

---

Nome:

---

Regras:

2025-01-24

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.      VI. Responda dentro das caixas indicadas.  
II. Nenhuma consulta de qualquer forma.                      VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.  
III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).<sup>1</sup>                      VIII. Escolha apenas as questões de uma página para responder e respeite as restrições dos problemas que têm escolha.  
IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.  
V.  $(\forall x)[\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$ .<sup>2</sup>

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem “mid-level” que temos elaborado.

Usamos **Real** para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \text{Real} \quad (+), (\cdot) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Real} \quad (-) : \text{Real} \rightarrow \text{Real} \quad (>) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Prop.}$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$\begin{aligned} (\forall a, b, c)[a + (b + c) &= (a + b) + c] && \text{(RA-Ass)} \\ (\forall a)[0 + a &= a = a + 0] && \text{(RA-Id)} \\ (\forall a)[(-a) + a &= 0 = a + (-a)] && \text{(RA-Inv)} \\ (\forall a, b)[a + b &= b + a] && \text{(RA-Com)} \\ \\ (\forall a, b, c)[a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c] && \text{(RM-Ass)} \\ (\forall a)[a \cdot 1 &= a] && \text{(RM-Id)} \\ (\forall a \neq 0)(\exists a') [a' \cdot a &= 1 = a \cdot a'] && \text{(RM-Inv*)} \\ (\forall a, b)[a \cdot b &= b \cdot a] && \text{(RM-Com)} \\ \\ 0 \neq 1 && \text{(R-NTriv)} \\ (\forall d, a, b)[(a + b) \cdot d &= (a \cdot d) + (b \cdot d) \ \& \ d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)] && \text{(R-Dist)} \\ \\ (\forall a, b, c)[a > b \ \& \ b > c &\implies a > c] && \text{(RO-Trans)} \\ (\forall a, b)[\text{e.u.d.}: a > b; a = b; b > a] && \text{(RO-Tri)} \\ (\forall a, b, c)[a > b &\implies a + c > b + c] && \text{(RO-A)} \\ (\forall a, b, c)[a > b \ \& \ c > 0 &\implies ac > bc] && \text{(RO-M)} \\ \\ (\forall A : \text{Set Real})[A \text{ habitado} \ \& \ A \text{ cotado por cima} &\implies A \text{ possui supremum}]. && \text{(R-Compl)} \end{aligned}$$

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(66) **B**

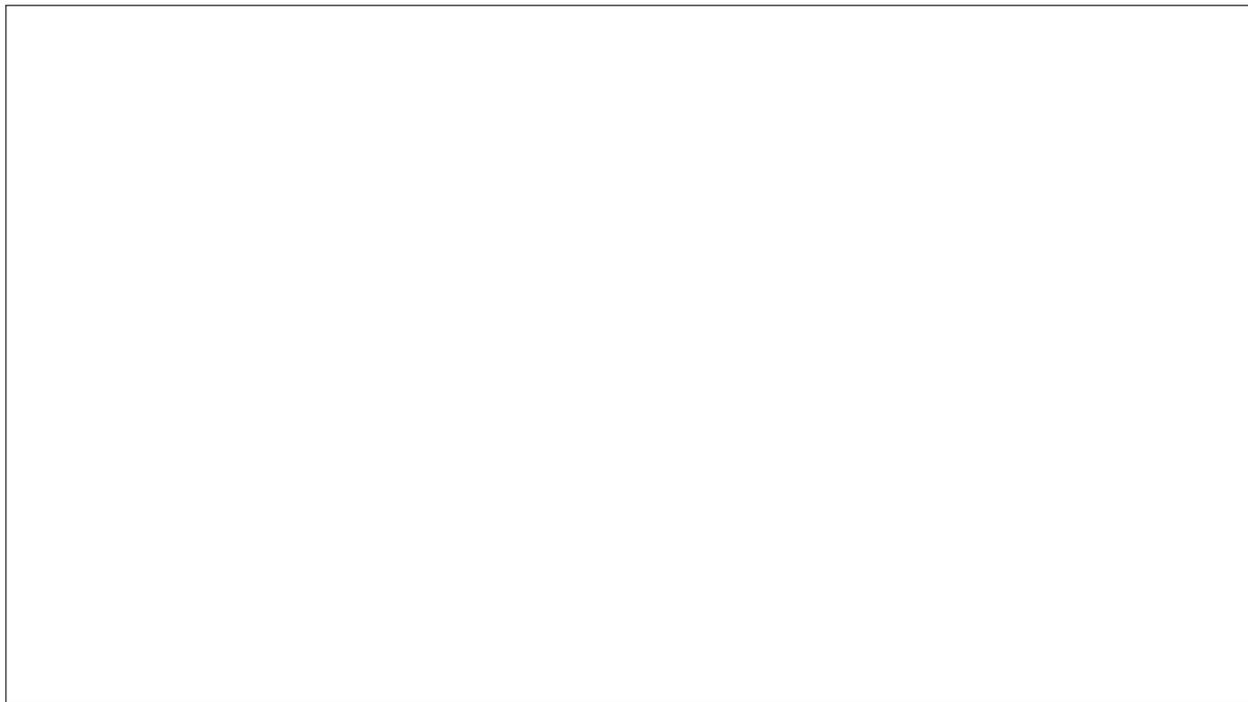
Demonstre **até dois** dos:

(33) **B1.** Enuncie e demonstre a unicidade de identidade multiplicativa.

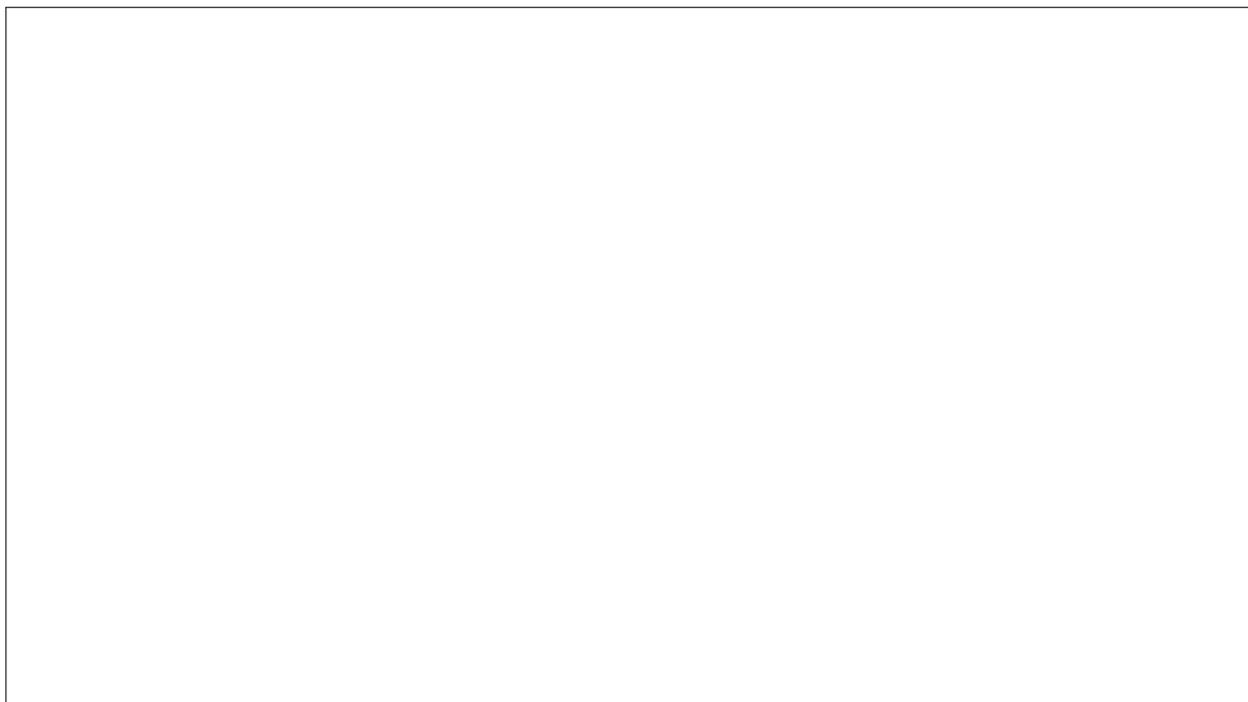
(33) **B2.** O 0 não tem inverso multiplicativo.

(33) **B3.**  $-(-x) = x$

DEMONSTRAÇÃO DA \_\_\_\_\_ .



