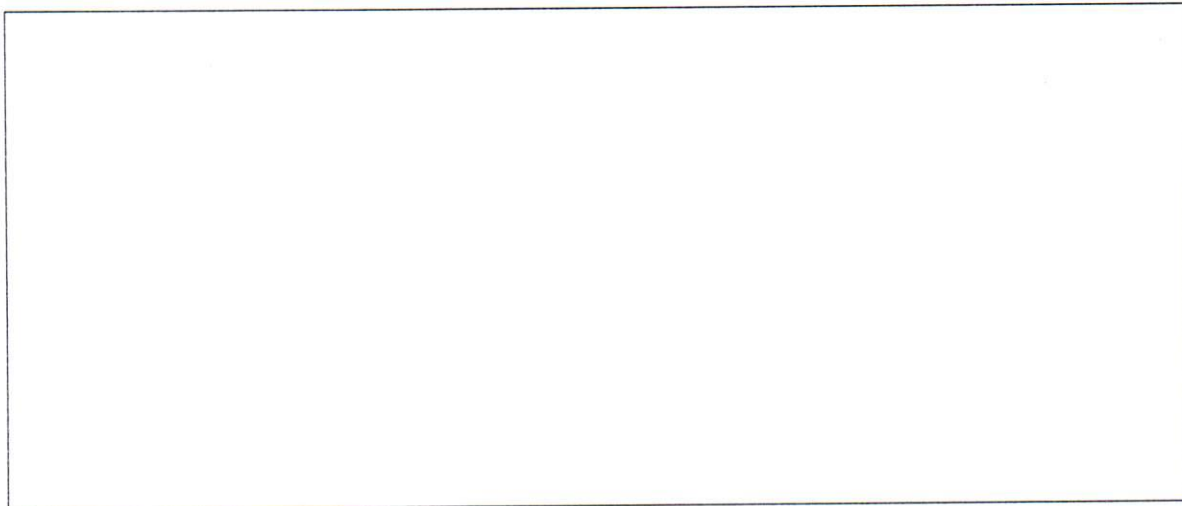
(II) ~~$a \mid b$ SSE $aK_1 = b$~~ } ENTÃO ~~$aK_1K_2 = c$~~ ✓
 $b \mid c$ SSE $bK_2 = c$ }
 $aK_3 = c$ PARA
 $K_3 = K_1K_2$ ✓

(Cuidado na escrita)

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

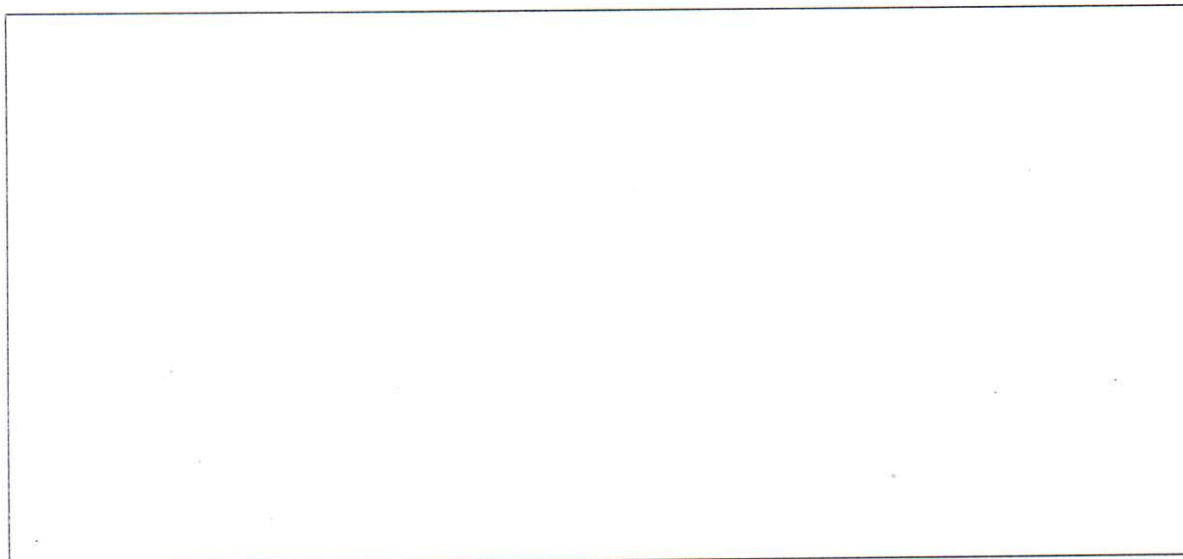
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

