FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.2
(points: 58; bonus: $8^\flat$; time: 64')

Nome:

2022-12-16

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.[3]

VIII. Escolha até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{M}$.[4]

Esclarecimentos.

Estamos usando os reais $\mathbb{R}$ com o *axioma* da completude:

$$(\forall A : \mathsf{Set\ Real})[\, A \text{ habitado } \ \& \ A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}\,]. \qquad \text{(R-Compl)}$$

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "(mid+)-level" que temos elaborado.

Em todos os problemas, podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte do IDMb (pré-completude). Nos problemas **P**, **C**, **D**, **M** podes usar os (NIP), (MCT), (BW), (CCC).

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) A

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

Demonstração da _____ .

(24) P

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência* $(t_n)_n$ *definida pelas* $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

Demonstração da _____ .

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

Demonstração da _____ .

(8$^\flat$) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
Resposta.

(34) **M**

Sejam $(A\,;d_A), (B\,;d_B)$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\, f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,]\,.$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

Demonstração da $(\Rightarrow)$.

Só isso mesmo.

Lemmata

Rascunho