(21) **A**

*Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha que $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ é cotado. ✓
Logo seja $s = \sup \mathbb{R}_\mathbb{N}$. ✓
Logo $s-1$ não é uma cota. ✓
Logo existem naturais entre $s-1$ e $s$. ✓
Logo seja $l \in \mathbb{R}_\mathbb{N}$ t.q. $s-1 < l \leq s$ ✓
Logo como $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ é (+1)-fechado logo $s < l+1$. ✓ $\bot$

justificativas!

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

(52) **D**

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite $\ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $l_1$ o $\lim_n (a_{2n})$ e seja $l_2$ o $\lim_n (a_{2n+1})$ e seja $l_3$ o limite$(a_{3n})$
Logo $d(a_{2n}, l_1) <$ e $d(a_{3n}, l_3) <$ e $d(a_{2n+1}, l_2)$
Preciso demonstrar que

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

$\boxed{\text{Caso uma subsequência não fosse convergente não seria possível que as 3 convergem ao mesmo } \ell\text{. Pois uma delas nem mesmo tem limite.}}$

(20) **D3.** Dado o **D1,** demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

$\forall n$?? 0?!

Seja $\varepsilon > 0$.
Vou demonstrar que $(\forall n)[d(a_n, 0) < \varepsilon$
Seja $n$.

Tu tá confundindo o « não tenho o dado P»
com o « tenho o dado ¬P »

Só isso mesmo.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ cotado, logo Pela ($\mathbb{R}$-Compl) seja $s = \sup(\mathbb{R}_{\mathbb{N}})$. ✓
Considere $s-1$. Como $s$ é o supremum, $s-1$ não é uma cota. ✓
Logo, seja $n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ t.q $s-1 < n$ ✓
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é (+1) fechado, $n+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ ✓
Como $n+1 > s$, chegamos a uma contradição [?]

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Pelo (R-Compl) sejam a, b : R t.q a = sup A e b = sup B~~
Pelo (R-Compl) sejam $a, b : \mathbb{R}$ t.q. $a = \sup A$ e $b = \sup B$. ✓
~~Basta demonstrar que~~
~~Basta demonstrar que~~
Basta demonstrar que $(\exists s)[s > (A+B)$ & $\forall(s')$ que é cota de $(A+B)$ $s \leq s']$ ✗
qual teu alvo?
Use $a+b$
Como $s > A+B$:
Como $a, b$ são supremos logo $a+b > (A+B)$ ?
??
Como $s < s'$ ...

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

~~Como $A = [0,1]$ e $B = [2,1]$, ... E chegamos em $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$~~

$A = [0,1]$; $B = [2,1]$; $\sup(A \cdot B) = 1$; $\sup A = 1$; $\sup B = 2$;
$= \emptyset$

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A4 .

Seja $a$ t.q. $(a_n)_n \to a$.
Seja $b$ t.q. $(b_n)_n \to b$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja $N_1$ t.q. $(\forall n \geq N_1)[d(a_n, a) < \varepsilon/2]$.
Seja $N_2$ t.q. $(\forall n \geq N_2)[d(b, b_n) < \varepsilon/2]$.
Seja $N$ t.q. $N = \max(N_1, N_2)$.
Basta demonstrar $(\forall n \geq N)[d(a_n - b_n, a - b) < \varepsilon]$.
Seja $n$ t.q. $n \geq N$.
Vale: $d(a_n - b_n, a - b)$
$= |a_n - b_n - (a - b)|$
$= |a_n - a - b_n + b|$
$\leq |a_n - a| + |-b_n + b|$
$= d(a_n, a) + d(b, b_n)$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$
$= \varepsilon$

∎

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

(52) **D**

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite $\ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\ell$ t.q $(a_{3n})_n \to \ell$.
Seja $N$ t.q $(\forall n \geq N)[a_{3n} \to \ell]$.
Como $(\forall n \geq N)[a_{2n} \in \{a_{3n}\}_n \lor a_{2n+1} \in \{a_{3n}\}_n]$. [(D1. aux)]
Seja $n \geq N$ t.q $a_{2n} \in \{a_{3n}\}_n$. Cadê o $\varepsilon$? X
Como $a_{2n} \to \ell$, e logo $(a_{2n})_n \to \ell$.
Seja $n \geq N$ t.q $a_{2n+1} \in \{a_{3n}\}_n$.
Logo $a_{2n+1} \to \ell$, e logo $(a_{2n+1})_n \to \ell$.
∎

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

Caso $(a_{3n})_n$ não seja convergente.
X Logo $(a_{2n})_n$ não será convergente. [(D1 e D1. aux)]
E logo $(a_{2n+1})_n$ não será convergente. [(D1 e D1. aux)]

Ache contraexemplo!

(20) **D3.** Dado o **D1**, demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

$a_2 \notin \{a_{3n}\}_n$ $a_1 \notin \{a_{3n}\}_n$



$(\forall n)[a_{2n} \in \{a_{3n}\}_n \vee a_{2n+1} \in \{a_{3n}\}_n]$ (D1.aux)

Seja $n$ : Nat.

Indução no $n$.

Caso 0:

Como $3.0 = 0$ e $2.0 = 0$

Logo $a_n \in \{a_{3n}\}$.

Caso $n+1$

Como $a_{2n}$ é par, logo $a_{2n+2}$ é par.