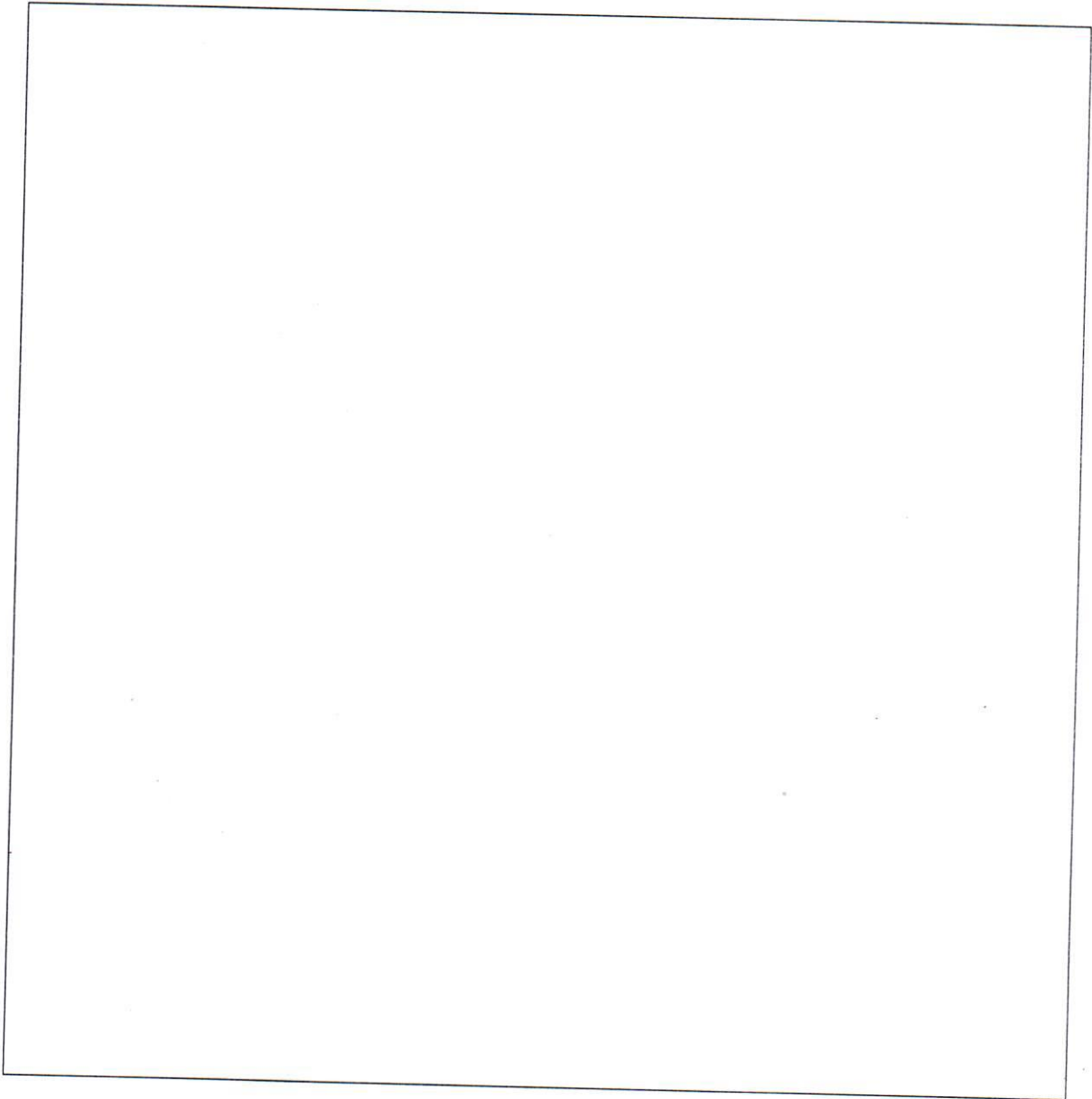
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

x é irracional quando ele não pode ser escrito como uma razão de inteiros.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA: $[x \in \mathbb{R}] \wedge [\exists a, b \in \mathbb{Z}] (a = x \cdot b \wedge b > 0)$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52! / 4!$

seria mais correto escrever $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: 26

isso é mais errado! tu quis dizer $(52/4)!$ (veja gabarito)

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid -a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a \cdot k = -a$
logo: $k = \frac{-a}{a}$
 $k = -1$
Como $-1 \in \mathbb{Z}$, e concluímos que $\exists k \in \mathbb{Z} \mid a \cdot k = -a$

não use esse símbolo como se fosse uma abreviação de "tal que"!!!

estás concluindo algo usando o que tu quer provar?

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

?

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

?