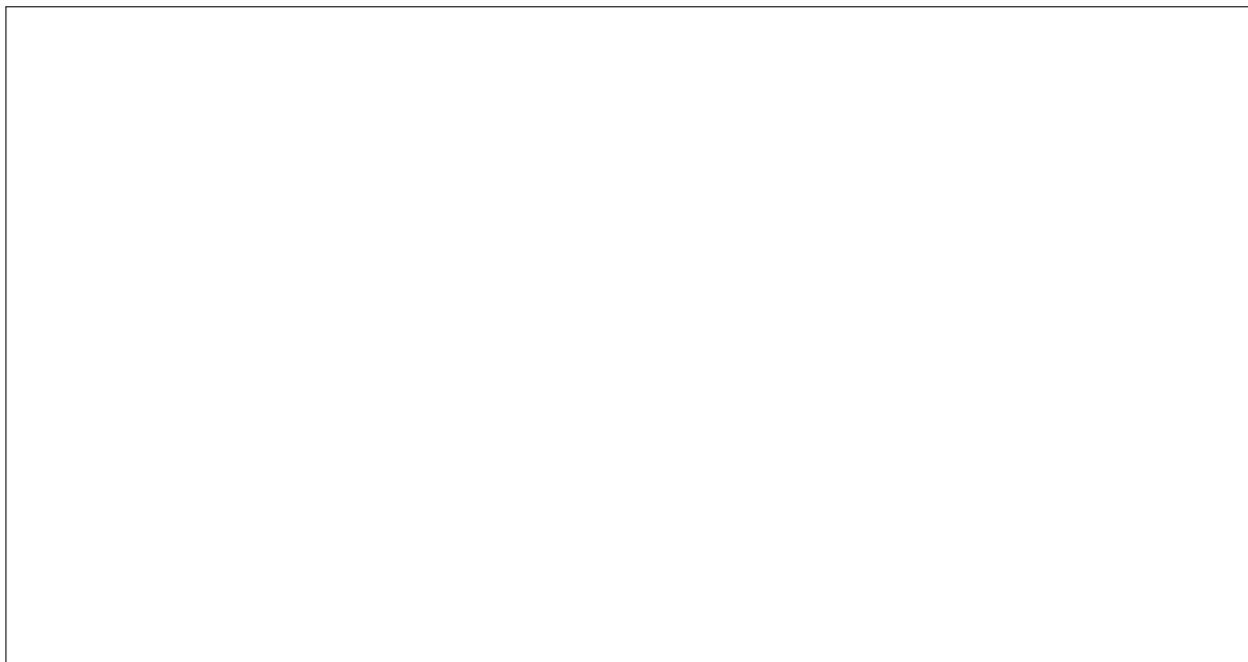
DEMONSTRAÇÃO DA \_\_\_\_\_ .



(42) **S**

Sejam  $A, B$  conjuntos que possuem suprema  $s = \sup A$  e  $t = \sup B$ .  
Demonstre que  $s + t = \sup(A + B)$ .

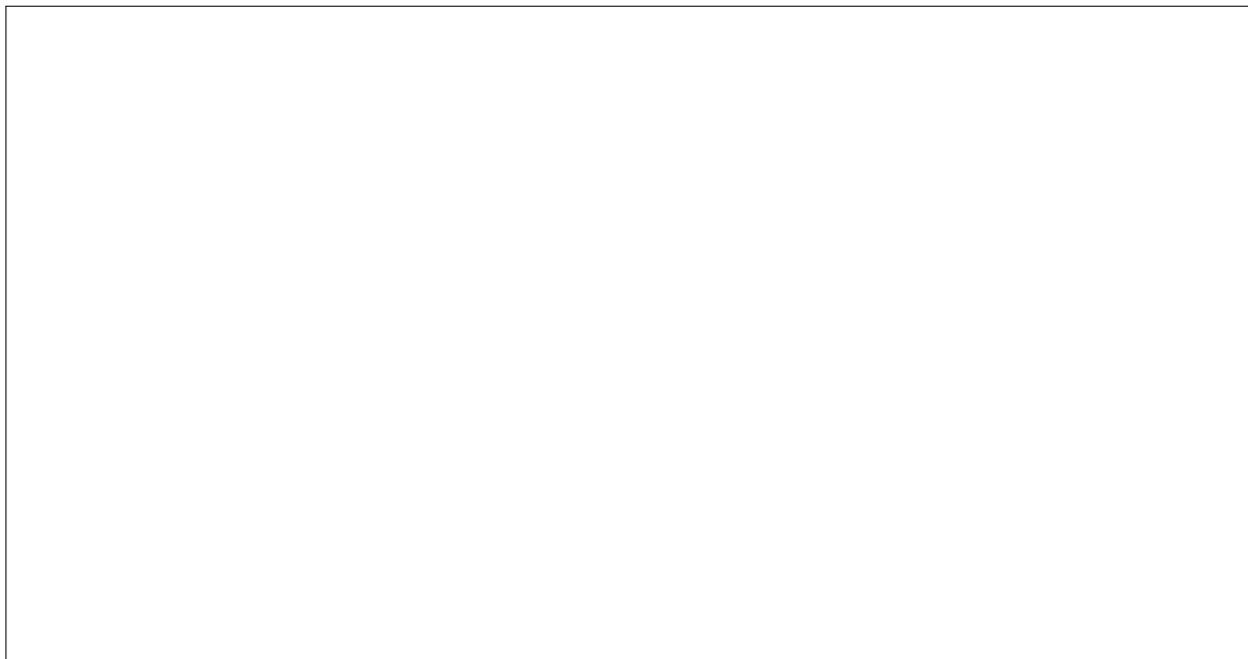
RESPOSTA.



(42) **U**

Enuncie e demonstre a unicidade de supremum.

RESPOSTA.



(100) **C**

(84) **C1.** Demonstre a proposição:

$$(a_n)_n \text{ eventualmente constante} \implies (a_n)_n \text{ convergente.}$$

DEMONSTRAÇÃO.



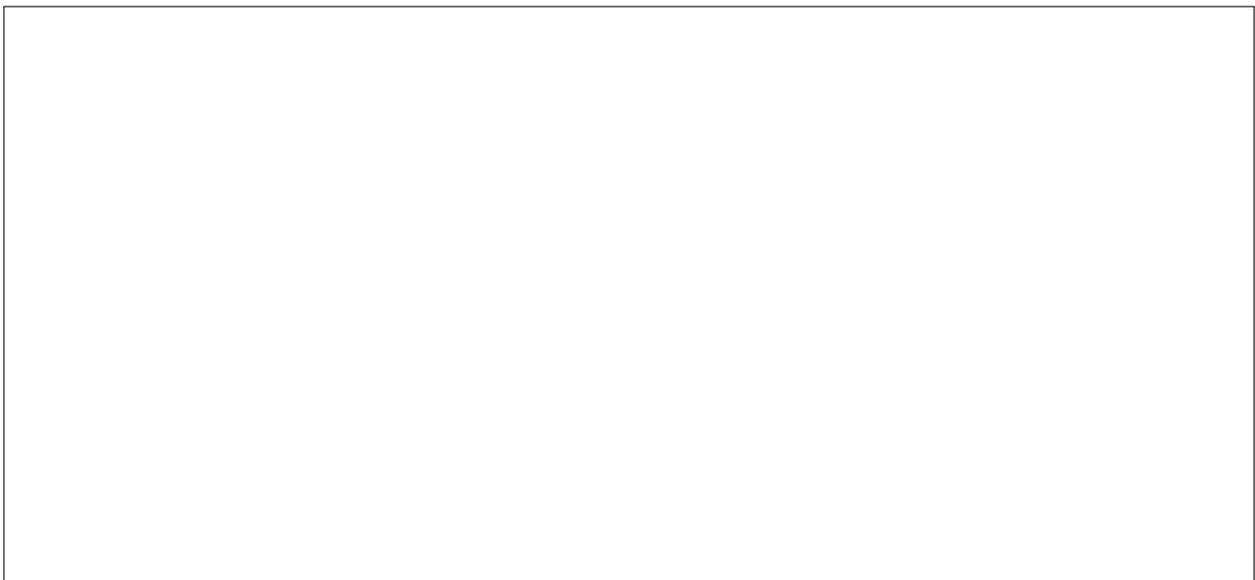
(16) **C2.** Considere sua recíproca:

$$(a_n)_n \text{ eventualmente constante} \iff (a_n)_n \text{ convergente.}$$

Dê um exemplo para mostrar que essa implicação não é válida. (Sem demonstrar.)

