
Nome:

30/06/2017

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.³
- XII. Escolha até 3 dos A, B, C, D para resolver.⁴
- XIII. **Para quem já passou FMC2:**
Seja p o número dos teus pontos desta prova.
Então $(p - 100) \vee 0$ pontos serão distribuídos nas tuas três notas existentes.
Para quem não passou FMC2:
A nota desta prova vai substituir tua pior das provas existentes.

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas com respostas em mais que o permitido não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \quad (\text{ZF1})$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \quad (\text{ZF2})$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \quad (\text{ZF3})$$

Separation (schema).

Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \quad (\text{ZF4})$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \quad (\text{ZF5})$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a)) \quad (\text{ZF6})$$

Infinity.

$$\exists i (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \quad (\text{ZF7})$$

Replacement (schema).

Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a , a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \quad (\text{ZF8})$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset) (\exists d \in a) [d \cap a = \emptyset] \quad (\text{ZF9})$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G ; e, * \rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G) [a * b \in G] \quad (\text{G0})$$

$$(\forall a, b, c \in G) [a * (b * c) = (a * b) * c] \quad (\text{G1})$$

$$(\forall a \in G) [e * a = a = a * e] \quad (\text{G2})$$

$$(\forall a \in G) (\exists a' \in G) [a' * a = e = a * a'] \quad (\text{G3})$$

Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

Definição 2. Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$N \leq G \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{para todo } g \in G \text{ e } n \in N, \quad gng^{-1} \in N$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{para todo } g \in G, \quad gN = Ng$$

Definição 3. Um poset não vazio $\mathcal{L} = \langle L ; \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{x, y\}$$

$$x \wedge y \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{x, y\}$$

Definição 4. Um poset não vazio $\mathcal{L} = \langle L ; \leq \rangle$ é um *reticulado completo* sse $\bigvee S$ e $\bigwedge S$ existem para todo $S \subseteq L$.

(52) **A**

Seja $\langle P ; \leq \rangle$ um poset. Denotamos com P^∂ o poset $\langle P ; \geq \rangle$.

(12) **A1.** Defina um $\varphi : \mathcal{O}(P) \cong \mathcal{O}(P^\partial)$.

DEFINIÇÃO.

(16) **A2.** Defina um $\psi : \mathcal{O}(P_1 \uplus P_2) \cong \mathcal{O}(P_1) \times \mathcal{O}(P_2)$.

DEFINIÇÃO.

(24) **A3.** O que podes concluir sobre os ordinais α e β se... :

(i) $\omega + \alpha = \omega$

(iii) $\omega \cdot \alpha = \omega$

(v) $\alpha + \beta = \omega$

(ii) $\alpha + \omega = \omega$

(iv) $\alpha \cdot \omega = \omega$

(vi) $\alpha \cdot \beta = \omega$

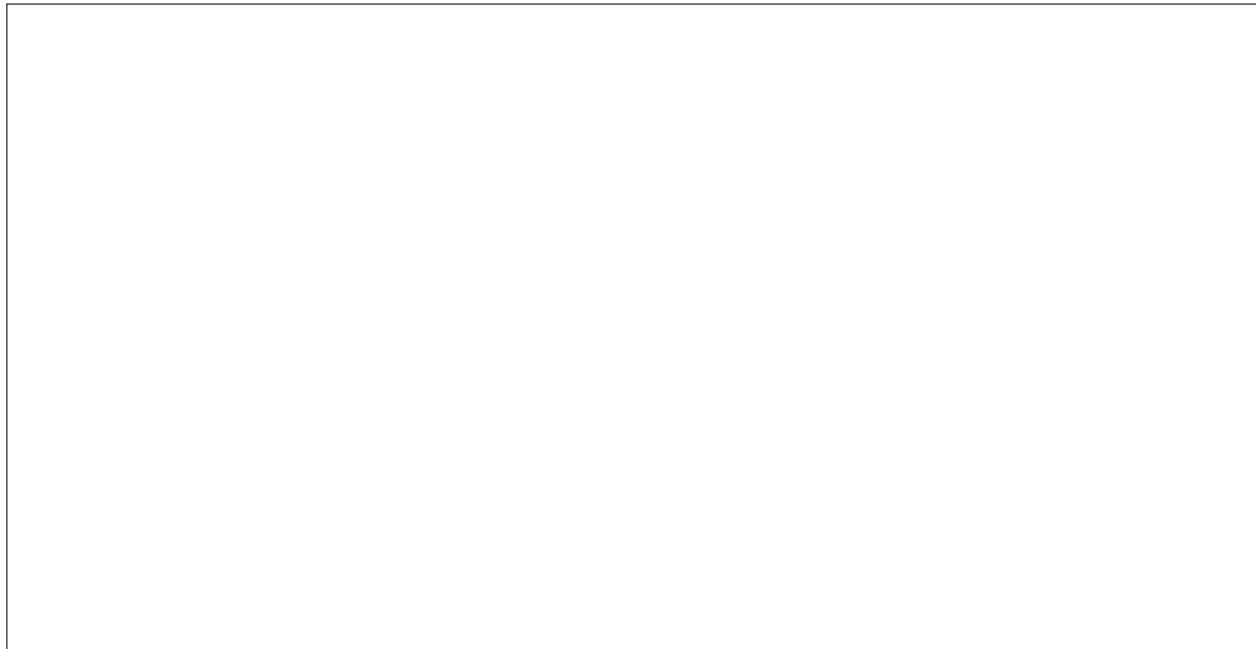
CONCLUSÕES.