I

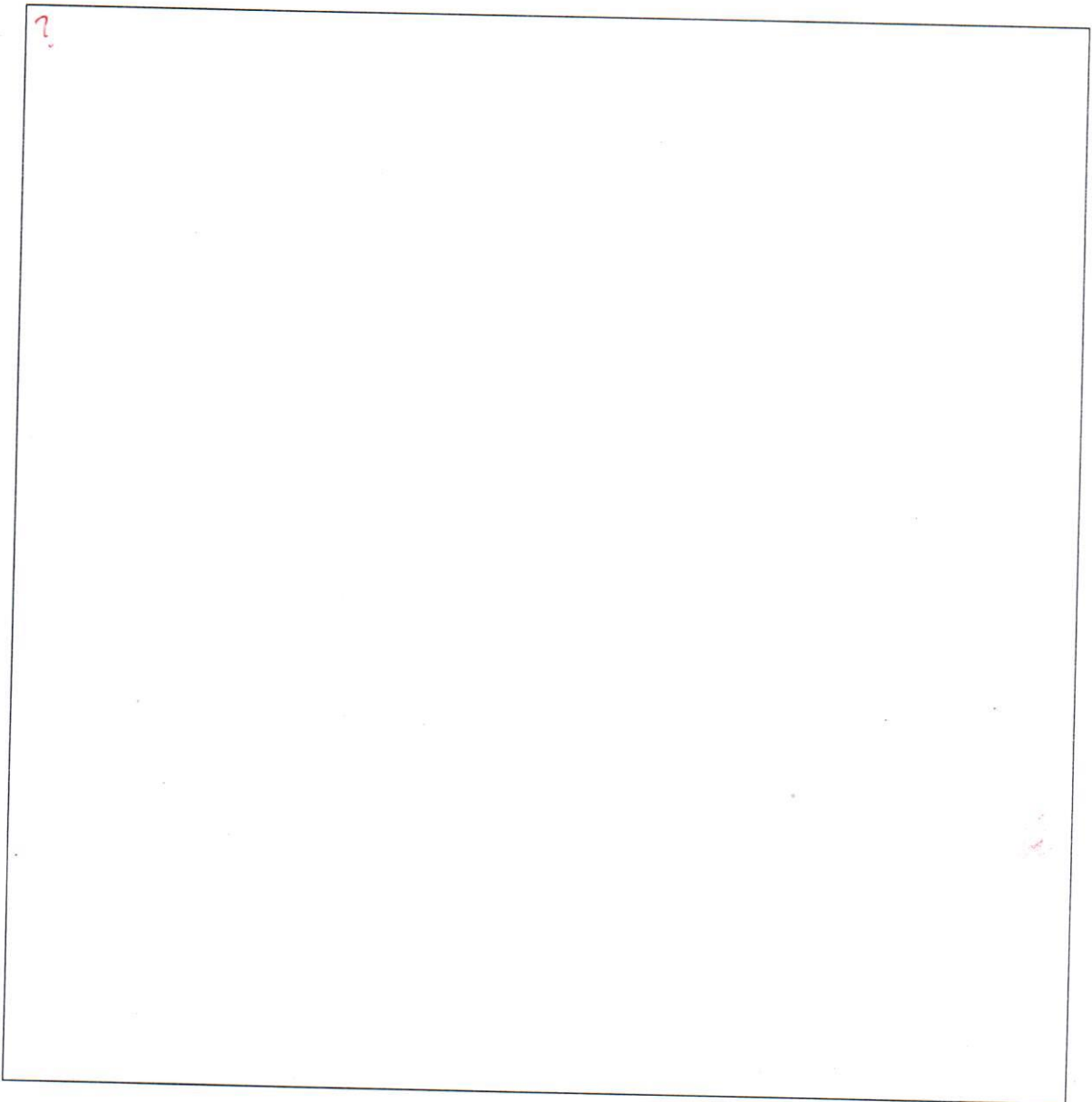
Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

1 não é primo!

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$3 = 3 \cdot 1$ ✓
 $1 = 1 \cdot 1$ ✗ (acho que podia acrescentar que 1 é produtório vazio) ✓
 O não é possível dividi-lo em um produto de números primos, pois não existe um número primo menor que ele. ✗
 $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ✓

escrever
 sim!

??

eu = 0

0 não é primo, então não é possível por isso.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da Indução forte (PIF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

?

isso não é válido para o número 2 também?

isso não é válido para o número 36 também?

Cuidado com tua escrita. (Veja gabarito).

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

Dizer que "o número real x é irracional" significa que o x pode ser escrito em forma de potência. Por exemplo, ~~x^2 é um número irracional.~~ X

Um número irracional não pode ser escrito como uma razão $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA:

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6497400$

→ seria assim se a ordem importasse!

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

i) $a \mid -a$

(a) divide (-a) se existe um inteiro k tal que possa ser escrito da forma: $(-a = ak)$.

Com isso temos: Não! Não temos isso..

$-a = ak$

$a = -ak$

$k = \frac{-a}{a}$

$k = -1$

ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$

(a) divide (b) se existe um inteiro (k) tal que possa ser escrito da forma: $(b = ak)$

(b) divide (c) se existe um inteiro (x) tal que possa ser escrito da forma: $(c = bx)$. Com isso, temos:

$c = akx$

$y = kx$

$c = ay$

* $\exists y / y \in \mathbb{Z}$

é: $\exists y / y \in \mathbb{Z}$

Do logo $a \mid c$

① Aqui você tá apenas afirmando que existem inteiros.