Logo $(\forall n)[a_{2n} \in a_{2n+2}]$

Logo $a_{2n+1} \in \{a_{3n}\}_n \vee a_{2n+2} \in \{a_{3n}\}_n$. [(H.1)].

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Suponha que $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é cotado. ✓
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é cotado, logo seja $s = \sup \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. ✓
Como $s-1 < s$, logo $s-1$ não é uma sup-cota. ✓
Logo, seja $n > s-1$. ✓
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-fechado, logo $n+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. ✓
Como $n > s-1$, logo $n+1 > s$. ✓
Contradição, pois $s$ é $\sup \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
$\blacksquare$

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

Com A, B são hab. e cotados, logo sejam $a = \sup a$ e $b = \sup B$. ✓
$\boxed{\text{logo}}$ sejam $a' \in A$ e $b' \in B$, $\boxed{\text{tais que}}$ $(a'+b') \in (A+B)$.
logo seja $s' = \sup(A+B)$.
Como $a \geq a'$ e $b \geq b'$, logo $a+b \geq a'+b'$.

não faz sentido!
« . Logo »

faltou algo para garantir lub

o que tem a ver?

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

$A = \{2\}$; $B = \{2,3\}$; $\sup(A \cdot B) = 4$; $\sup A = 2$; $\sup B = 3$

?
$2 \cdot 3 = 6$!

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $\mathbb{R}_N$ cotado, logo seja $s$ o seu supremum. Logo $s-1$ não é cota superior. Logo seja $l \in \mathbb{R}_N$ t.q. $s-1 < l \boxed{\leq s}$. (H)

Como o $\mathbb{R}_N$ é $(+1)$-fechado, logo $l+1 \in \mathbb{R}_N$.

Somando 1 em todos os termos da inequação H temos:

$$s < l+1 \leq s+1.$$

Logo $s$ não é cota superior.

Contradição.

∎

precisou?

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

(52) **D**

todos pares todos ímpares todos os $n = 0, 3, 6, \dots$

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite $\ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $l$ o limite da $(a_{2n})_n$. Vou demonstrar ~~$(a_{2n})_n \to l$~~ $(a_{2n+1})_n \to l$ e $(a_{3n})_n \to l$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja $N$ t.q $(\forall n \geq N)[d(a_{2n}, l) < \varepsilon]$. Seja $n \geq N$.
Temos que ~~$a_{4n+2}$~~ $a_{6n}$ faz parte da sequência $(a_{3n})_n$ mas também faz parte da $(a_{2n})_n$, logo $(\forall n \geq 6n)[d(a_{3n}, l) < \varepsilon]$.
O $a_{6n+3}$ faz parte da sequência $(a_{2n+1})_n$ e da $(a_{3n})_n$, logo, garante-se $(\forall n \geq 6n+3)[d(a_{2n+1}, l) < \varepsilon]$. Qual foi o testemunha então?

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

Sem $(a_{2n})_n \to l$, considere a sequencia constante em 0 para índices impares e em 1 para índices pares. Mas essa satisfaz o $(a_{2n})_n \to 1$
Analogo sem $(a_{2n+1})_n$.

(20) **D3.** Dado o **D1**, demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Temos que $(a_{2n})_n \to l$ e $(a_{2n+1}) \to l$.
~~Ps~~ Seja $\varepsilon > 0$.
Sejam $N_1$ t.q $(\forall n \geq N_1)$[os $a_{2n}$'s ficam $\varepsilon$-próximos de $l$] e
$N_2$ t.q. $(\forall n \geq N_2)$[os $a_{2n+1}$'s ficam $\varepsilon$-próximos de $l$].
Seja $N = \max(N_1, N_2)$.
Como a partir de $N$ todos os índices pares e índices impares da $(a_n)_n$ são $\varepsilon$-próximos de $l$, logo $(a_n)_n \to l$. [execute essa ideia!]

Só isso mesmo.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Suponha $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ cotado. ✓ sup $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ !
Logo, seja $s$ = supremum de $\mathbb{R}_\mathbb{N}$. [R-Compl (testemunho 0)]
Logo $s-1$ não é ~~supremum~~ cota. [Pela def. sup.]
Seja $t \in \mathbb{R}_\mathbb{N}$ t.q. $s-1 < t$. ✓
+ de trapasseiro
Logo $s < t+1$. ✓ [(+1) nos dois lados]
Contradição. ✓ [$\mathbb{R}_\mathbb{N}$ é (+1)-fechado e $s$ é o menor dos ($\geq \mathbb{R}_\mathbb{N}$)]
:)
∎

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **~~C2~~ B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A4 .

?? melhor separar. Aqui tu usou ∃∀∃ simultaneamente.