(52) **B**

(24) **B1.** Prove que não existe uma cadeia infinita \in -descendente

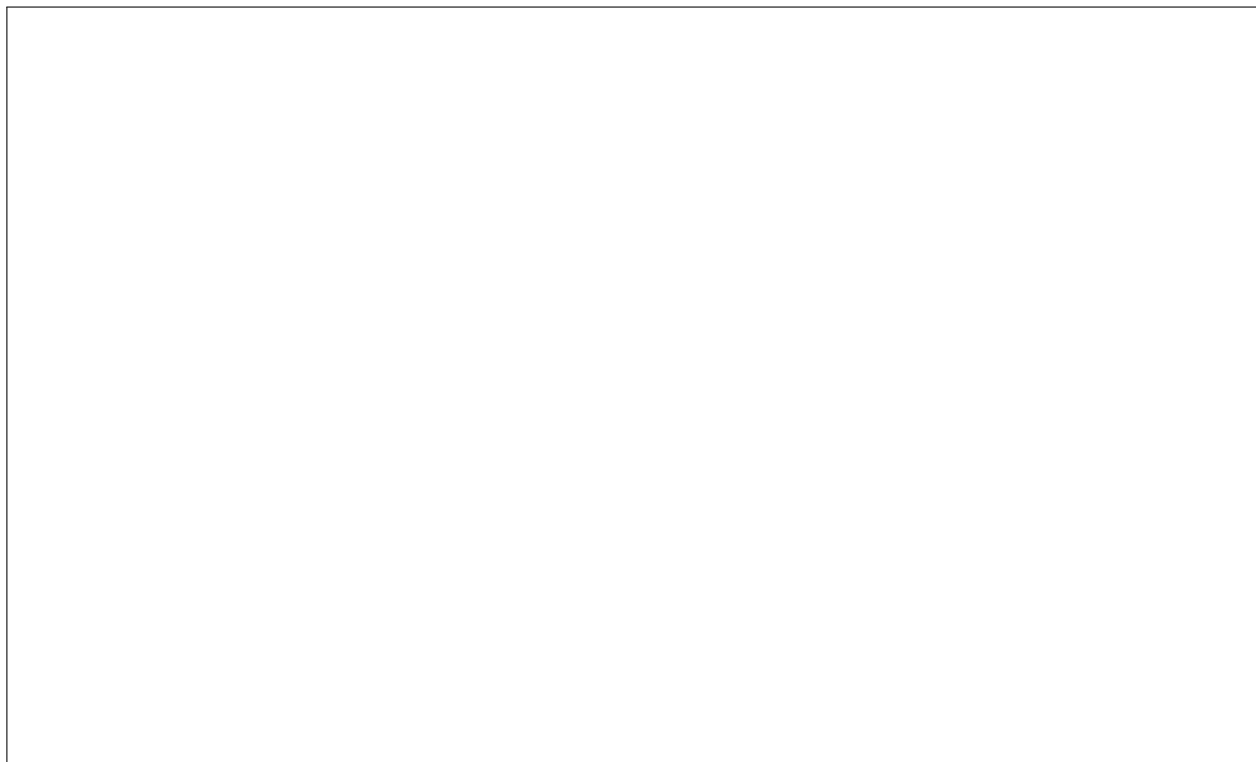
$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ni \cdots$$

PROVA.



