FMC1, 2024.2
(Turma M56 do Thanos)

Prova IDMa.1
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2024-10-18

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Respeite as restrições dos problemas que têm escolha.[3]

Dados. Os inteiros $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, -, \cdot)$ com tipos:

$$0, 1 : \mathsf{Int} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \qquad (-) : \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$$

Axiomas.

`(+)-ass`	$: (a + b) + c = a + (b + c)$	`(·)-ass`	$: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
`(+)-idR`	$: a + 0 = a$	`(·)-idR`	$: a \cdot 1 = a$
`(+)-com`	$: a + b = b + a$	`(·)-com`	$: a \cdot b = b \cdot a$
`(+)-invR`	$: a + (-a) = 0$	`(·),(+)-distR`	$: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Esclarecimento:

As demonstrações/refutações precisam ser na linguagem "low-level" que temos elaborado nas aulas. (Escreva apenas a parte de "código". *Não inclua* os Dados/Alvo no teu texto!) Podes—aliás, deves—utilizar as convenções e açúcares sintácticos que introduzimos para deixar teu código mais legível e mais curto. Na dúvida, pergunte. *Quando possível*, evite usar magia!

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Respostas violando essa regra (respondendo em mais questões) tirarão 0 pontos.

(8) **A**

Usando os: $\to, \times, (,)$, e os $\mathsf{Var}, \mathsf{Nat}, \mathsf{Int}, \mathsf{Real}, \mathsf{String}, \mathsf{Set}, \mathsf{Prop}, \mathsf{Cmd}, \mathsf{Type}, \mathsf{Person}, \mathsf{City}, \mathsf{Country}$ atribua a tipagem que tu considera melhor para os seguinte:

Obs.: as linhas representam "buracos" ou "lacunas"; não é pra escrever nada nelas.

$$\text{Suponha } \_\_\_\_ . : \mathsf{Prop} \to \mathsf{Cmd}$$

$$\text{Se } \_\_\_\_\text{, então } x \_ y \text{ é } \_\_\_\_ . : \mathsf{Prop} \times (\mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}) \times (\mathsf{Int} \to \mathsf{Prop}) \to \mathsf{Prop}$$

$$\text{Na casa de } \_\_\_\_ \text{ tem } \_\_\_\_ \text{ gato(s)}. : \mathsf{Person} \times \mathsf{Nat} \to \mathsf{Prop}$$

$$\_\_\_\_ \text{ mora em } \_\_\_\_\text{, junto com mais } \_ \text{ habitantes}. : \mathsf{Person} \times \mathsf{City} \times \mathsf{Nat} \to \mathsf{Prop}$$

$$\text{Existe } \_\_\_\_ : \_\_\_\_ \text{ tal que } \_\_\_\_ . : \mathsf{Var} \times \mathsf{Type} \times \mathsf{Prop} \to \mathsf{Prop}$$

$$\text{Seja } x : \_\_\_\_ \text{ tal que } x = x. : \mathsf{Type} \to \mathsf{Cmd}$$

$$\text{Como } \_\_\_\_\text{, logo } \_\_\_\_ \text{ é inocente}. : \mathsf{Prop} \times \mathsf{Person} \to \mathsf{Cmd}$$

$$n \mid m \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k : \_)[\ \_\_\_\_ = \_\_\_\_\ ] : \mathsf{Type} \times \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Cmd}$$

(8) **B** *Demonstre **exatamente uma** das **B1**, **B2**.*

Sejam P, Q, R proposições.

(8) **B1.** $\neg P$ ou $\neg Q \Rightarrow \neg(P \,\&\, Q)$.

(8) **B2.** $(P \Rightarrow Q)$ ou $(Q \Rightarrow P)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ÁMBAS .

B1.
Suponha $\neg P$ ou $\neg Q$. (dn)
Suponha $P \,\&\, Q$. (pq)
Separo em casos a partir da (dn).
Caso $\neg P$:
  Extraia-L do (pq) para obter P (p).
  Aplique a hipotese no (p) para obter $\bot$.
  Contradição.
Caso $\neg Q$:
  Similar.

B2.
Separe em casos (LEM).
Caso P:
  Escolho o lado direito.
  Suponha Q.
  Imediato.
Caso $\neg P$:
  Escolho o lado esquerdo.
  Suponha P.
  Aplique o $\neg P$ no P para obter $\bot$.
  Contradição.

(12) **C** *Escolha **exatamente uma** das **C1**, **C2**, **C3**.*

(8) **C1.** Existência e unicidade de (+)-identidade.
(8) **C2.** Para qualquer inteiro a, $-(-a) = a$.
(12) **C3.** Considere a lei do cancelamento multiplicativo como axioma:

$$\texttt{(}\cdot\texttt{)-can*R}: \quad (\forall u \neq 0)\,(\forall a, b)\,[\,au = bu \Rightarrow a = b\,]\,.$$

Demonstre a lei dos não zerodivisores:

$$\texttt{nzd}: \quad (\forall a, b)\,[\,ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0\,]\,.$$

Demonstração da C3 .

Sejam a, b tais que $ab = 0$.
Separe em casos (LEM?):
Caso $a = 0$: Escolha L. Imediato.
Caso $a \neq 0$:
Logo $(\forall x, y)\,[\,xa = ya \Rightarrow x = y\,]$. [$\texttt{((}\cdot\texttt{)-can*R)}$ $(a \neq 0)$]
Logo basta demonstrar $ba = 0a$. [$x := b,\ y := 0$]
Calculamos:

$$\begin{aligned} ba &= ab && [\,\texttt{((}\cdot\texttt{)-com)}\ a\ b\,] \\ &= 0 && [\,\text{pela escolha dos } a, b\,] \\ &= 0a. && [\,\texttt{(Z-AnnL)}\ a\,] \end{aligned}$$

Só isso mesmo.

Lemmata (até 2)

Z-ResR. $(\forall a, b)\,(\exists! x)[\,a + x = b\,]$.

Demonstração.
Existência.
Escolha $(-a) + b$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} &a + ((-a) + b) \\ &\quad = (a + (-a)) + b && [\,\texttt{(ZA-Ass)}\,] \\ &\quad = 0 + b && [\,\texttt{(ZA-InvR)}\,] \\ &\quad = b. && [\,\texttt{(ZA-IdL)}\,] \end{aligned}$$

Unicidade.
Seja x tal que $a + x = b$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} &(-a) + b \\ &\quad = (-a) + (a + x) && [\,\text{pela escolha de } x\,] \\ &\quad = ((-a) + a) + x && [\,\texttt{(ZA-Ass)}\,] \\ &\quad = 0 + x && [\,\texttt{(ZA-InvL)}\,] \\ &\quad = x. && [\,\texttt{(ZA-IdL)}\,] \end{aligned}$$

Z-AnnL. $(\forall a)\,[\,0a = 0\,]$.

Demonstração.
Seja a inteiro.
Calculamos:

$$\begin{aligned} 0a &= (0 + 0)a && [\,\texttt{(ZA-IdR)}\,] \\ &= 0a + 0a. && [\,\texttt{(Z-DistR)}\,] \end{aligned}$$

Logo $0a = 0$ pelo $\texttt{(Z-ResR)}$, já que $0a + 0 = 0a$.