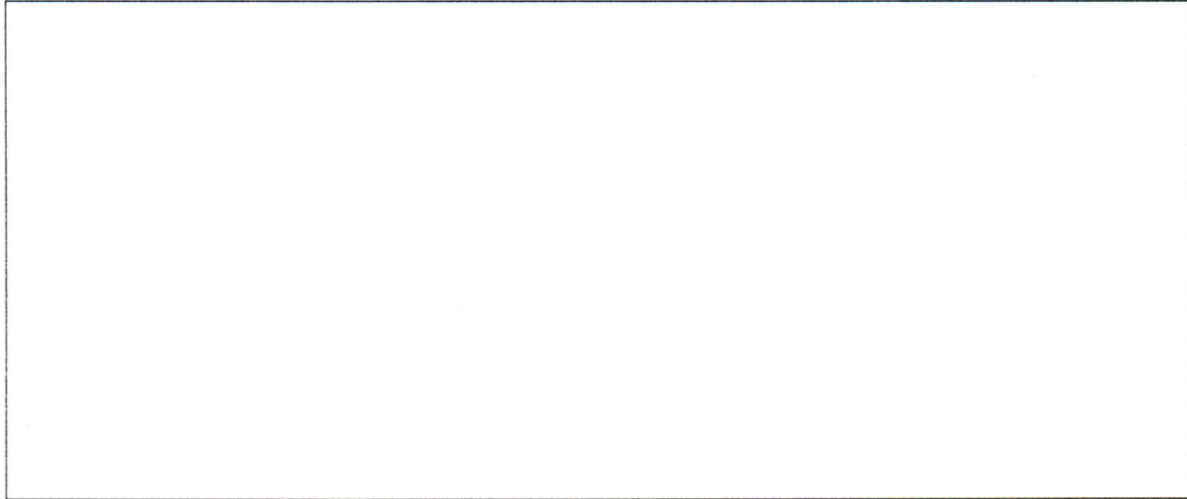
② NUNCA use o símbolo " \exists " assim como se fosse abbr. de "tal que".

pleonasm.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

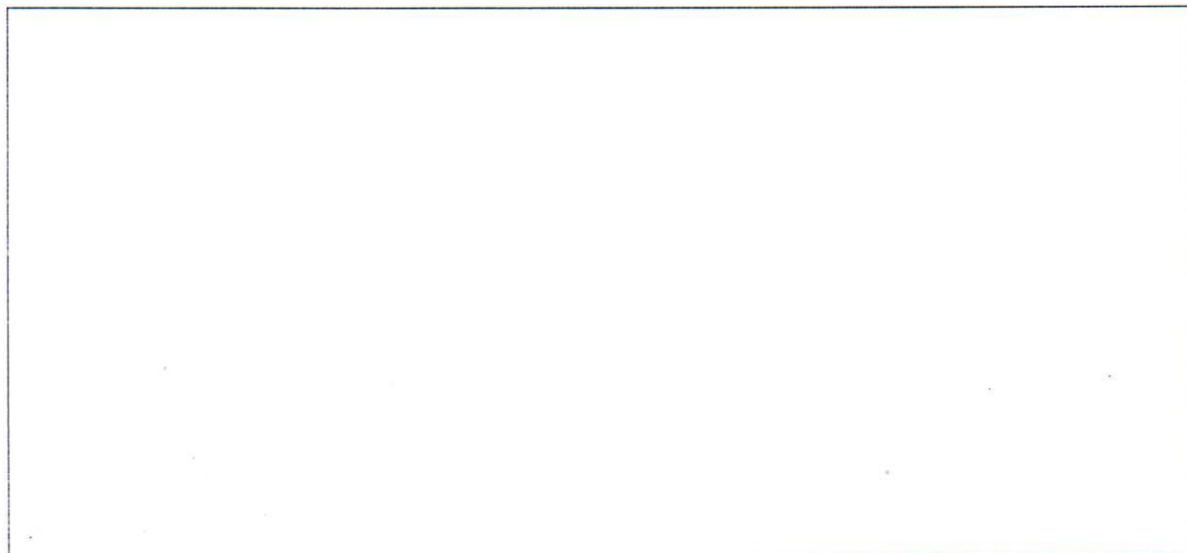
RESPOSTA & PROVA.



D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.



I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

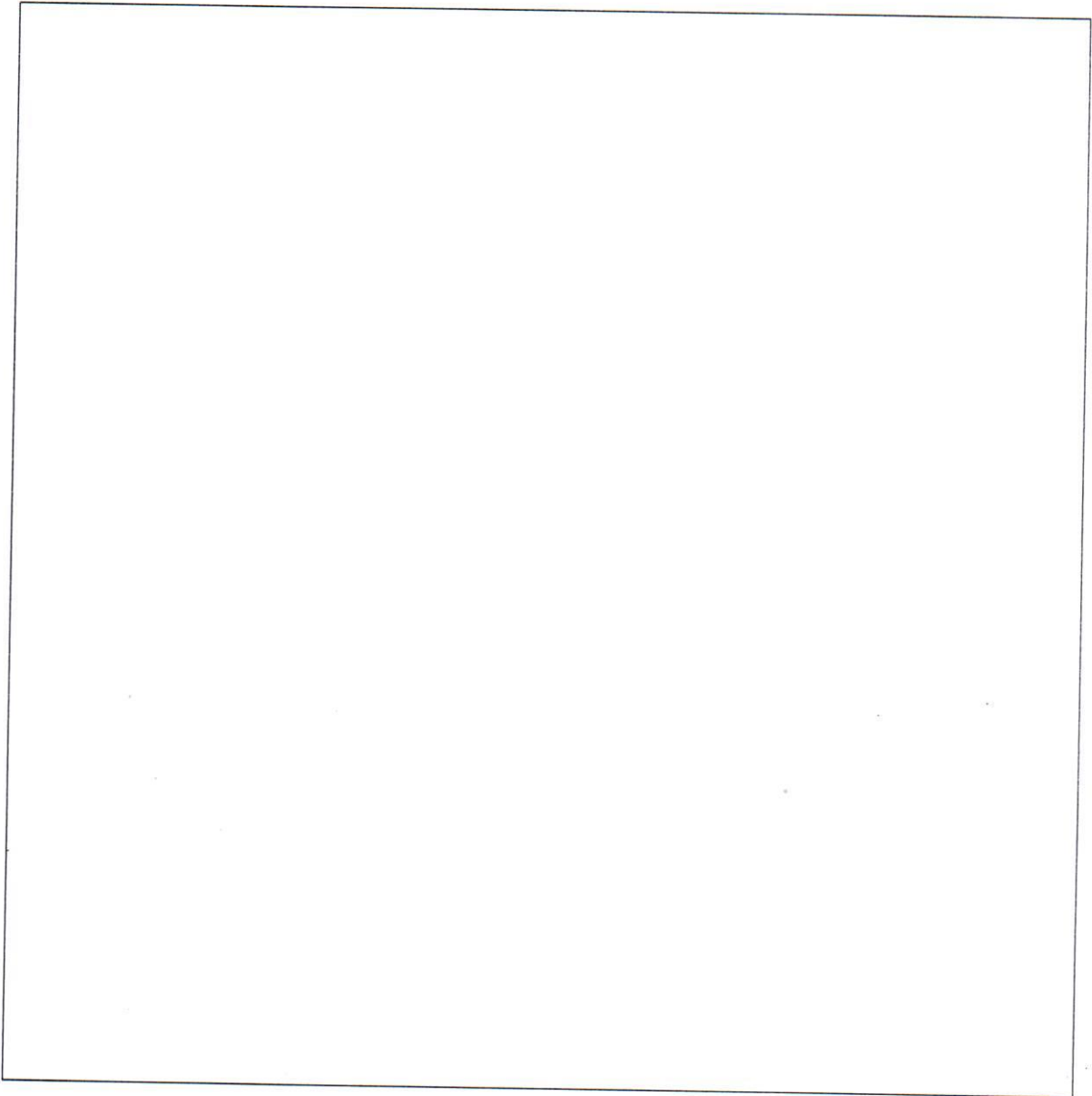
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

Para todos os n ~~ímpares~~ pares.

$$4^2 - 1 = 15, \text{ não primo.}$$

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Se $x \equiv 1 \pmod{m}$ e $x \equiv 1 \pmod{n}$, então

$m \mid x-1$ e $n \mid x-1$.

Pelo ~~teorema~~ ^{definição} da divisibilidade, temos que $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x-1 = m \cdot q^{(i)} \text{ e } x-1 = n \cdot q^{(ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), temos que $m \cdot q = n \cdot q$.

Então $m \cdot n \mid x-1$ e, portanto, $x \equiv 1 \pmod{mn}$.

CUIDADO!

Mesmo problema aqui.

tem que escolher variáveis diferentes!

I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

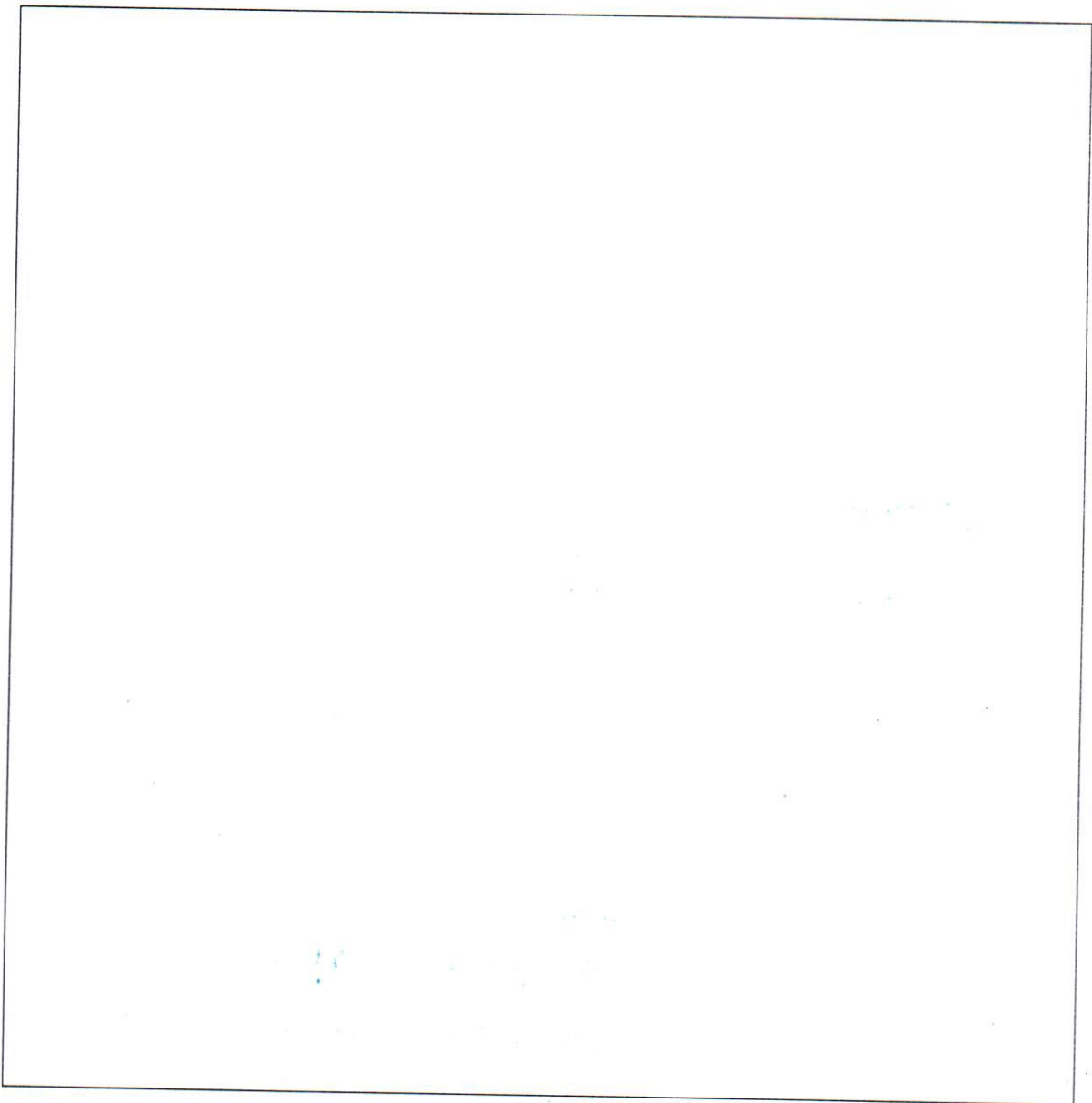
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

parece que você tá explicando porque o x é irracional.

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

x é irracional \iff x não pode ser expresso da forma $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$

Verifique que é redundante!

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar apenas os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, \mathbb{N} , \mathbb{Z} .

FÓRMULA: $x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0$

B

Não pode usar o \mathbb{Q} . Nem o "!" NUNCA assim!

Considere as 52 cartas de algum baralho. E nemo o \div .

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA:

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid -a$,
~~...~~
 $-a = (-1)a$
 tomando $(-1) = k$
 temos que $a \mid -a$
 Pela definição de divisibilidade ✓
 - Tem que chegar a conclusão dizendo que $k \in \mathbb{Z}$ ✓
~~...~~

Suponha que $a \mid b$ e $b \mid c$
 $\implies b = ak_1$ e $c = bk_2$ (I)
 para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$
 Se $a \mid c \implies c = ak_3$ (II)
 Substituindo I em II, temos:
 $bk_2 = ak_3$
 $ak_1k_2 = ak_3$
 tomando $k_1k_2 = k_3$, temos $ak_3 = ak_3$
 logo por transitividade se $a \mid b$ e $b \mid c$
 $\implies a \mid c$

Aqui tu quis dizer "logo".

importantissimo escrever isso!!

Não ligamos saber o que acontece SE $a \mid c$. Queremos provar que realmente $a \mid c$. Cuidado: ideia correta mas escrita erroneamente.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

$2^2 - 1 = 3$ ✓
(-2 também)

Faltou a prova ✓

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

$5 \equiv 1 \pmod{2}$
 $5 \equiv 1 \pmod{4}$
 $5 \equiv 5 \pmod{8}$

Portanto a afirmação é falsa. ✓

- Poderia ter demonstrado melhor
↓
como? ✓

I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

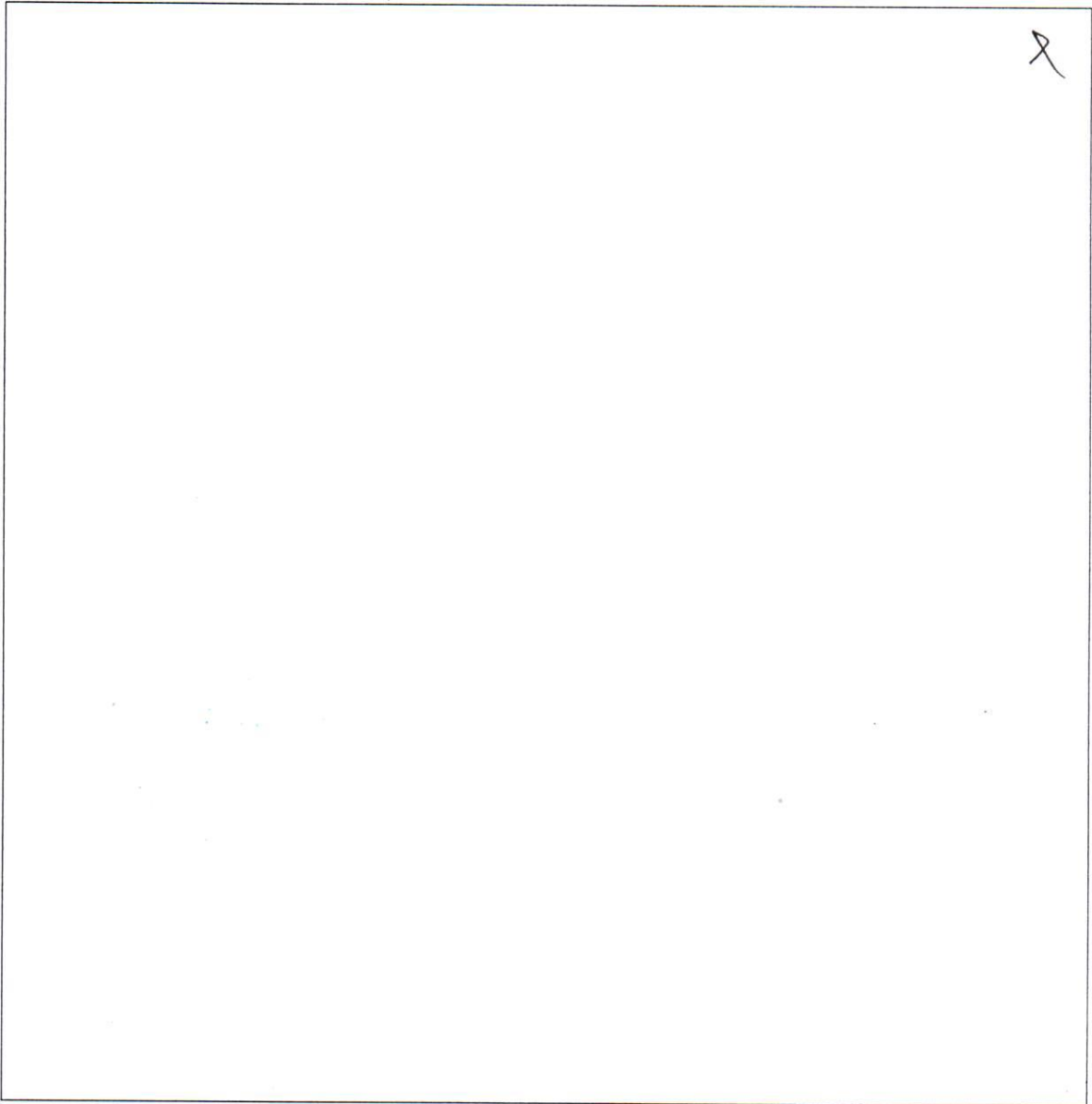
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



$$36 \neq 26$$

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

36 = 2 · 3² ✓
3 não é possível pois o mesmo é primo ✓
~~1 não é possível pois o mesmo possui de mesmo como divisor e 1 não é primo. ISSO NÃO É VERDADE SOBRE O 36 TAMBÉM?~~
0 não é possível pois de fato não há divisores para qualquer número

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

Tomamos como hipótese que um número $n \in \mathbb{N}$ é primo ou composto.
Se n não for primo não temos o que fazer.
Se n for composto, então n pode ser escrito como $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$
(começou bem!)
Faltou ~~afirmar~~ demonstrar a segunda parte. ✓

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é irracional". Não assume que o leitor já saiba a palavra "racional".

DEFINIÇÃO.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase "o x é racional". Considere como universo o \mathbb{R} e seus subconjuntos. Além dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: 0, 1, 2, +, >, ·, ∈, N, Z.

FÓRMULA:

$$[\exists p \in \mathbb{Z} \exists q \in \mathbb{Z} (p = x \cdot q \wedge \neg (q = 0))]$$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA:

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor? → 26 vermelhas, 26 azuis

RESPOSTA:

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

$a \mid b \text{ sse } \exists q \in \mathbb{Z} \mid b = a \cdot q$ $a \mid -a, \exists q \in \mathbb{Z} \mid a = a \cdot q (-1)$ <p style="color: blue; font-size: 1.2em;">NUNCA use o "!" assim!!</p>	$a \mid b \text{ sse } \exists q \in \mathbb{Z} \mid b = a \cdot q$ $b \mid c \text{ sse } \exists p \in \mathbb{Z} \mid c = b \cdot p$ <hr/> $a \mid c \text{ sse } \exists m \in \mathbb{Z} \mid c = a \cdot m$ $b \cdot p = a \cdot m$ $(a \cdot q) \cdot p = a \cdot m$ $a \cdot (q \cdot p) = a \cdot m$ $a \mid c$
---	--

Por que isso MOSTRA que $a \mid c$?

ideia correta mas mal-escrita.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?