(28) **B2.** Mostre que podemos tirar o Pairset (ZF3) da ZF “sem perder nada”. Ou seja, dado objetos a, b , mostre que existe o conjunto $\{a, b\}$ que consiste em exatamente esses objetos.

PROVA.



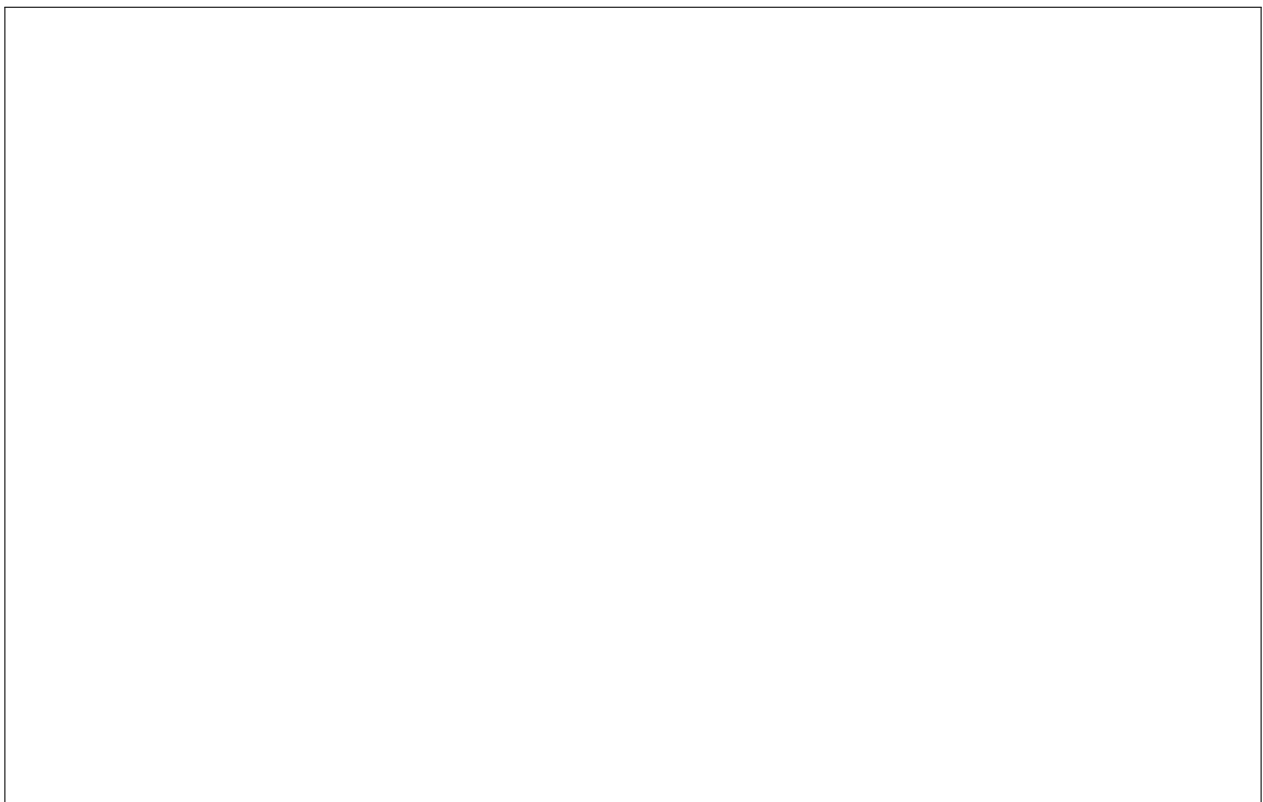
(52) **C**

Um $A \subseteq \mathbb{N}$ é *cofinito* sse $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

(12) **C1.** Mostre que a família $\mathcal{L}_1 := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ é cofinito}\}$ é um reticulado de conjuntos.
PROVA.



(16) **C2.** Mostre que a família $\mathcal{L}_2 := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ é finito ou cofinito}\}$ também é.
PROVA.