Sup $\varepsilon > 0$
Logo sejam $l_a$ e $N_a$ t.q. $(\forall m \geq N_a)[d(a_m, l_a) < \varepsilon/2]$
Logo sejam $l_b$ e $N_b$ t.q. $(\forall m \geq N_b)[d(b_m, l_b) < \varepsilon/2]$
(≥)
Sup $m = \max(N_a, N_b)$
Logo $|a_m - l_a| + |b_m - l_b| < \varepsilon$ (1)

Mas ninguem se importa com os $a_m$, $b_m$

Calc $d(a_m - b_m, l_a - l_b)$
$= |a_m - b_m - (l_a - l_b)|$
$= |a_m - l_a - (b_m - l_b)|$
$\boxed{\geq}\ |a_m - l_a| - |b_m - l_b|$ ?
$\boxed{<}\ \varepsilon$
?
Ou seja, como (1) e $|a_m - b_m - (l_a - l_b)| \leq |a_m - l_a| + |b_m - l_b|$
logo $d(a_m - b_m, l_a - l_b) < \varepsilon$ ∎

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $s_a$ e $s_b$ t.q. $s_a = \sup A$ e $s_b = \sup B$ [R-Compl]
? Logo sup $C = A + B$ ?
Como A e B são cotados e habitados, logo C também é ..
Logo seja $s_c = \sup C$ [R-Compl]
Ou seja $s_c \geq C$ e $(\forall c \geq C)[s_c \leq c]$ (1)
⋮

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = [1,2]$ $B = (-1;0)$ $\sup A = 2$ $\sup B = 0$ $\sup A \cdot \sup B = 0$

não use ';' aqui! $\sup(A \cdot B) = 0$

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $\mathbb{R}_N$ cotado e logo, como $0 \in \mathbb{R}_N$ e ele é sup-cotado, seja $S = \sup \mathbb{R}_N$.
Como S é sup. de $\mathbb{R}_N$, logo $S-1$ ñ é cota. Logo, seja $l \geq S-1$ membro de $\mathbb{R}_N$.
Como $\mathbb{R}_N$ é (+1)-fechado, logo $l+1 \in \mathbb{R}_N$.
Como $l \geq S-1$, logo $l+1 \geq S$, contradizendo que S é cota superior de $\mathbb{R}_N$.
-- Boom!

■

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $s_1 = \sup A$ e $s_2 = \sup B$. quero mostrar que $s_1 + s_2$ é $\sup(A+B)$.
Logo sejam $a \in A$ e $b \in B$.
Como $a \leq s_1$ e $b \leq s_2$, logo $a+b \leq s_1 + s_2$.
Logo $s_1 + s_2$ é sup-cota de $A+B$. Resta mostrar que $s_1+s_2$ é a menor sup-cota de $A+B$.
Seja $c_1$ sup-cota de A e $c_2$ sup-cota de B. Qual teu alvo aqui?
Como $s_1, s_2$ supremos, logo $s_1 \leq c_1$ e $s_2 \leq c_2$, e logo $s_1 + s_2 \leq c_1 + c_2$.

■

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$2 \neq (-1) \cdot 0$

$A = \{-1\}$; $B = \{0, -2\}$; $\sup A = -1$; $\sup B = 0$; $\sup(A \cdot B) = 2$;

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.

(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

Demonstração da ____ .

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Demonstração.

Sejam $a, b$ t.q $a = \sup A$ + $b = \sup B$. ✓

Calculamos:

$a + b$

$\geq A + b \quad [a \in (\geq A)]$

$\geq A + B \quad [b \in (\geq B)]$ ✓

Basta demonstrar $(\forall x \in (\geq A + B))[a + b \leq x]$. ✓

Seja $x$ t.q $x \geq A + B$.

Logo $x - A \geq B$, e logo $b \leq x - a$. x [b é a melhor cota de B] ??

Logo $b + a \leq a$.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

Resposta.

Tomo como contraexemplo $A = \{-2, 1\}$ e $B = \{-1, 1\}$. Logo $A \cdot B = \{-2, -1, 1, 2\}$.

E logo $\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\sup(AB)} \neq \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\sup A} \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\sup B}$.

(52) **D**

$\nearrow l_1$ $\nearrow l_2$ $\nearrow l_3$

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite $\ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $l_1, l_2, l_3$ tq $(a_{2n})_n \to l_1$, $(a_{2n+1})_n \to l_2$ e $(a_{3n})_n \to l_3$.

Calculamos:

$l_2 - l_3 + l_1$ ?? por quê?

$= \lim_n (a_{2n+1}) - \lim_n (a_{3n}) + \lim_n (a_{2n})$

$= \lim_n (a_{n+1})$.

$= \lim_n (a_n)$ bugou muito!

Como $(a_n)_n \to l_2 - l_3 + l_1$, logo as três subseq convergem para $l_2 - l_3 + l_1$.

Logo $l_1 = l_2 = l_3$. -- Calculando limite por limite tbm leva a mesma conclusão

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

Se remover $(a_{2n})_n \to l_1$, fica um espaço mas. 0's do índice par.

Se remover o $(a_{2n+1})_n \to l_2$, fica um espaço semelhante, mas nos índices ímpares.

Se remover $(a_{3n})_n$ ... -- travei

concretize tua idéia!! :-(

(parece que tu tá tentando dar dica sem ser spoiler, em vez de resolver)

(20) **D3.** Dado o **D1**, demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\varepsilon > 0$.

Basta demonstrar $(\forall n)[d(a_n, l) < \varepsilon]$. X Qual teu alvo?

Seja $n$: Nat.

Caso $n$ par:
Calculamos:
X $\lim_n (a_n)_n$
$= \lim_n (a_{2n})_n$
$= l$

Caso $n$ ímpar:
Calculamos:
X $\lim_n (a_n)_n$
$= \lim_n (a_{2n+1})_n$
$= l$

Só isso mesmo.

fixando o $n$, tu trabalha com $a_i$'s e não com $(\lim)(a_n)_n$!

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A4 .

