FMC1, 2024.2
(Turma M56 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome:

2025-01-24

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. **Escolha apenas as questões de uma página para responder** e respeite as restrições dos problemas que têm escolha.

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\, a + (b + c) = (a + b) + c \,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\, 0 + a = a = a + 0 \,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\, (-a) + a = 0 = a + (-a) \,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\, a + b = b + a \,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\, a \cdot 1 = a \,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a \neq 0)\big(\exists a'\big)\big[\, a' \cdot a = 1 = a \cdot a' \,\big] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\, a \cdot b = b \cdot a \,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\, (a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b) \,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\, a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c \,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\, \text{e.u.d.: } a > b;\ a = b;\ b > a \,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\, a > b \implies a + c > b + c \,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\, a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc \,] \tag{RO-M}$$

$$(\forall A : \mathsf{Set\ Real})[\, A \text{ habitado } \;\&\;\; A \text{ cotado por cima } \implies A \text{ possui supremum} \,]. \tag{R-Compl}$$

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(66) **B**

Demonstre **até dois** dos:

(33) **B1.** Enuncie e demonstre a unicidade de identidade multiplicativa.

(33) **B2.** O 0 não tem inverso multiplicativo.

(33) **B3.** $-(-x) = x$

DEMONSTRAÇÃO DA ______ .

DEMONSTRAÇÃO DA ______ .

(42) **S**

Sejam A, B conjuntos que possuem suprema $s = \sup A$ e $t = \sup B$.
Demonstre que $s + t = \sup(A + B)$.
Resposta.

(42) **U**

Enuncie e demonstre a unicidade de supremum.
Resposta.

(100) **C**

(84) **C1.** Demonstre a proposição:

$$(a_n)_n \text{ eventualmente constante } \implies (a_n)_n \text{ convergente.}$$

DEMONSTRAÇÃO.

(16) **C2.** Considere sua reciproca:

$$(a_n)_n \text{ eventualmente constante } \impliedby (a_n)_n \text{ convergente.}$$

Dê um exemplo para mostrar que essa implicação não é válida. (Sem demonstrar.)
Escolha uma outra distância tal que a implicação é válida. (Demonstre!)
RESPOSTA.

Só isso mesmo.

Rascunho