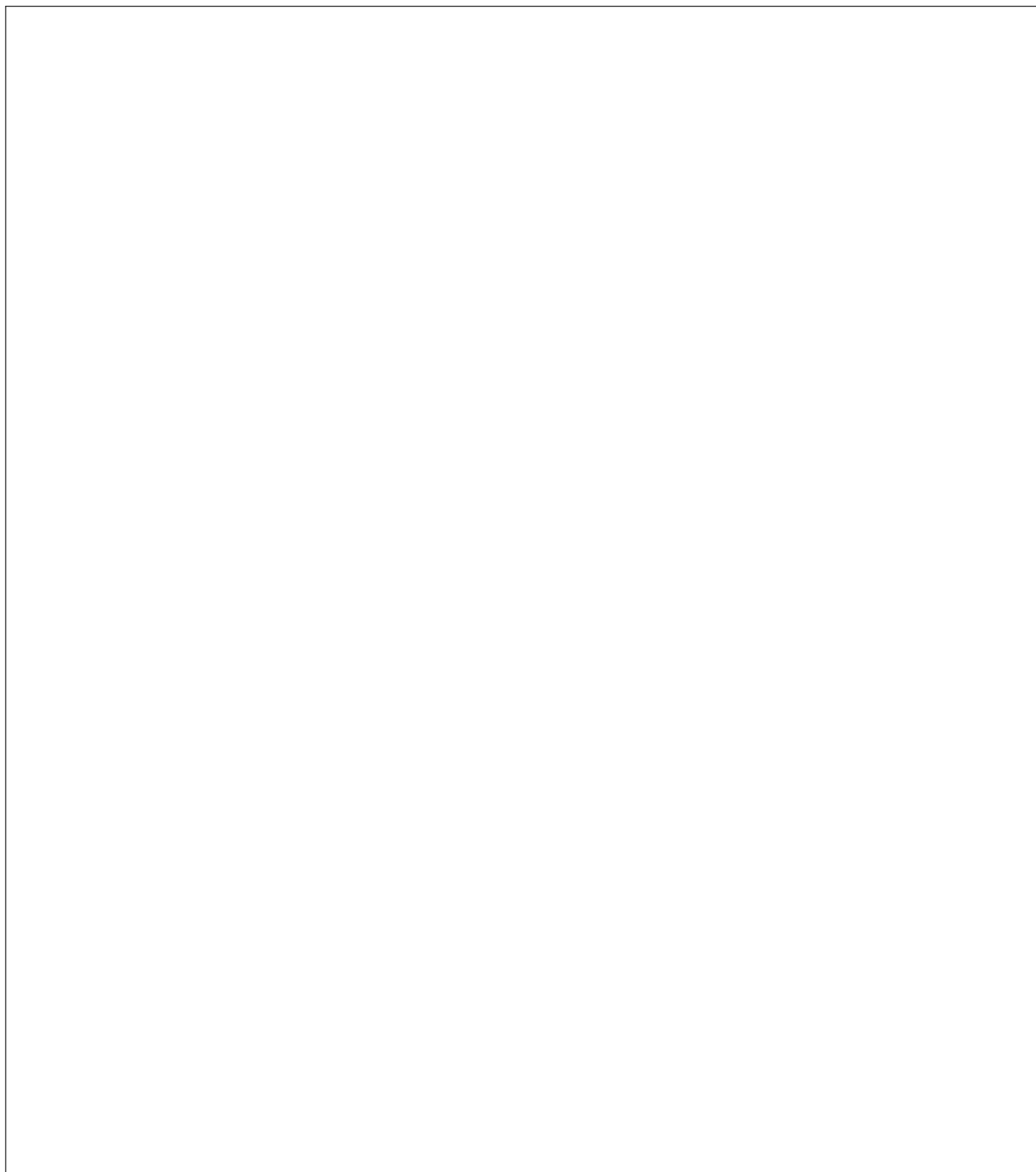


(24) **C3.** Seja $A_n := \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \dots, 2n - 2\}$ o \mathbb{N} sem os primeiros n números pares. Mostre que:

se $B \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então B não é cofinito.

Deduza que nem \mathcal{L}_1 nem \mathcal{L}_2 são completos.