✓

Sejam a, b : Real t.q. $\lim_n a_n = a$ e $\lim_n b_n = b$.
Basta demonstrar $\lim_n (a_n - b_n) = a - b$. ✓
Seja $\varepsilon > 0$. ✓
Seja $N_1$ : Nat t.q. $(\forall n \geq N_1)[d(a_n, a) < \varepsilon]$.
Seja $N_2$ : Nat t.q. $(\forall n \geq N_2)[d(b_n, b) < \varepsilon]$. ✓
Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. ✓
Basta demonstrar $(\forall n \geq N)[d(a_n - b_n, a - b) < \varepsilon]$. ✓
Seja $n \geq N$ t.q. $d(a_n - b_n, a - b) < \varepsilon$. ✓
Calc: $d(a_n - b_n, a - b) = |(a_n - b_n) - (a - b)|$ ✓
$\leq |a_n - a| - |b_n - b|$ X ??
$= d(a_n, a) - d(b_n, b)$
$< \varepsilon - \varepsilon$
$= 0$
■

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

✓

Sejam $s_a, s_b$ t.q. $s_a = \sup A$ e $s_b = \sup B$
Seja $D = A + B$ por que dar nome misterioso ao A+B? Qual o problema de usar A+B para referir a este conjunto mesmo?
Seja $S = \sup D$.
Basta demonstrar $S = s_a + s_b$
Como $D = A + B$ logo $D \geq A$ e $D \geq B$. ?
logo S é cota sup. de A e de B. ?
Basta demonstrar $(\forall c \in (\geq D))[s_a + s_b \leq c]$
Seja $c \in (\geq D)$
logo $s_a + s_b \leq c$. ??
■

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = \{-1, 0\}$; $B = \{-2, -3\}$; $\sup(A \cdot B) = 3$; $\sup A = 0$; $\sup B = -2$

✓

(21) A *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.

(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha que $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é cotado. ✓

Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é habitado, logo seja $s = $ ~~Supremum~~ sup $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. ✓

Seja $l$ : Nat t.q. $s-1 < l$. ← o que permite isso?

Logo $s < l+1$.

Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-fechado, logo $l+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.

Contradizendo a escolha de $s$.

∎

(24) B

Sejam $\boxed{A, B : \text{Set Real conjuntos}}$ habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $s_1 = \sup A$ e $s_2 = \sup B$.

Como $s_1 \geq A$ e $s_2 \geq B$, logo $s_1 + s_2 \geq A+B$. ...?

Como $(\forall c \geq A)[c \geq s_1]$ e $(\forall c \geq B)[c \geq s_2]$, logo $(\forall c \geq A+B)[c \geq s_1 + s_2]$

Logo $s_1 + s_2 = \sup(A+B)$. ...?

∎

pulou demais!

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = 2, -1, -1, -1, \ldots \Rightarrow \sup A = 2$

$B = -1, -1, -1, -1, \ldots \Rightarrow \sup B = -1 \Rightarrow \sup A \cdot \sup B = -2$ ; $\sup(A \cdot B) = 1$.

confundiu Set com Seq? ✓

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $\mathbb{R}_N$ cotado. ✓
Como $\mathbb{R}_N$ é habitado e cotado, logo seja $s = \sup \mathbb{R}_N$. ✓ [R-Compl].
Logo seja $l$ t.q $s-1 < l < s$. (pulou)
Logo ~~[illegible]~~ $s - 1 + 1 < 2l < s + l$.
$2l$??
Contradição [$s$ é $\sup \mathbb{R}_N$] ?

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA $A_2$ .

Suponha que o $\mathbb{R}_N$ é cotado. ✓
Pelo (R-compl), seja $S = \sup \mathbb{R}_N$ ✓
Seja $\ell = S - 1$. Qual a vantagem do novo nome '$\ell$' em comparação com o muito informativo e legal '$S-1$' ??!
Como $S$ é a menor cota superior dos $\mathbb{R}_N$, logo $\ell$ não é cota superior dos $\mathbb{R}_N$. ✓
Logo, seja $F$ t.q. $F \in \mathbb{R}_N$ & $F > \ell$. ✓
Como $\mathbb{R}_N$ é (+1) fechado, logo $F + 1 \in \mathbb{R}_N$. ✓
Como $F > \ell$, logo $F + 1 > \ell + 1$ ✓
Logo $F > S$. ✓
Contradição pela escolha de $S$ como cota superior dos $\mathbb{R}_N$. ✓

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Pelo (R-compl), sejam $S_A = \sup A$ ① ✓ e $S_B = \sup B$ ② ✓.
Vou demonstrar $S_A + S_B$ é uma supcota de $A+B$:
| Seja $a \in A$ e $b \in B$.
| Temos $S_A \geq a$ e $S_B \geq b$, pelo [①a] e [②b].
| Logo $S_A + S_B \geq a + b$. ✓
Vou demonstrar $S_A + S_B$ é a menor supcota de $A+B$:
| Seja $S'$ uma supcota de $A+B$.
| :

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = \{x \mid -2 < x < 0\}$ $\quad$ $\sup A = 0$ $\quad$ $\sup A \cdot \sup B = 0$
$B = \{x \mid -1 < x < 0\}$ $\quad$ $\sup B = 0$ $\quad$ $\sup(A \cdot B) = 2$ ✓

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Seja $x$ : Real t.q. $x \neq 0$
Sejam $x'$ e $x''$ inversos multiplicativos de $x$
Logo $x x' = x x''$ ??