RESPOSTA & PROVA.

evite!
Apenas $n=2$; ~~...~~ x
falta a prova.
E o -2.

D2 Prove ou refuta a afirmação: para todo $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

I

Os números *Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

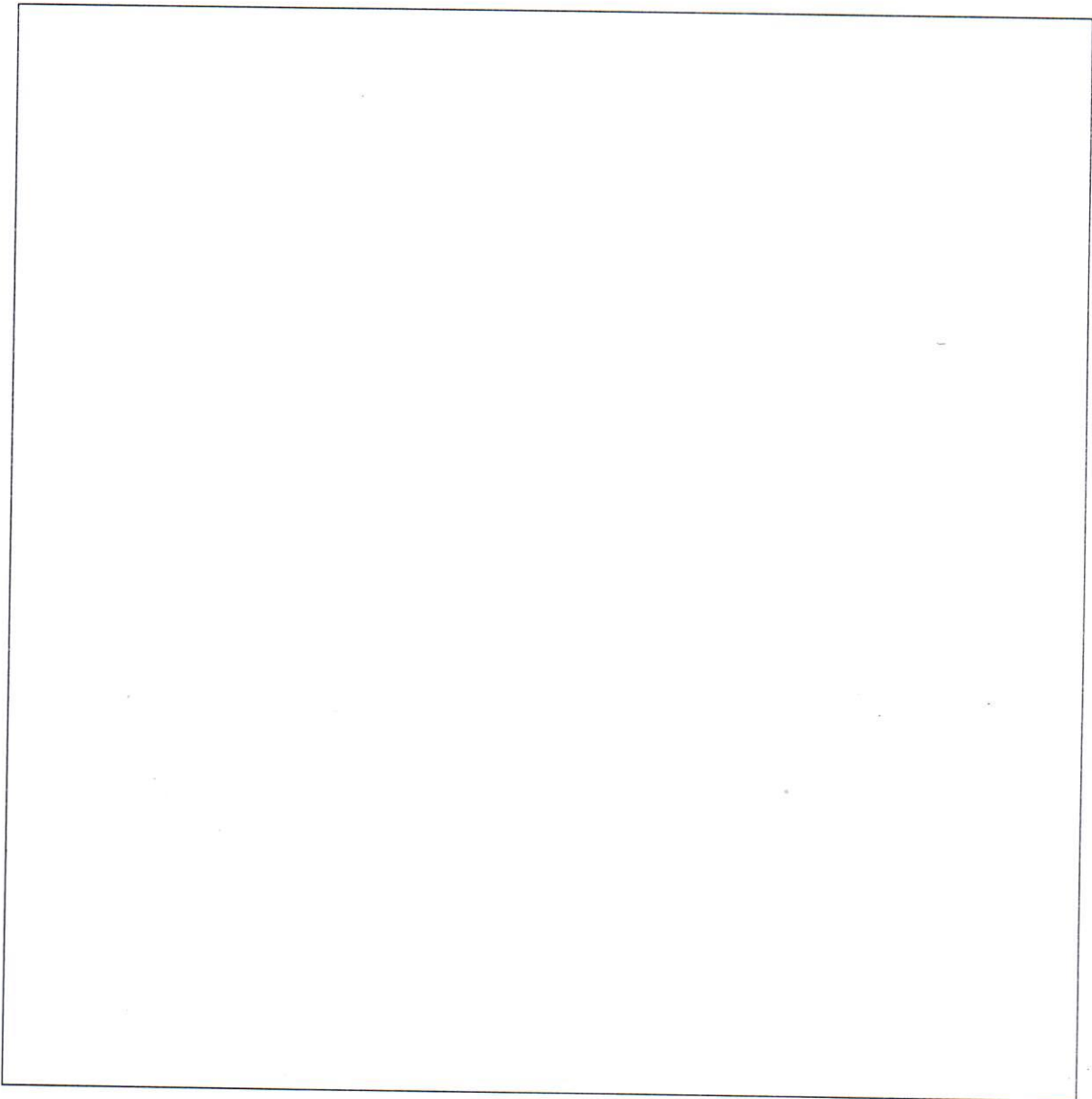
$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.



J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de primos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $3 = \text{primo.}$	O teorema fundamental da aritmética diz que para todo número inteiro não primo, existe única fatoração em números primos, não se excluindo 1 e 0, pois ambos só podem ser escritos como produtos de si próprios.
---	--

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).

PROVA.

Teorema: cada número $n > 5$ é positivo.

Questão: podemos concluir que os 0, 1, 2, 3, e 4 não são positivos por causa do teorema?