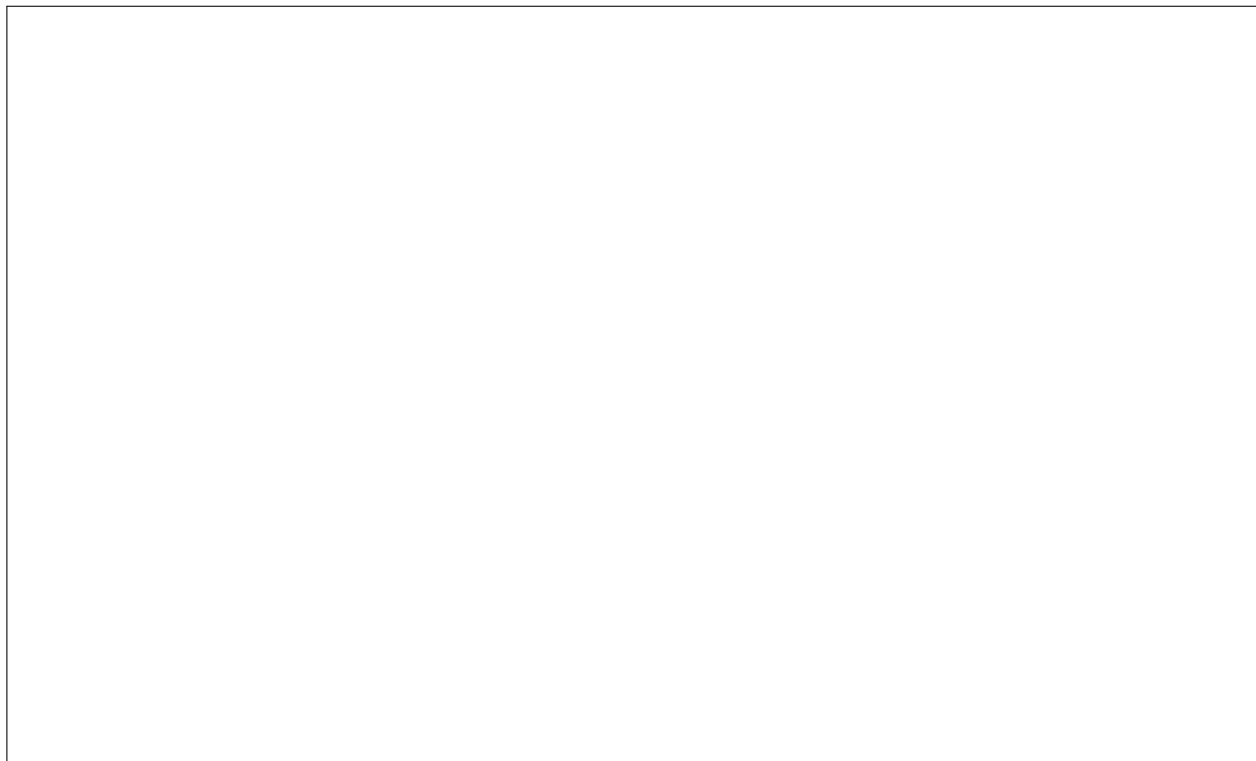
PROVA.