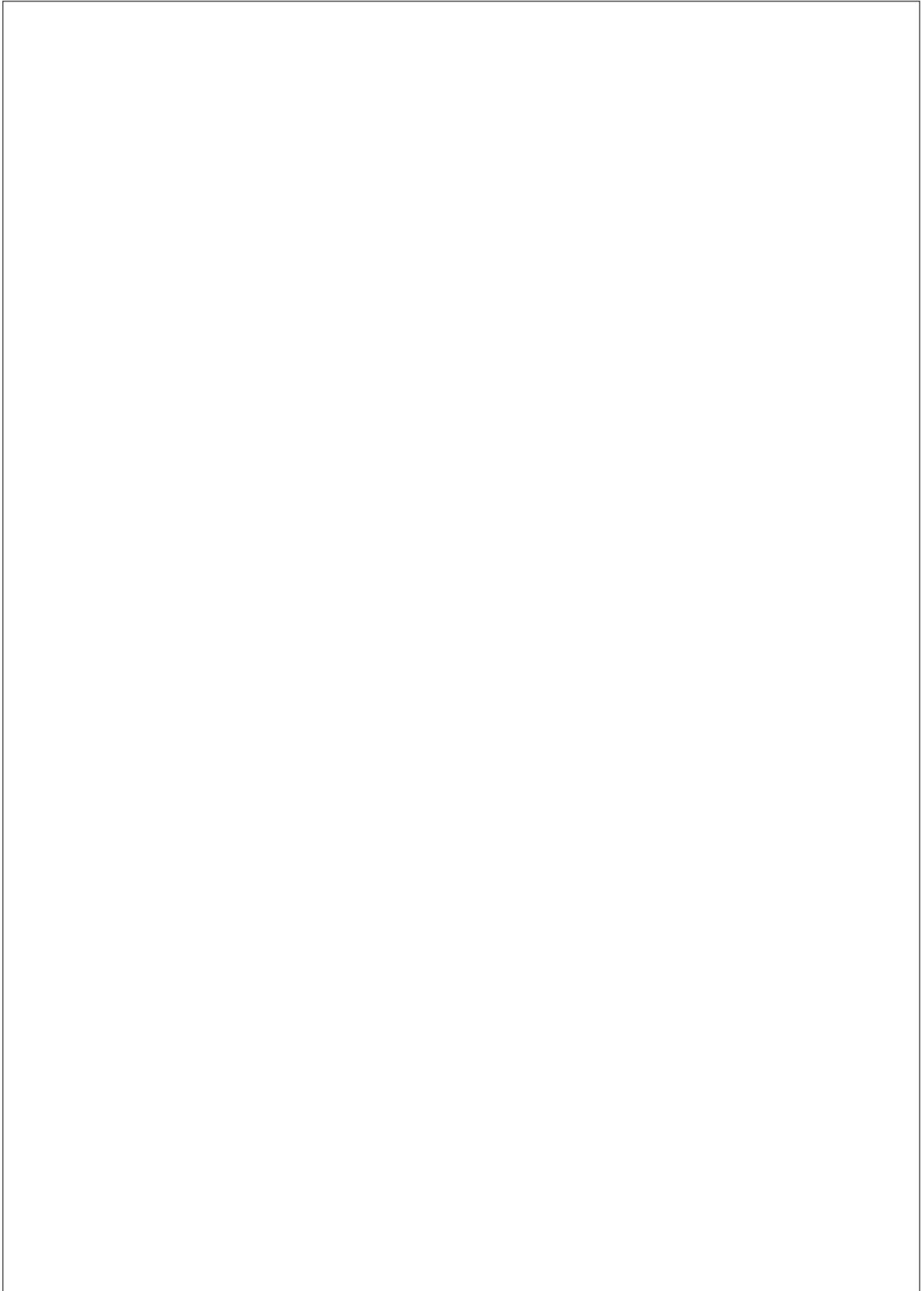
Escolha uma outra distância tal que a implicação é válida. (Demonstre!)

RESPOSTA.



Só isso mesmo.

## LEMMATA



## RASCUNHO