
Nome:

2022-12-16

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- V. $(\forall x)[\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.³
- VIII. Escolha até 2 dos A, P, C, M.⁴

Esclarecimentos.

Estamos usando os reais \mathbb{R} com o *axioma* da completude:

$$(\forall A : \text{Set Real})[A \text{ habitado} \ \& \ A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}]. \quad (\text{R-Compl})$$

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem “(mid+)-level” que temos elaborado.

Em todos os problemas, podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte do IDMb (pré-completude). Nos problemas **P**, **C**, **D**, **M** podes usar os (NIP), (MCT), (BW), (CCC).

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \rightarrow 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \vartheta(\frac{1}{2} - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **C**

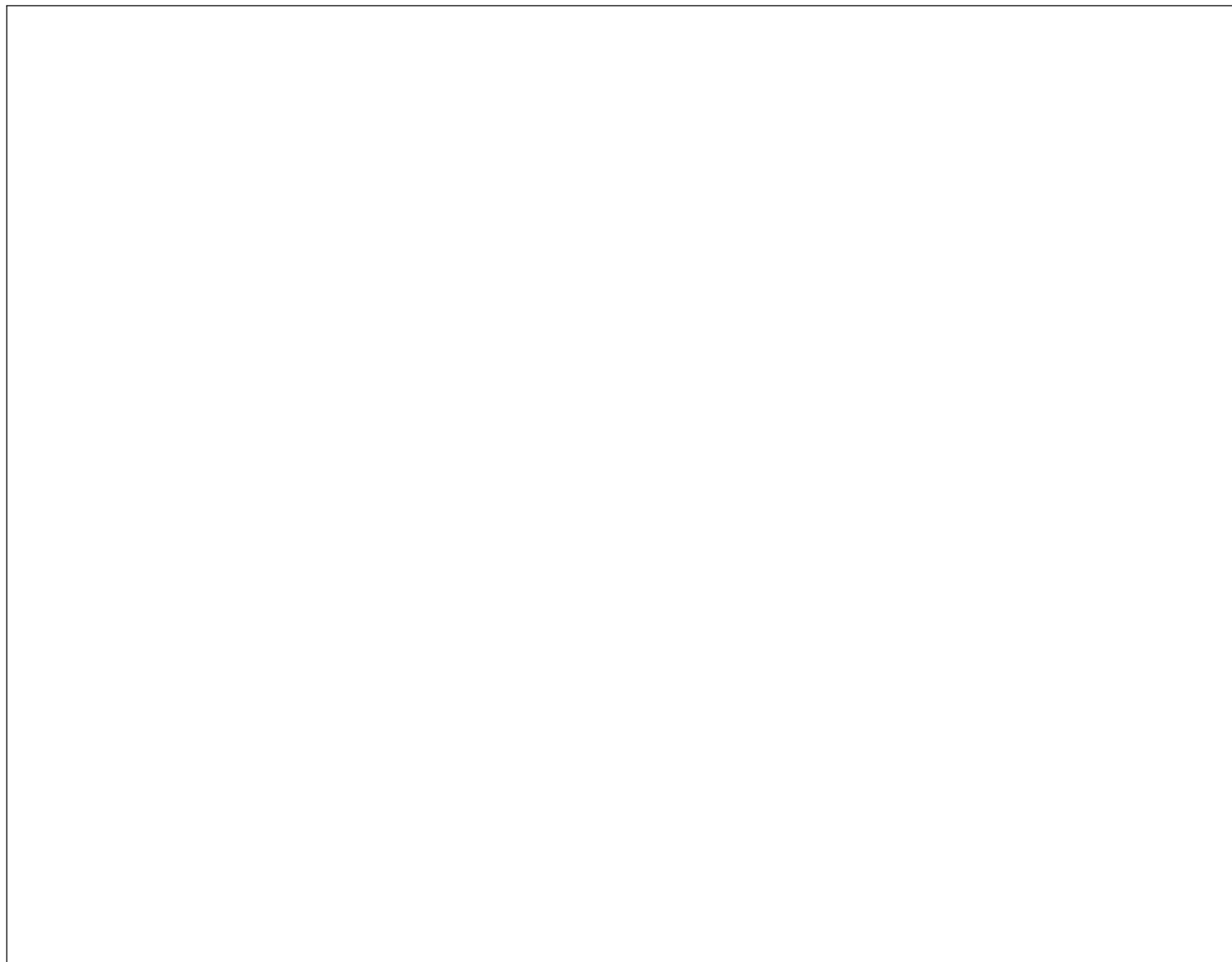
Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.

(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

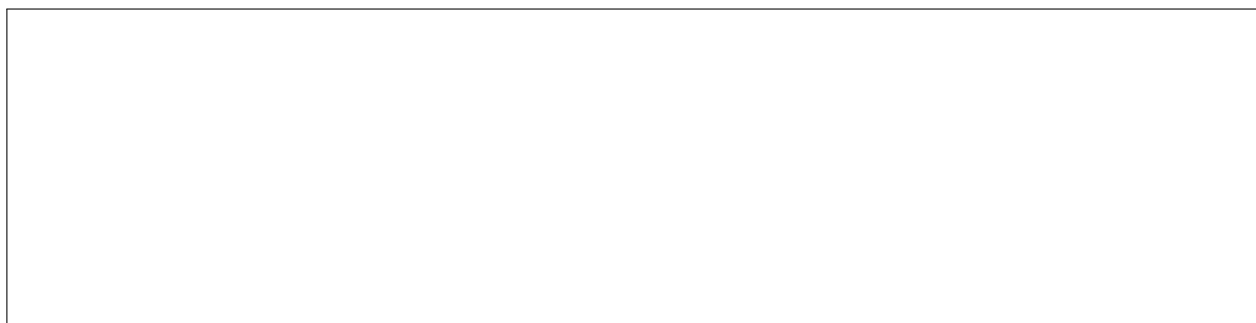
DEMONSTRAÇÃO DA _____ .



(8^b) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.

RESPOSTA.



(34) **M**

Sejam $(A ; d_A), (B ; d_B)$ espaços métricos e $f : A \rightarrow B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

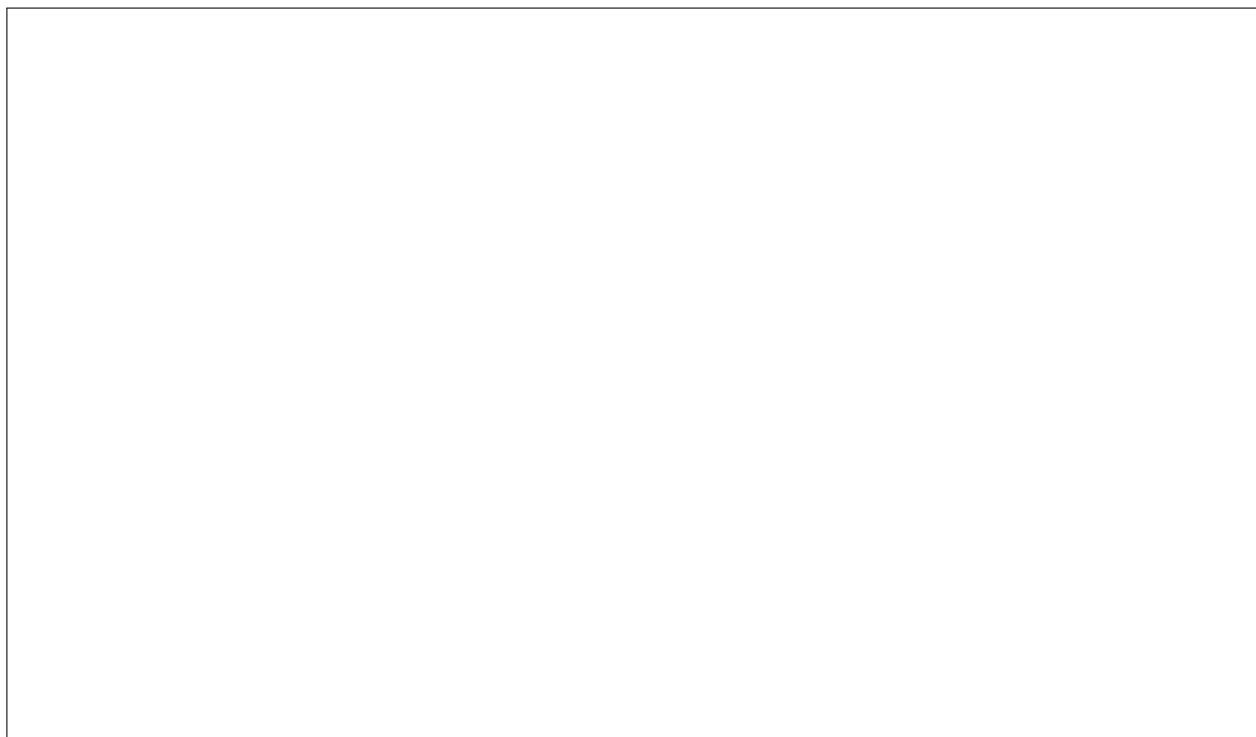
$$(\forall a \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a)) [f x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f a)]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A) (\forall (a_n)_n \rightarrow a) [(f a_n)_n \rightarrow f a].$$

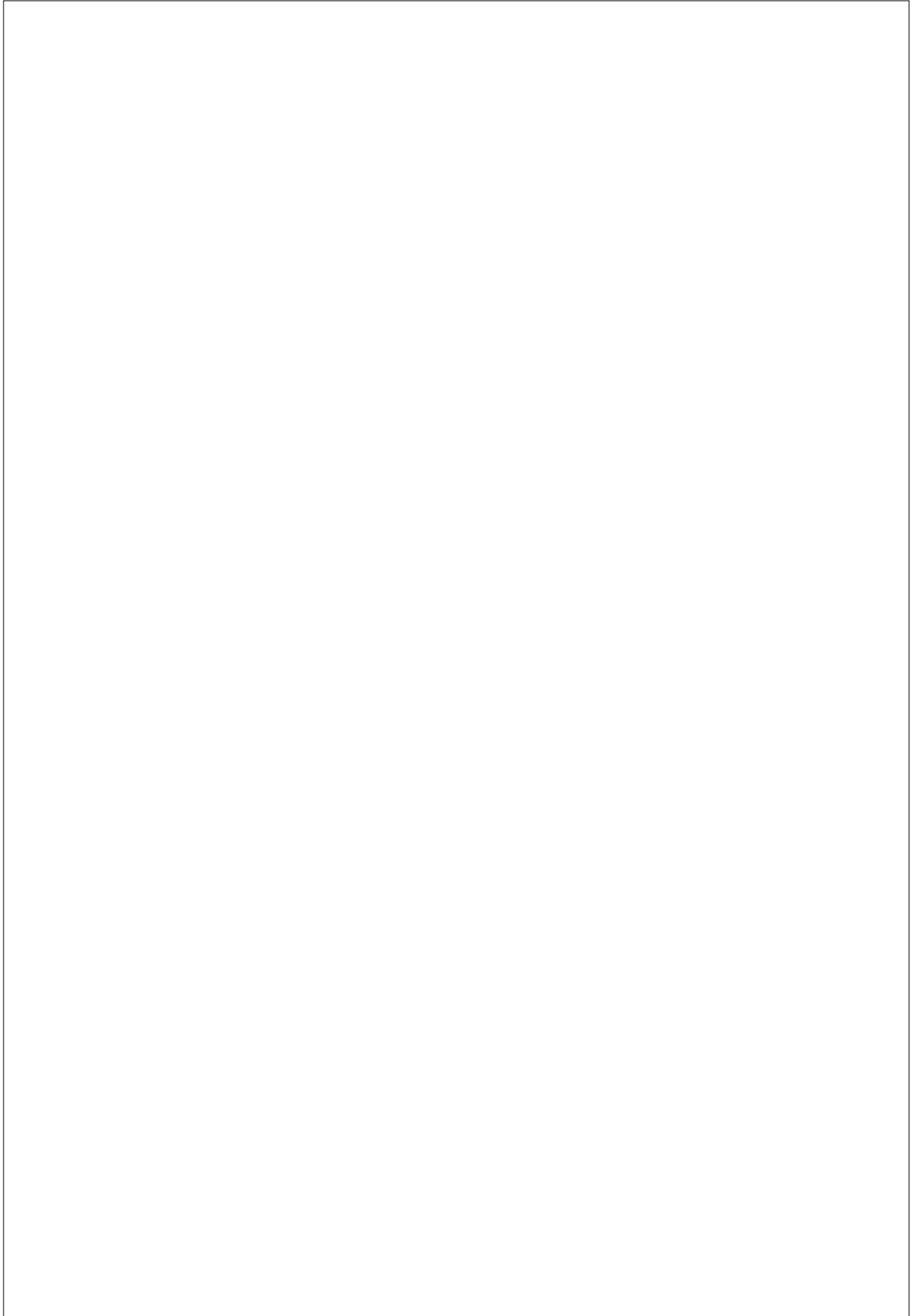
Teorema. f contínua \iff f seqüencialmente contínua.

DEMONSTRAÇÃO DA (\Rightarrow) .



Só isso mesmo.

LEMMATA



RASCUNHO