(52) **D**

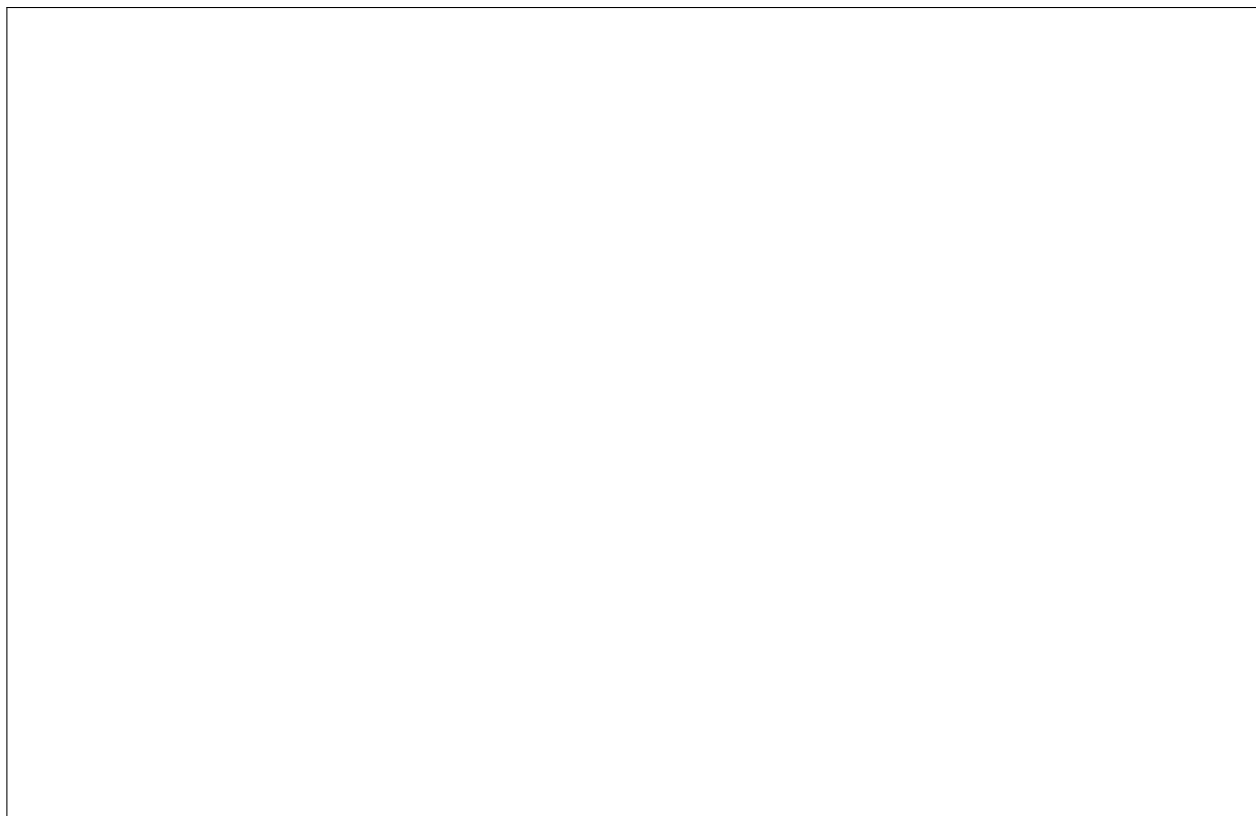
(12) **D1.** Se $H \leq G$ de índice 2, então $H \trianglelefteq G$.

PROVA.



(16) **D2.** Se $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, então $H \cap N \trianglelefteq H$.

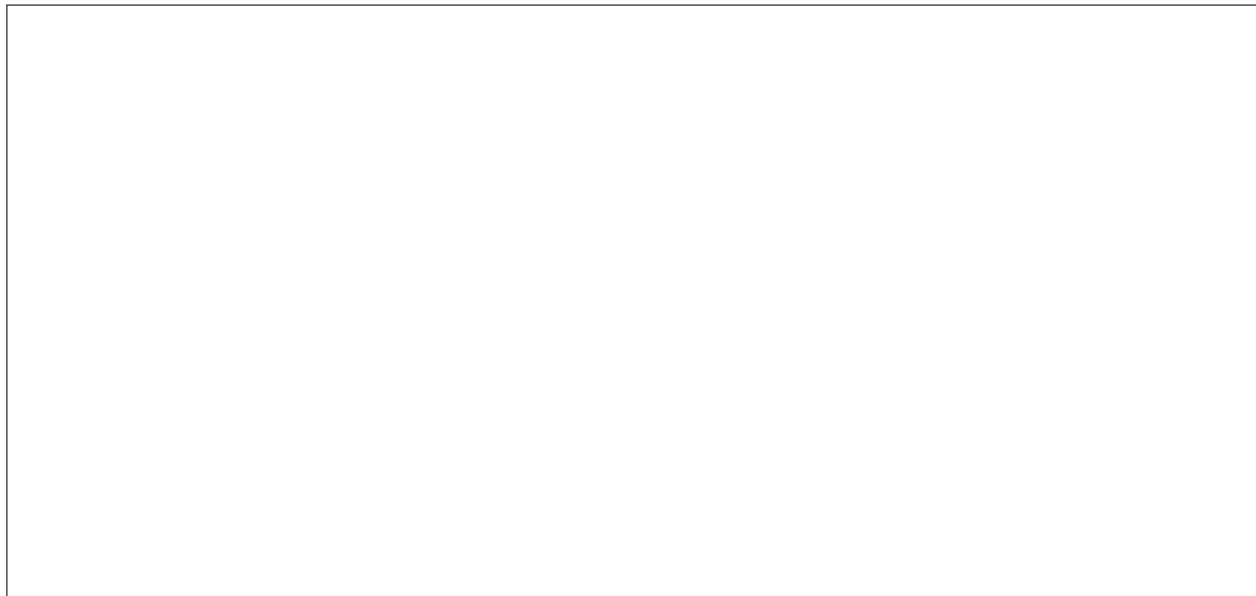
PROVA.