Calc: $(x x') x' = 1 \cdot x'$
$= x'$

justificativas!!

$(x x') x' = (x x'') x'$
$= (x x') x''$
$= 1 \cdot x''$
$= x''$

pulou muito

Logo $x' = x''$
∎

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

Ø

$A = (-5, 2)$ , $B = (-4, 3)$ , logo $\sup(A \cdot B) =$ ~~[illegible]~~ $\sup(20, 6) = 20$ ~~[illegible]~~ ×
$\sup A \cdot \sup B = \sup(-5, 2) \cdot \sup(-4, 3) = 2 \cdot 3 = 6$ , portanto $20 \neq 6$

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Suponha $R_{\mathbb{N}}$ cotado. ✓
Como $R_{\mathbb{N}}$ habitado, logo seja $s = \sup R_{\mathbb{N}}$. ✓ [(R-Compl)]
Logo $s-1$ não é cota do $R_{\mathbb{N}}$. ✓
Logo seja $n \in R_{\mathbb{N}}$ t.q. $s-1 < n$. ✓
Logo $s < n+1$.
Como $R_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-fechado, logo $n+1 \in R_{\mathbb{N}}$. ✓
Contradição, pois $s \geq R_{\mathbb{N}}$.
■

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Como $A, B$ habitados e cotados, logo sejam $S_a = \sup A$ ✓ e $S_B = \sup B$. ✓ [(R-Compl)]
Seja $a = \max A$ e $b = \max B$. ✗ Não tens tais ∃'s nos teus dados
Logo $a \leq \sup_a$ e $b \leq \sup_B$.
Logo $a + b \leq \sup_a + \sup_B$.
Logo $\sup_a + \sup_B = \sup(A+B)$.
■

?

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha que $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é cotado.
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é habitado e sup-cotado, logo seja $s = \sup \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. [(R-Compl)]
Logo $s-1$ não é cota.
Seja $n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ t.q. $n > s-1$.
Logo $s-1+1 < n+1$.
Logo $s < n+1$.
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é (+1) fechado, logo $n+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Contradição, por $n+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ e $n+1 > s$.
∎

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

grrr...

Seja $C = \{a+b \mid a \in A \ \& \ b \in B\}$
Seja $a = \sup A$ & $b = \sup B$. [(R-Compl)]
Logo $a + b \geq C$. olhando essas três letras tu consegue dizer que as duas primeiras são minúsculas e a terceira maiúscula?!
por quê?
Logo $a+b$ é uma cota de $C$.
Vou demonstrar que $a+b = \sup C$.
Seja $c$ uma cota superior de $C$.
Temos que $a+b \in C$. [lemma1]
Logo $c \geq a+b$.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

$A = [-1,0]$ ; $B = [-1,2]$ ; $A \cdot B = [1,0]$ ; $\sup(A \cdot B) = 1$ ; $\sup A = 0$ & $\sup B = 2$

$= \emptyset$

grrr...

Lemma 1:

$(\forall A : \text{Set Real})[\text{habitado} \ \& \ \text{cotado} \Rightarrow \sup A = \max A]$ X

contra exemplo: $(0,1)$

Seja $A$ . t.q. $A$ é habitado e cotado.

Seja $s = \sup A$. [(R-Compl)]

Logo $(\forall a \in A)[s \geq a]$.

Seja $M = \max A$.

Logo $s \geq M$.

Caso $s > M$:

Seja $c$ uma cota de $A$.

Logo $c \geq s$.

Como $s > m$, logo $m < s \leq c$.

Como $M \geq A$, logo $M$ também é cota.

Contradição por $M$ ser cota menor que o supremum.

Caso $s = M$:

Imediato.

∎

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha que os $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ são cotados.
Logo, seja $s$ a melhor cota dos $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Logo, $s-1$ não é uma cota.
Logo, seja ~~[illegible]~~ $l$ um real natural t.q $l > s-1$.
Logo, $l+1 > s$. (1)
Como $l \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ e ~~[illegible]~~ o $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-fechado, $l+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Logo, $s \geq l+1$ [pela escolha de $s$]. (2)
Contradição pelas (1) e (2).

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

grr...

Seja $C$ t.q $C = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$
Sejam $s, r$ t.q $s = \sup A$ e $r = \sup B$.
Sejam $a, b$ t.q $a \in A$ e $b \in B$.
Logo, pelas escolhas de $r$ e $s$, temos $s \geq a$ e $r \geq b$.
Logo, $s+r \geq a+b$, ou seja, $s+r$ é uma cota do $C$.
Basta demonstrar que $s+r$ é a melhor cota do $C$.
Sejam $x, y$ t.q $x$ é uma cota do $A$ e $y$ é uma cota do $B$. X
Pelas escolhas de $s, r, x$ e $y$, temos $x \geq s$ e $y \geq r$.
Logo, $x+y \geq r+s$.

qual o alvo aqui?

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

Seja $A = \{-2,-1\}$ e $B = \{0,1\}$. Logo, $AB = \{-1,-2,0\}$. ~~Sup A~~ Temos $\sup A = -1$ e $\sup B = 1$, enquanto $\sup(A \cdot B) = 0$.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $\mathbb{R}_N$ é cotado.
Como $\mathbb{R}_N$ é habitado e cotado, ele possui um supremum [R-Compl]
Seja $s$ o supremum de $\mathbb{R}_N$.
Como $s$ é o supremum de $\mathbb{R}_N$, logo $s-1$ não é uma cota.
Logo, seja $n > s-1$.
Logo, $n+1 > s$.
~~Como s é o supremum de RN e n+1 > s chegamos em uma contradição~~
Contradição, pois $s$ é o supremum de $\mathbb{R}_N$ e $n+1 > s$.
∎

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

Como A é habitado e cotado, logo A possui supremo. [R-Compl]
Seja $s_a$ o supremo de A.
Como B é habitado e cotado, logo B possui supremo. [R-Compl]
Seja $s_b$ o supremo de B.
~~Seja o conjunto $A+B = \{a+b \mid a \in A$ e $b \in B\}$~~ já é definido o A+B.
$\boxed{\text{Como } s_a \in A \text{ e } s_b \in B}$ logo $s_a + s_b \in A+B$.
Vou demonstrar que $s_a + s_b$ é o supremum de A+B.
Sorry! :(
não tens nada disso nos dados!

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

$A = \{-1, 0\}$; $B = \{-2, 3\}$; $\sup(A \cdot B) = 2$; $\sup A = 0$; $\sup B = 3$;

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Seja $a \in \mathbb{R}$ — qual teu alvo?
Seja $\boxed{c \notin \mathbb{R}}$ t.q $|c| \geq a$ (H1)
qual o tipo do c? (!)
Caso $|c| = a$:
logo $c \in \mathbb{R}$
contradição.

Caso $|c| > a$
logo $|c| > a$
Como $\mathbb{R}$ é (+)fechado
logo seja $a' \in \mathbb{R}$
logo $|c| + a' < a + a'$
logo $|c + a'| < a + a'$

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

veja a def. de sup!

Como $A, B$ : Set Real, logo $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$
Como, por definição de sup, $\sup(A+B) = \max(A+B)$
Como $\max(A+B) = \max(A) + \max(B)$, logo $\sup(A+B) = \max(A) + \max(B)$
logo $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$
$\sup(A \cdot B) = (\frac{1}{2})$ $\sup A = 3$ $\sup B = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA $A_2$ .

Suponha $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ cotado.
Logo seja $s = \sup \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. ($\mathbb{R}$-Compl, pois $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é habitado também).
Considere $s-1$.
Como $s-1 < s$, logo $s-1$ não é uma cota superior do $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Seja $n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ tq $s-1 < n$.
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-fechado, logo $s-1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Logo $s < n+1$.
Contradição pois $s > \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. ✗

$\geq$

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $a = \sup A$ e $b = \sup B$.
Logo $a + b = \sup A + \sup B$.
Seja $c = \sup(A+B)$.
Basta demonstrar que $a + b = c$
Calc

... ?

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = [-3, -2, 0]$; $B = [-5, 2, 5]$; $\sup(A \cdot B) = 15$; $\sup A = 0$; $\sup B = 5$

são conjuntos, não listas!

(21) **A** *Demonstre* ***até uma*** *das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ cotado.
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ habitado, logo seja $s$ supremum de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. [R-Compl]
Considere $s-1$, como $s$ é cota suprema logo $s-1$ não é cota de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Logo seja $x \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ tal que $s-1 < x$.
Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$ fechado, logo $x+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Logo $s < x+1$.
Contradição pois $s$ é supremum.
■

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

(52) **D**

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite $\ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\ell_1 = \lim_n (a_{2n})_n$. ✓
Seja $\ell_2 = \lim_n (a_{2n+1})_n$. ✓
Seja $\ell_3 = \lim_n (a_{3n})_n$. ✓
Vou demonstrar $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$. ✓
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja $N_1$ tq. $(\forall n \geq N)[d(a_{2n}, \ell_1) < \varepsilon / a_n]$.
Seja $N_2$ tq $(\forall n \geq N)[d(a_{2n+1}, \ell_2) < \varepsilon / \boxed{a_n}]$.
Seja $N_3$ tq $(\forall n \geq N)[d(a_{3n}, \ell_3) < \varepsilon / a_n]$.

não há n no escopo no momento dessas escolhas!

Seja $n \geq N$.
Logo $d(a_{2n}, \ell_1) < \varepsilon / a_n$, $d(a_{2n+1}, \ell_2) < \varepsilon / a_n$, $d(a_{3n}, \ell_3) < \varepsilon / a_n$.
Calc: $|a_{2n} - \ell_1| < \varepsilon / a_n$
$\Rightarrow |a_{2n} - \ell_1| \cdot a_n < \varepsilon$
$\Rightarrow |a_{2n} \cdot a_n - a_n \ell_1| < \varepsilon$

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

o que seria um contraexemplo válido aqui?

Considere $(a_{2n+1})_n = \frac{1}{2n+1} + (2n+1)$, que não converge. Logo, $(a_{2n})_n = \frac{1}{2n} + 2n$ também não converge e $(a_{3n})_n = \frac{1}{3n} + 3n$ também não é convergente. Ainda, se $(a_n)_n = \frac{n}{n-2}$, $(a_{3n})_n = \frac{3n}{3n-2}$ e $(a_{2n})_n = \frac{2n}{2n-2}$ convergem a limites diferentes enquanto $(a_{2n+1})_n = \frac{2n+1}{2n-1}$ não converge.

(20) **D3.** Dado o **D1**, demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\varepsilon > 0$
Escolho $N$ tal que $(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \varepsilon]$.
Seja $n \geq N$.
Logo $d(a_n, a) < \varepsilon$.
Seja $a = \lim_n (a_n)_n$.
$\therefore$?

Só isso mesmo.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Seja $x$ real $\neq 0$.
Sejam $x', x''$ reais inversos multiplicativos de $x$.
Logo $xx' = xx''$. ? ...mesma coisa...
Calc: $xx' = xx''$.
$(xx')x' = (xx'')x'$. não são cálculos!
Calc:
$(xx'')x' = (xx'')x'$.
$x(x'x'') = x(x''x')$.
$(xx')x'' = (xx'')x'$.
$xx' = xx''$.
Logo $x' = x''$.

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $u$ t.q $u$ supremo de $A$.
Seja $b$ supremo de $B$.
⋮
(Aqui faltou força pra continuar)

X

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

$\sup(A \cdot B) = \sup A + \sup B \neq \sup A \cdot \sup B$.

X

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

~~($\forall a, a'$)[$1 \cdot a' = 1$ & $1a = 1 \Rightarrow a = a'$]~~
~~Sejam a, a' reais tq. $a' = 1$ & $1a = 1$.~~
~~logo $1a' = 1a$~~
~~logo $a' = a$ [m-cancn]~~

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja $\sup A = \max(x \mid x \in A)$~~
~~Seja $\sup b = \max(y \mid y \in B)$~~
~~Calc: $\sup(A+B) = \max\{x+y \mid x \in A \;\&\; y \in B\}$~~
~~$= \max\{x \mid x \in A\} + \max\{y \mid y \in B\}$~~
~~$= \sup A + \sup B$.~~

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

$A = \{-1/2, 1\}$ $B = \{-1, 1/4\}$ $\sup A = 1$ $\sup B = 1/4$ $\sup(A \cdot B) = 1/2$.

(ZM-CANA)

$(\forall a, b, c \neq 0)\ [(cA = cb) \Rightarrow A = b]$

Sejam $A, b, c \neq 0$ reais.

Sejam $cA = cb$.

? logo, $c(A-b) = 0$, então ? ou $c = 0$ ou $(A-b) = A$

CASO $c = 0$:

Contradição. $(c \neq 0)$

CASO $A - b = 0$:

Calculamos

$$\left.\begin{aligned} A + b(-b) &= A + 0 \\ A - b(+b) &= 0 + b \end{aligned}\right\}\ \text{por quê?}$$

logo $A = b$.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

Demonstração da A1 .

$(\forall a \neq 0)(\forall x, x`)[ax = 1 \ \& \ ax` = 1 \Rightarrow x = x`]$
SEJA $a$, REAL $\neq 0$
SEJAM $x, x`$ : REAL T.Q. $ax = 1$ $ax` = 1$
COMO $ax = 1$ E $ax` = 1$, LOGO $ax = ax`$
LOGO $x = x`$ [CANC.L]

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Demonstração.

SEJA $x = \text{MAX } A$
SEJA $x` = \text{MAX } B$
$x + x` = \text{MAX}(A + B)$

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

Resposta.

NOTE QUE, SE O CONJUNTO A FOR FORMADO POR UMA SEQUENCIA $(a_n)_n$ CRESCENTE E O CONJUNTO B FORMADO POR UMA SEQUENCIA DECRESCENTE, $\text{SUP}(A \cdot B) \neq \text{SUP} A \cdot \text{SUP } B$

Θ.CANC.L $(\forall c \neq 0)(\forall a, b)[ca = cb \Rightarrow a = b]$

SEJA $c$: REAL $\neq 0$ ✓

SEJAM $a, b$: REAL t.q. $ca = cb$. ✓

CALC. $0 = ca - ca$ [INV] ✓

$= ca - cb$ [$ca = cb$] ✓

$= c(a-b)$ [DISTR] ✓

COMO $c(a-b) = 0$, LOGO $c = 0$ OU $a - b = 0$. [?]

CASO $c = 0$:

CONTRADIÇÃO. [$c \neq 0$]

CASO $a - b = 0$:

LOGO $a = b$. ■ ?

IMEDIATO. ■

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A3 .

Seja $\varepsilon > 0$

Escolha $\boxed{N} = n$ t.q $\vartheta^{\boxed{n}} < \varepsilon$ ← o que permite isso?

Como $d(\vartheta^n, 0) = |\vartheta^n|$ Pela definição da distância,

Logo $|\vartheta^n| < \varepsilon$. ■

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Seja x real. tq $x \neq 0$.
Seja x' real tq $x'x = 1 = xx'$.
Existência:
Imediato. ?
Unicidade:
Seja k real tq $kx = 1 = xk$. ✓
Como $kx = 1$ logo $(kx)x' = 1x'$ ✓
Logo $k(xx') = x'$ ✓
Logo $k.1 = x'$ ✓
Logo $k = x'$

justificativas!

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO. $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

$A = \{0,1,2,3\}$ ; $B = \{1,2,3\}$ $\sup(A \cdot B) = 6$ ; $\sup A = 3$ ; $\sup B = 3$

X $\;\; \overset{\shortparallel}{9} = 3 \cdot 3$

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.

(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$. $d(a_n - b_n, c) = d(a, c) - d(b, c)$

(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A4. $a - b$

Seja $a$ t.q. $a_n \to a$ ✓
Seja $b$ t.q. $b_n \to b$ ✓
Seja $\varepsilon > 0$ ✓
Seja $N_a$ t.q. $(\forall n > N_a)[d(a_n, a) < \varepsilon/2]$ ✓
Seja $N_b$ t.q. $(\forall n > N_b)[d(b_n, b) < \varepsilon/2]$ ✓
Seja $N = \max(N_a, N_b)$ ✓
Basta demonstrar
$[d(a_n - b_n, a - b) < \varepsilon]$ –
Calculamos:
$d((a_n - b_n), (a-b)) = |a_n - b_n - (a-b)|$ ✓
✗ $\leq |a_n - a| + |b_n - b|$ ✗
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$

Logo $d((a_n - b_n), (a-b)) < \varepsilon$
Logo $\lim_n (a_n - b_n) = a - b$
$= \lim_n a_n - \lim_n b_n$ ■

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

?? tá confundindo conjuntos com seqüências

$(\forall A, B : \text{set Real})[\sup(A+B) = \sup A + \sup B]$
Como $A$ e $B$ são cotados logo são convergentes e $\sup A = \lim_n A_n$ similar $\sup B$
Basta demonstrar que $[\lim_n (A_n + B_n) = \lim_n A + \lim_n B]$
Seja $a$ t.q. $A_n \to a$
Seja $b$ t.q. $B_n \to b$
Seja $\varepsilon > 0$
Seja $N_a$ t.q. $(\forall n \geq N_a)[d(a_n, a) < \varepsilon/2]$
Seja $N_b$ t.q. $(\forall n \geq N_b)[d(b_n, b) < \varepsilon/2]$
Seja $N = \max(N_a, N_b)$
Basta demostrar $[d((a_n + b_n), (a+b)) < \varepsilon]$

Calculamos:
$d((a_n + b_n), (a+b)) = |a_n + b_n - (a+b)|$
$\leq |a_n - a| + |b_n - b|$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$
$< \varepsilon$ ■

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = [0, 1]$; $B = [0, 2]$; $\sup(A \cdot B) = 0$ ; $\sup A = 1$ ; $\sup B = 2$ ; $0 \neq 2$ ■

$2 = 1 \cdot 2$

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.

(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $R_N$ cotado.
Como $R_N$ hab. & $R_N$ sup-cotado, logo seja $s = \sup(R_N)$. [R-Compl]
Logo $s - 1$ não é cota.
Logo seja $m \in R_N$ t.q. $m > s - 1$.
Logo $m + 1 \in R_N$. [$R_N$ é $(+1)$-fechado]
Como $m > s - 1$, logo $m + 1 > s$.
Como $s = \sup(R_N)$, logo $s \geq m + 1$.
Contradição. [$s \geq m+1$ & $m+1 > s$]

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

?? Logo sejam $a, b$ t.q. $a = \sup(A)$ & $b = \sup(B)$.
Seja $x \in (A+B)$ t.q. $x = \sup(A+B)$ X tens tal (∃) nos dados?
Logo sejam $a_x, b_x$ t.q. $x_1 = a_x + b_x$. ($a_x \in A$, $b_x \in B$, $x_1 \in (A+B)$)
Calculamos:
$$x_1 = a_x + b_x \leq a + b_x \leq a + b$$
Como $x \geq x_1 \leq a + b$, logo $x = a + b$.

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

$A = [-10, 50]$; $B = [-50, 0]$; $\sup(A \cdot B) = 500$; $\sup(A) = 50$; $\sup(B) = 0$.

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ : Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Ao multiplicar um número qualquer por -1, temos como resultado o inverso desse número.

Ex: $(x \cdot -1 = -x) \neq (y \cdot -1 = -y)$

Esse resultado nunca será o mesmo, a menos que se use o mesmo número.

(24) **B**

Sejam $A, B$ : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Ex: sup A = x e sup B = y    C : set Real    C = A+B

sup C = x+y

$\sup A + \sup B = x+y$
$= \sup C$
$= \sup(A+B)$

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

Ex: $\sup(A.B) = x \cdot y \neq \sup A \cdot \sup B = (x+y) \cdot (x+y)$

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ : $\mathsf{Seq\ Real}$ convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.
DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **B**

Sejam $A, B$ : $\mathsf{Set\ Real}$ conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $s_A$ sup de A e $s_B$ sup de B.
[u.b]
Sejam $a \in A$ e $b \in B$.
Ou seja $s_A \geqslant a$ e $s_B \geqslant b$.
Daí temos $s_A + s_B \geqslant a + b$, pelo teorema X.XX. ✗ faltou um
[l.u.b]
Seja s sup de A+B.
...

(6) **C2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

Há problemas quando 0 pertence a algum dos conjuntos.

Há problemas quando respondemos assim

(52) **D**

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite $\ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

pra quê?

Sejam $\varepsilon > 0$, e $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tq $(a_{2n})_{n>N_1} \to \ell_1$, $(a_{2n+1})_{n>N_2} \to \ell_2$ e $(a_{3n})_{n>N_3} \to \ell_3$.

Seja $N \geq \{N_1, N_2, N_3\}$.

Logo $(a_{2n})_{n>N}$, $(a_{2n+1})_{n>N}$, $(a_{3n})_{n>N} \subseteq B_\varepsilon(\min(\ell_1, \ell_2, \ell_3))$.

??

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

(20) **D3.** Dado o **D1,** demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.