(24) **D3.** Seja $H \leq G$. Defina $a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} ab^{-1} \in H$.

(12) Mostre que \sim é uma relação de equivalência.

PROVAS.



(12) Sejam $a, b \in G$. Prove que:

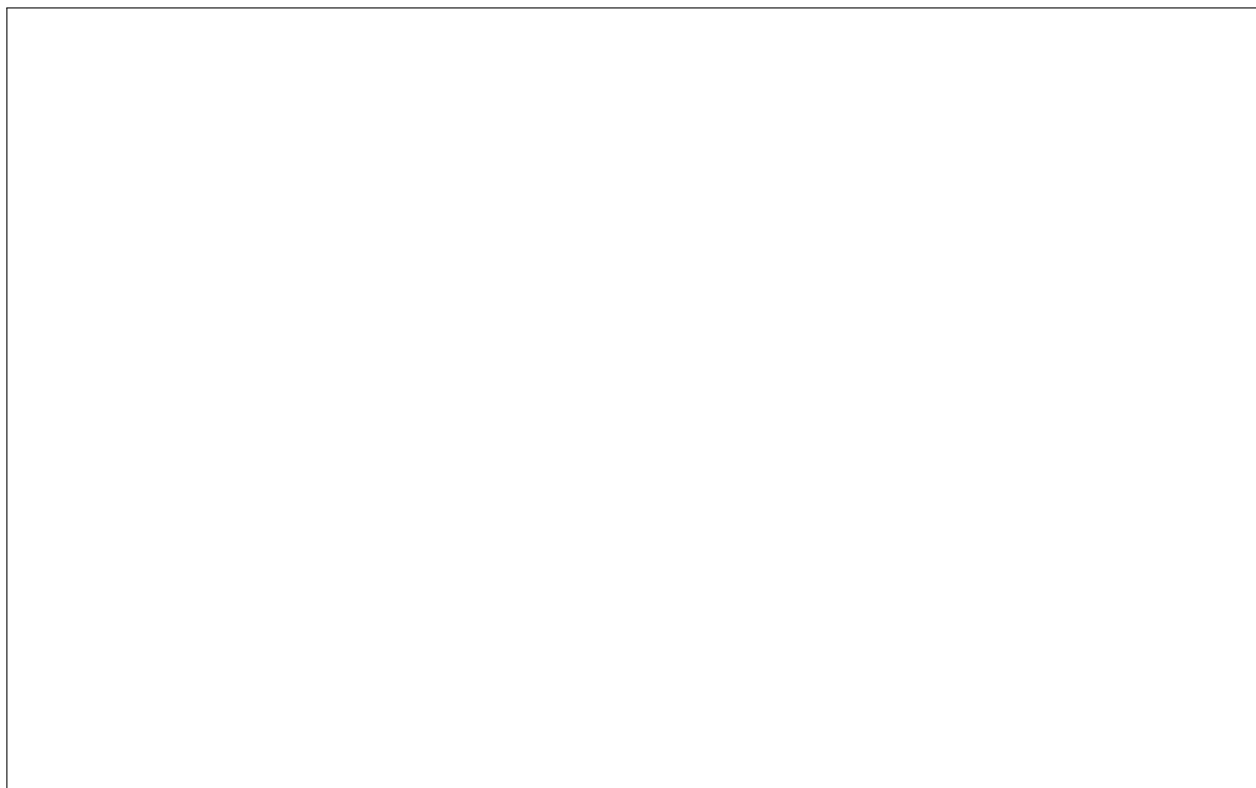
(i) $a \in H, b \in H \implies a \sim b$

(iii) $a \notin H, b \notin H \not\implies a \sim b$

(ii) $a \in H, b \notin H \implies a \not\sim b$

(iv) $a \notin H, b \notin H \not\implies a \not\sim b$

PROVAS.



Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO