(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

Seja A^u o conjunto dos cotas superiores de um conjunto qualquer.
supremo = min A^u.

não usamos assim a "=".

qualquer? Não era pra ser do A?

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

$(\forall c,d)[c$ e d são supremos $\Rightarrow c = d]$

isso não é um enunciado!

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Qual teu alvo neste ponto?

Sejam $(a_n)_n$, ~~$(b_n)_n$~~ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(\exists N)[(a_n)_{n\geq N}$ é constante$]$. $\Leftrightarrow (\exists c)[(\forall n)[(a_n)_n = c]]$

Seja N t.q $(a_n)_{n\geq N}$ é constante e C t.q. $(\forall n_{\geq N})[(a_n)_n = C]$ –

Seja $\varepsilon > 0$.

Vou demonstrar que $(\exists N)(\forall n \geq N)[d(a_n, C) < \varepsilon]$.

$\boxed{\text{Seja } n \geq 0 \text{ t.q } d(a_n, C) < \varepsilon}$ → Qual existencial tá usando aqui?

Calculemos:

$d(a_n, C) = |a_n - C|$ [Dist. alguma coisa]

$= |C - C|$ [Escolha de C]

$= 0$ ∎

Quem se importa com apenas um a_n'zinho solto?

Tu tens neste momento um candidato legal (o N) e em vez de aproveitá-lo tu joga fora e considera o testemunha mais ousado de todos.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.

Qual teu alvo mesmo aqui?

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

isso é o max!

DEFINIÇÃO.

Seja $A : \mathrm{Set}(\mathrm{Real})$ e $a : \mathrm{Real}$. Dizemos que a é suprema de A se e somente se $a \in A$ e $a \geq A$.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

$(\forall A : \mathrm{set}(\mathrm{Real}))(\exists! a : A)(\forall m : A)[a \geq m]$

(1) Português! (Olhe **todos** os enunciados desta prova.)

(2) veja o gabarito

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $A : \mathrm{Set}(\mathrm{Real})$

por que n?

Seja $m : A$.

Sejam $\boxed{a, b \text{ supremos de } A}$, ou seja $\boxed{a \geq m \text{ e } b \geq m}$

usamos como "$\Leftrightarrow$"

Vou mostrar que $a = b$.

Seja a' tal que $a + a' = m$. ??

Seja b' tal que $b + b' = m$.

Calculamos:

$a + a' = b + b' \ldots$

I'm really sorry ☹

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente. $(\exists \ell)[(a_n)_n \to \ell]$
DEMONSTRAÇÃO. $(\forall n \geq N)[a_n = c]$

Suponha que $(a_n)_n$ é eventualmente constante, ou seja,
$(\exists c)(\exists N)(\forall n \geq N)[a_n = c]$
Seja $c : \mathbb{R}$. ← assim teu c é arbitrário, quando ele poderia ter sido solicitado para ser tão legal... ☹ ← teu c um c legal
Seja $N : \mathbb{N}$. ← mesmo problema
Vou demonstrar que $(a_n)_n \to c$, ou seja, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M)(\forall n \geq M)[d(a_n, c) < \varepsilon]$
Seja $\varepsilon > 0$.
Vou mostrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, c) < \varepsilon]$
Seja $n \geq N$.
Calculamos:
$d(a_n, c) = |a_n - c|$ (def de dist)
$=$

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

e se for 0?

qual ∃ tu tá usando aqui?

Seja x Real.

Seja x' $\boxed{\text{t.q. } x . x' = 1 = x' . x}$

calculamos:

$$\begin{aligned}
-x &= -(x . 1) \\
&= -(x . (x' . x)) \\
&= -((x . x') . x) \\
&= -(1 . x) \\
&= (-1) . x \\
&= x . (-1).
\end{aligned}$$

??!

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

quem é?

Suponha $(a_n)_n$ é eventualmente constante.
Sejam N, c t.q. $\forall n \geq N\, [a_n = c]$
Logo, Seja $\boxed{\varepsilon = N}$, → não faz sentido. Teu alvo é um $(\forall \varepsilon > 0)[\dots]$ e não um «para o teu ε favorito,...»
Logo, ~~[illegible]~~.
Seja $n \geq N$.
Calculamos:
$d(a_n, a_n) = 0$
$< \varepsilon$ [pela escolha de $\varepsilon > 0$]
~~[illegible]~~

too low!

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja~~ Seja $N:$nat t.q. ~~$(\forall m>N)$~~ $(\exists l:\mathbb{R})(\forall m>N)[a_m = l]$

Seja $\boxed{\varepsilon : \text{real positivo}}$ $\varepsilon > 0$.

Seja $l:\mathbb{R}$ t.q. $(\forall m>N)[a_m = l]$ (escolha de N)

~~Uso N como testemunha~~

Seja m natural $\boxed{\text{~~maior que m~~ ou igual}}$ quê?!?

ninguém merece

Logo, $a_m = l$

Logo, $a_m - l = 0$

Logo, $|a_m - l| < \varepsilon$. $\boxed{\text{Logo, } (a_m)_n \text{ é convergente.}}$ Q.E.D.

isso é código pós-return...

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que (I) $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja ε > 0 um ε real maior que 0~~ Seja ε real ~~t.q. ε>0~~ > 0

Como $(a_m)_m \to a$, Seja $N:$Nat t.q. $(\forall m \geq N)[d(a_m, a) < \varepsilon]$

~~Seja~~ Uso N como testemunha

Seja ~~m~~ $m:$Nat $\geq N$

~~Calculamos: como~~

calculamos

$$d(ca_m, ca) = |ca_m - ca|$$
$$= |c \cdot (a_m - a)|$$
$$= |c| \cdot |a_m - a| \quad [\text{lemma!!}]$$
$$= |c| \cdot d(a_m, a)$$
$$< |c| \cdot \varepsilon$$

relaxe!

Como $|c| \geq 0$ e $c \neq 0$, logo $|c| > 0$ [~~mod~~] [mod.!]

Logo, como $\varepsilon > 0$, logo $|c|\varepsilon > 0$,

QED

esse ε é teu desafio

esse é teu escolhido pra cá

mas tendo escolhido teu próprio desafio, tu só vai ganhar o jogo se $|c| < 1$.
Se $|c| \geq 1$, perdeu!

Deveria ter escolhido o $\frac{\varepsilon}{|c|}$ aqui!

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

Seja x : Real e A : Set(real), dizemos que x = Supremo A sse x é uma cota superior de A e $(\forall x')[x'$ é cota superior de $A \Rightarrow x' \geq x]$

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

$(\forall A : \text{Set(real)})(\forall x, x' : \text{Real})[x = \text{Sup } A \text{ e } x' = \text{Sup } A \Rightarrow x = x']$.

português!!

DEMONSTRAÇÃO.

Seja A : Set(real)
Sejam x, x' : Real t.q. $x = \text{Sup } A$ e $x' = \text{Sup } A$
logo $x \leq x'$ [def sup]
logo $x' \leq x$ [def sup]
como $x \leq x'$ e $x' \leq x$, logo $x = x'$ [(≥). Antissimetria]

$(\forall \varepsilon>0)(\exists M)(\forall m)[b_m, c$ são ε-perto$]$

$(\exists N)(\exists c)(\forall m \geq N)(a_m = c]$

$(\exists \ell)[(a_n)_n \to \ell]$

$(b_m - c) < \varepsilon$

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Sup $(a_n)_n$ é eventualmente constante
Logo seja N : Nat t.q. $(\exists c)(\forall m \geq N)[a_m = c]$
Logo seja c : Real t.q. $(\forall m \geq N)[a_m = c]$
Vou demonstrar que $(b_n)_n \to c$.
Seja $\varepsilon > 0$
Vou demonstrar que $(\forall m \geq 0)[a_m, c$ não ε-perto$]$
Seja $m \geq 0$
Caso $m \geq N$: | Caso $m < N$
Logo $a_m = c$, pela escolha de $c^{(1)}$
Logo $d(a_m, c) = d(c, c)$ [(1)]
Logo $d(c, c) = 0 < \varepsilon$. [d...]

por que escolher o 0 aqui?!
Deveria ter escolhido o N, pois isso já teria já QED'zado!

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ eventualmente constante.
Seja N tal que $(\exists k)[(a_n)_{n\geq N} = k]$.
Seja k tal que $(\forall n \geq N)[a_n = k]$.
Vou demonstrar que $(a_n)_n \to k$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, k) < \varepsilon]$.
Seja $n \geq N$.
Pela escolha de k, $a_n = k$. (1)
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(a_n, k) &= d(k,k) && (1)\\
&= 0 && (d.1)\\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

quem é?

Seja N tal que $(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \varepsilon/|c|]$.

aqui é que tu precisa do

Seja $\varepsilon > 0$.
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(ca_n, ca) < \varepsilon]$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(a_n, a)\cdot|c| &< \left(\tfrac{\varepsilon}{|c|}\right)\cdot|c| && (\text{AO-M})\\
&= \varepsilon\\
d(a_n, a)\cdot|c| &= \boxed{d(ca_n, ca)}
\end{aligned}
$$

nem a pau.

faria sentido escrever aqui os passos mesmo.

Portanto, $d(ca_n, ca) < \varepsilon$.

muitíssimo bizarro escrever isso assim em duas partes!
Que tal começar aqui e andando conseguir o $< \varepsilon$?

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ é eventualmente constante.
Sejam N : Nat e c : Real t.q. $(\forall n \geq N)(a_n = c)$.
Vou demonstrar que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M)(\forall n \geq M)[d(a_n, c) < \varepsilon]$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, c) < \varepsilon]$.
Seja $n \geq N$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(a_n, c) &= |a_n - c| && [\text{def. de distância}] \\
&= |c - c| && [\text{pela escolha de } N] \\
&= |0| = 0 < \varepsilon
\end{aligned}
$$

1

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $(a_n)_n$ sequência de reais e $c \neq 0$, t.q. $(a_n)_n \to a$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja N : Nat t.q. $(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{|c|}]$. vai precisar
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(ca_n, ca) < \varepsilon]$.
Seja $n \geq N$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(ca_n, ca) &= |ca_n - ca| && [\text{def. de distância}] \\
&= |c||a_n - a| && [\text{R - Dist}] \\
&= |c| . d(a_n, a) && [\text{def. de distância}] \\
&< |c| . \frac{\varepsilon}{|c|} && [\text{RO - M}] \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

(12) **A**

Não dá começar demonstração com "afirmações secas".

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x, \ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO. (ESBOÇO?)

$$\begin{aligned} x + x(-1) &= x.1 + x(-1) & [\text{RM-Ind.}] \\ &= x(1 + (-1)) & [\text{R-DistL.}] \\ &= x.0 & [\text{RA-Inv.}] \\ &= 0 & [\Theta\text{-RM-Ann.}] \end{aligned}$$

Pelo lemma unicidade das resoluções,
$-x = x(-1)$.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.
DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.
ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_{\cancel{n}})_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

o que significa essa parte? (Tente pronunciar a frase toda.)

Seja N t.q $(a_n)_{n \geq N}$, $\boxed{a_n}$ é constante.
Seja c t.q $\boxed{(\forall n)}$ $[a_n = c]$. $(\forall n \geq N)$
Seja $\varepsilon > 0$.
Vou demonstrar que c serve. ← ficou estranho
Seja $n \geq N$.
calculamos

$$\begin{aligned} d(a_n, c) &= |a_n - c| \\ &= |c - c| \quad [\text{por escolha de } c] \\ &= 0 \\ &\cancel{< \varepsilon} \end{aligned}$$

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

(Veja a def. de "eventualmente".)

Sejam $(a_n)_n$, $(\cancel{b_n})_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

aqui usamos chaves para denotar conjuntos.
Use parenteses para seqs: $(a_n)_{n\geq N}$

Suponha $(a_n)_n$ é eventualmente constante.
Logo, seja c natural tq. $(\exists N)(\forall n \geq N)[a_n = c]$.
Logo, seja N natural tq. $(\forall n \geq N)[a_n = c]$.
Vou demonstrar que $\{a_n \mid n \geq N\}$ é convergente a c.
Seja $\boxed{3>0}$.
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, c) < 3]$.
Seja $n \geq N$.
Logo, pela escolha de N, temos que $a_n = c$.
Logo, $d(a_n, c) = 0 < 3$.

« Seja três positivo.»

(21) **M**

Aprenda grego! ☺

ε 3

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

épsilon três

Já dá para perceber o problema aqui.
Lendo essa linha, o ALVO deveria ser $(\forall n,m \geq N)[\ldots]$.
Mas teu ALVO atual é $(\forall n \geq N)[\ldots]$ desde a linha anterior.

(21) **C**

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *autoconvergente* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ autoconvergente} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall i, j \geq N)\,[\,d(x_i, x_j) < \varepsilon\,].$$

Proposição. Toda seqüência de reais autoconvergente é cotada.
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

$a_n - 1 \leq a_n \leq 1$

Seja $(a_n)_n$ uma sequência de reais (auto-)!! convergente.
Logo, seja N natural tq. $(\forall i, j \geq N)[d(a_i, a_j) < 1]$
Vou encontrar uma cota M para $\{a_n \mid n < N\}$.
Como $\{a_n \mid n < N\}$ é habitado e finito, logo, seja $M = \max\{|a_n| \mid n < N\}$
Vou demonstrar que $\{a_n \mid n \geq N\}$ é cotado por 1. (Vai não...)
Sejam ~~n e m~~ naturais tq. $\boxed{n \geq N \text{ e } m \geq N}$. $n, m \geq N$ é entendível.
Logo, pela escolha de N, temos que $d(a_n, a_m) < 1$.
Logo, $-1 < a_n - a_m < 1$. ← Assim tu demonstrou que $\{a_n - a_m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ é cotado; mas é esse que prometeu cotar!
~~Como~~
Vou demonstrar que $(a_n)_n$ é cotado pelo $M' = \max(|M|, 1)$.
Caso $n < N$:
$a_n \leq M \leq M'$
Caso $n \geq N$:
$a_n < 1 \leq M'$.

Detalhar escrevendo essa parte seria demais "nesta altura".

Só isso mesmo.

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x : Real.
Calculamos.

$\cancel{-x + x + 0 = x(-1) + (x + x(-1))\ [RA\text{-}Inv]}$

Donde tirou isso?
Não tem nada disso nos teus dados.

Isso não é um cálculo; mas sim uma seqüência de afirmações. Veja bem como escrevemos cálculos!

$$-x + x = x(-1) + x \qquad [??!]$$
$$0 = x(-1) + x \qquad [RA\text{-}Inv]$$
$$0 = x + x(-1) \qquad [RA\text{-}Com]$$
$$x(-1) = -x \qquad [RA\text{-}Inv]$$

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

Seja A um conjunto de Reais, e x um real. Denomina-se supremo de A o real x sse ~~tal~~ ~~que~~ x é maior que todos os habitantes de A. Ou seja:
$\boxed{\cancel{(\exists x:\mathbb{R})}}(\forall a : A)[x \geq a]$

tu precisa falar algo sobre teu x aqui! Botando isso tu acaba sombreando (variable shadowing) teu x, pois $(\exists x)$ está capturando esse 'x'.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

Seja x uma $\boxed{\text{suprema}}$ de $\boxed{A.}$ Quem é?
$(\forall x' : \mathbb{R})[x' \text{ é supremo de } A \Rightarrow x' = x]$

suprem**o** — suprem**os** (pt)
suprem**um** — suprem**a** (latim, inglês, mundo,...)

DEMONSTRAÇÃO.

Ficou estranho assim.
Por que "sejar" o 'x' mas deixar o 'x'' no ALVO? Que tal:
« Sejam x, x' supremos de A. Demonstre x = x'. »

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ eventualmente constante
Logo seja N: Nat t.q. $(\exists c)(\forall n \geq N)[a_n = c]$
Logo seja c: Real t.q. $(\forall n \geq N)[a_n = c]$
Vou demonstrar que $(a_n)_n \to c$
Seja $\varepsilon > 0$
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, c) < \varepsilon]$
Seja $n \geq N$
Calculemos:

$d(a_n, c) = d(c, c)$ [pela escolha de c]
$= 0$
$< \varepsilon$ [d.3]

na ordem do quadro

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n \to a$
Vou demonstrar que $(ca_n)_n \to ca$
Seja $\varepsilon > 0$
Logo seja N: Nat t.q. $(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{|2c|}]$ Confirme que $\frac{\varepsilon}{|c|}$ também teria servido.
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(ca_n, ca) < \varepsilon]$
Seja $n \geq N$
Calculemos:

$d(ca_n, ca) = |ca_n - ca|$ [definição de d]
$= |c(a_n - a)|$ [~~R-dist~~]
$= |c|\,|a_n - a|$ [~~?~~] pra isso? Nesta altura não...
$= |c|\, d(a_n, a)$ [definição de d]
$< |c| \frac{\varepsilon}{|2c|}$ [pela escolha de n]
$= \frac{|c|}{|2c|} \varepsilon$ [RM-Assoc] $|2||c|$
$= \frac{1}{2} \varepsilon$
$= \varepsilon/2$
$< \varepsilon$

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x real.

Calculamos:

$$\begin{aligned} x + x(-1) &= x\cdot 1 + x(-1) && \text{(RM-Id)}\\ &= x\cdot(1+(-1)) && \text{(R-Dist)}\\ &= x\cdot 0 && \text{(RA-Inv)}\\ &= 0 && \text{(Zero-Ann)}\\ &= x+(-x) && \text{(RA-Inv)}. \end{aligned}$$

Logo, $(-x)+(x+x(-1)) = (-x)+(x+(-x))$ por (0.1).

Logo, $x(-1) = (-x)$.

Logo $((-x)+x)+x(-1) = ((-x)+x)+(-x)$.

Logo $0 + x(-1) = 0 + (-x)$.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

$\boxed{\text{Sendo}}$ x real e A um conjunto de reais GerundioError.

x é um supremo de $A \Leftrightarrow x \geq A$ & $\underbrace{(\forall x' \in A)[x \leq x']}_{x \leq A}$

Aqui poderia ter usado A^{L} mas nesse caso deveria defini-lo também.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

$(\forall A : \mathrm{Set}(\mathrm{Real}))(\forall l, l' : \mathrm{Real})\,[\, l \text{ é } \sup A \;\&\; l' \text{ é } \sup A \Rightarrow l = l' \,]$

Português!

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $A : \mathrm{Set}(\mathrm{Real})$.

Sejam l e l' reais, tais que, l é $\sup A$ e l' é $\sup A$.

Logo, $l \leq l'$, pois l é $\sup A$. & $l' \geq A$.

Logo, $l' \leq l$, pois l' é $\sup A$. & $l \geq A$.

Logo $l = l'$, pela antissimetria de $\leq$.

o que tu precisou da especificasão dos reais aqui?

Θ.1 $(\forall x, y : \mathrm{Real})\,[x = y \Rightarrow f(x) = f(y)]$

Sejam x, y reais, tais que $x = y$.
Calculamos:

✓

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \\ &= f(y) \quad (x = y). \end{aligned}$$

Zero-Ann $(\forall x : \mathrm{Real})\,[x \cdot 0 = 0]$

Seja x real.
Calculamos:

✗

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot (x + (-x)) && [?] \\ &\cancel{=} xx + ((-x)x) && [?] \\ &\cancel{=} xx + (-(xx)) && [?] \\ &= 0. && [?] \end{aligned}$$

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

-1

$0 - 1$

$x0 - x$

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = \boxed{x(-1)}$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x Real.
Calculamos:

$= \cancel{(-1)x \cdot 1}$ ~~[RM-Id]~~

$= \cancel{(-1)x \cdot (x}$

$\not\equiv$

x $\boxed{(-1)x}$

$= (0-1)x$ [RA-Id]

$= x.0 - x.1$ [R-Dist]

$= 0 - x.1$ [RM-zeroAnn]

$= -x$ [RM-Id]

■

como sumiu?

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.
DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.
ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, (rabisco) seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Quem é?

$(\exists \cancel{N}\, c)(\forall n \geq N)[a_n = c]$

Seja ~~c~~ N Real tal que -- ~~Distância Estrita inteiro índice que n precisa ser ≥N~~

Vou demonstrar que $(a_n)_n \to c$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[a_n, c$ são ε-perto$]$

Logo, seja $n \geq N$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
& d(a_n, c) \\
&= d(c, c) && [(\text{escolha de } c)] \\
&= 0 && [(d \text{ é distância, logo dist. } 2)] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

!

Finalmente alguém ficou "implementação-agnóstico": fechou usando apenas a especificação de métrica.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Lemma RM-zeroAnn:

Demonstração: Sem enunciado ?!!

Seja a Real.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
& a0 \\
&= a \cdot (1 - 1) && [(RA\text{-}Inv)] \\
&\neq 1 \cdot a - 1a && [R\text{-}Dist] \\
&= a - a && [RM\text{-}Id] \\
&= 0 && [(RA\text{-}Inv)]
\end{aligned}
$$

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x : Real.

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= x \cdot 0 \quad [\text{RM-Ani}]\\
&= x \cdot (1 + (-1)) \quad [\text{RA-Inv}]\\
&= x \cdot 1 + x(-1) \quad [\text{R-Dist}]\\
&= x + x(-1) \quad [\text{RM-Id}]
\end{aligned}
$$

Logo $x + x(-1) = x + (-x)$.

[R-Res]. (Como?!)

Logo $-x = x(-1)$.

[R-Canc]

Na verdade, a (R-Res) neste momento te permite concluir já teu ALVO: $-x = x(-1)$ pois ambos encaixam no $x + \square = 0$.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(\exists N)$ $(\exists c)$ $(\forall n \geq N)[a_n = c]$.	Logo $d(a_n, c) = d(c, c)$
Sejam N, c t.q. $(\forall n \geq N)[a_n = c]$.	[Escolha do N].
~~Uso c como testemunho~~.	Logo $d(c,c) = 0$
Seja $\varepsilon > 0$.	[dist-of-names].
~~Uso N como testemunho~~.	Logo $0 < \varepsilon$. ∎
Seja $n \geq N$.	

Aqui tu não tá inferindo isso a partir da coisa anterior.
Use «Temos» ou «Mas» aqui.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Assim tu acaba inferindo $\varepsilon > 0$, que é algo que já tens.

Olha: $d(a_n, c) = d(c,c)$
$= 0$
$< \varepsilon$ ∎

• RM-Ani

$(\forall x : Real)[x \cdot 0 = 0]$

Seja $x : Real$.

Calculemos:

$x \cdot 0 = x(0+0)$ [RA-Id]

$= x \cdot 0 + x \cdot 0$ (R-Dist)

Logo pelo R-Res, $x \cdot 0 = 0$. ✓

• R-Res

$(\forall x : Real)[x + a = c \wedge x + b = c \implies a = b]$

Seja $x : Real$.

Grr...

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

✓ Suponha $(a_n)_n$ eventualmente constante.
✓ Logo seja $N : \text{Nat}$ t.q $(a_n)_{n \geq N}$ é constante.
✓ Logo seja $c : \text{Real}$ t.q $(\forall n \geq N)[a_n = c]$.
✓ Seja $\varepsilon > 0$.
✓ Vou demonstrar $(\forall n \geq N)[d(a_n, c) < \varepsilon]$.
✓ Seja $n \geq N$.
✓ Temos $d(a_n, c) = d(c, c)$. [escolha de c]
✓ Logo $d(a_n, c) = 0$. [dist]
! ✓ Imediato.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

já discutido

✓ Seja $\varepsilon > 0$.
✗ Logo seja $N : \text{Nat}$ t.q $(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \varepsilon]$. $[(a_n)_n \to a]$
✓ Vou demonstrar $(\forall n \geq N)[d(ca_n, ca) < \varepsilon]$.
✓ Seja $n \geq N$.
Logo $d(a_n, a) < \varepsilon$. [pela escolha de N]
Basta $ca_n = ca$. [dist]?!

Bastaria sim, mas não tem como conseguir isso.
(Ainda bem que não é necessário.)

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.
DEFINIÇÃO.

~~$s = \text{Supremo}\,A \overset{\text{def}}{\iff} s \geq A \ \&\ (\forall w \geq A)[s \leq w]$~~

Seja $A : \cancel{\text{Seq}}$ Set (Real) e $s : \text{Real}$, dizemos que s é um supremo de A sse $(s \geq A \ \&\ (\forall w \geq A)[s \leq w])$

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.
ENUNCIADO.

~~$(\forall s, s' \geq A)[s = \text{Supremo}\,A \ \&\ s' = \text{Supremo}\,A \Rightarrow s = s']$~~

$(\forall A : \text{Seq}(\text{Real}))(\forall s, s' \geq A)[s = \text{Supremo}\,A \ \&\ s' = \text{Supremo}\,A \Rightarrow s = s']$

pt!

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $A : \text{Seq}(\text{Real})$

Sejam $s, s' :$ ~~Supremo~~ Real tq $s \geq A$ e $s' \geq A$.

Suponha s, s' supremos de A.

! Como s é um supremo de A e $s' \geq A$, logo $s \leq s'$. ~~[Definição de supremo]~~

Como s' é um supremo de A e $s \geq A$, logo $s' \leq s$. ~~[Definição de supremo]~~

Como $s \leq s'$ e $s' \leq s$, logo $s = s'$. [RO-~~Tri~~] Antissimetria.

A justificativa aqui não pode ser «def. de sup.» já que tal def. não tá afirmando nada sobre teus s, s', A! O que tu tá usando aqui é exatamente o que tu escreveu nos teus «Como —, …». Não é pra escrever nada mais!

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, [redacted] seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha

Seja $(a_n)_n : \mathrm{Seq}(\mathrm{Real})$ tq $(a_n)_n$ é eventualmente constante.

~~Seja ε~~.

Logo, seja $N : \mathrm{Nat}$ tq $(a_n)_{n \geq N}$ é constante.

Tu precisa demonstrar algo $(\forall \varepsilon > 0)$, e não apenas para teu positivo favorito!

Seja $\varepsilon = 1$. ← Qual teu alvo aqui?

Deveria ser: «Seja $\varepsilon > 0$.»

~~Uso N como testemunha.~~ 🤫

Demonstremos que $(a_n)_{n \geq N} \to a_N$.

Tu não precisa passar por esse passo. Tua demonstração já estabelece $(a_n)_n \to a_N$.

Seja $n \geq N$.

Temos que $a_n = a_N$ [Pela escolha de N]

Logo, $d(a_n, a_N) = 0$ [$d(x,y) \overset{\text{def}}{=} |x-y|$]

E $0 < ~~1~~ \cdot \varepsilon$ ~~[Lemma 1]~~ → Já sabemos $0 < 1$ nesta altura!

Como $(a_n)_{n \geq N} \to a_N$, logo $(a_n)_n \to a_N$.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

[Lemma 1] $0 < 1$. ~~(R-Ann) (∀a) [0·a=0]~~

Suponha que $0 > 1$.

Seja c: Real tq $c > 0$

Como $0 > 1$, logo $0 * c > 1 * c$. [RO-M]

Logo, $0 > c * 1$. [R-Ann, RM-Com]

Logo, $0 > c$ [RM-Id]

Contradição [Pela escolha de c]

(R-Ann) [∀a] [$0 \cdot a = 0$]

Seja a: Real.

Como $a + 0 = a$, demonstremos que $a + 0 \cdot a = a$. [RA-Id]

Calculamos

$$\begin{aligned} a + 0 \cdot a &= \cancel{a \cdot 1 + 0 \cdot a} && \text{[RM-Id]} \\ &= 1 \cdot a + 0 \cdot a && \cancel{\text{[RM-Com]}} \\ &= (1+0)\, a && \text{[R-Dist]} \\ &= 1 \cdot a && \text{[RA-Id]} \\ &\cancel{= a \cdot 1} && \cancel{\text{[RM-Com]}} \\ &= a && \text{[RM-Id]} \end{aligned}$$

[RA-Res]

!

(12) **A**

$-x = (-x) \cdot 1 = (-x)$

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x real

$-x =$

$x(-1)$

$= (x+0)(-1)$ (?)

$= (x + (x + (-x)))(-1)$ (?)

(2) $= x(-1) + (x(-1) + (-x)(-1))$

$= x(-1) + x(-1) + (-x)(-1)$

∴ ?

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

$(\varepsilon > 0)(\exists M)(\forall n \geq M)[d(c_n, l) < \varepsilon]$

blah

Sejam $(a_n)_n$, ~~$(b_n)_n$~~ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

c_n?

Suponha ~~Seja~~ $(c_n)_n$ uma sequência de reais eventualmente constante.
Seja M um real tal que $(a_n)_{n \geq M}$ é constante e igual a c. quem é?
Seja também $\varepsilon > 0$ real, e $n \geq M$ real.

Eu vou demonstrar $\boxed{(a_n)_n \to c}$

Calculamos

$d(a_n, c) =$

$= d(c, c)$ (escolha do n)

$= 0 < \varepsilon$.

~~Assim, tomando c como testemunha~~

~~e $(a_n)_n$ é convergente.~~

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

para qualquer real x, $-x = x(-1)$.

DEMONSTRAÇÃO.

De Acordo Como a ~~Comutatividade~~ (RA-Inv) Temos: $\boxed{1 + -1 = 0}$? $\underbrace{-1+1=0}_{\text{Seco}}$

Logo temos que x é Comutativo

TYPE ERROR! o que significa que um número é comutativo?

Então $-x = x$ ∎

isso não é teu ALVO aqui.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

Para todo x Real x é ≥ 0 & único.

(Sequer "compilam" essas frases.)

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

∀ x (Real) x é único & Supremo.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x Real & ≥ 0

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

$(\forall \mathbb{R} x)\ -x = x(-1) \iff (RA\text{-}Ind)$

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.
DEFINIÇÃO.

É o número máximo ou mínimo de um conjunto de números reais

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.
ENUNCIADO.

Numero supremo mínimo é partir de 1

Numero supremo máximo até o 1

DEMONSTRAÇÃO.

número supremo mínimo

número supremo máximo

$[1, 2, 3, 4 \ldots]$ $\quad$ $[\ldots 4, 3, 2, 1]$

Resposta preocupantíssima

Quem te aprovou nos pré-requisitos tem te prejudicado em forma pesadíssima!
Recomendo re-matricular nos pré-reqs em turmas lecionadas por outros profs,
e reclamar sobre isso à direção para achar uma resolução.

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

Seja c cota superior de S. dizemos que c é supremo de S sse para toda c' cota superior de S, c < c'.

Faria sentido definir isso.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

Quem é?

(∀c, c' cota de S)[c supremo & c' supremo => c = c']

?

TYPE ERROR

Essas não são Prop mas sim Set(Real) → Prop.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Seja~~m~~ $(a_n)_n$, ~~[illegible]~~ seqüência~~s~~ de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $(a_n)_n$ seq REAL.
Suponha $(a_n)_n$ eventualmente constante
Seja c tq $[(a_n)_n = c]$
Seja ~~N Arbitrário~~. Não escreva assim! Escreva: «Seja N natural.»
Seja n tq $n \geq N$.
Vou demonstrar que $(a_n)_n$ é convergente.
Seja $\varepsilon > 0$ tq $\boxed{\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}}$ Nenhum real positivo satisfaz isso!
Seja ℓ limite de $(a_n)_n$
Tu não tava no processo de demonstrar exatamente a existência de um tal ℓ?

bugou muito aqui

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
c - \ell &= c - \ell + 0 && [\text{RA-Id}] \\
&= c - \ell + a_n - a_n && [\text{RA-INV}] \\
&= c - a_n + a_n - \ell && [+\ \text{Com}] \\
&\leq |c - a_n| + |a_n - \ell| \ ? \\
&= d(a_n, c) + d(a_n, \ell) && [\text{def distância}] \\
&< \varepsilon + \varepsilon && [\text{convergência de } (a_n)_n \text{ e } (a_n)_n \text{ constante}] \\
&< 2\varepsilon && [+] \\
&< \varepsilon && [\text{escolha de } \varepsilon = \tfrac{\varepsilon}{2}] \\
&< 0 && [\varepsilon > 0]
\end{aligned}
$$

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, ~~$(b_n)_n$~~ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha quem é?

Seja $(a_n)_n$: Seq(Real) t.q. ~~$(\forall n)[a_n = \text{const}]$~~. ~~$(\forall n)(\exists c)[a_n = c]$~~ $(\exists N)[(a_n)_{n \geq N} = \boxed{c}]$

Seja $\varepsilon > 0$. Seja $m \geq N$. Quem é??

Calculemos:

$d(a_m, c) = d(c, c)$ ~~$(a_n = c)$, Seq(Real) constante~~ $(m \geq N)$ mais que isso!

$= |c - c|$ (definição de distância)

$= 0$ (RA-INV)

$< \varepsilon.$ $(\varepsilon > 0)$

Logo, $(a_n)_n$ é convergente.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $(a_n)_n$: Seq(Real) t.q. $(\forall_{\varepsilon > 0})(\exists N)(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \varepsilon]$

Seja $c \neq 0$.

Calculemos: Qual teu alvo aqui?

$d(a_n, a) < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ (definição de $d(x,y)$) Quem é?

Quem é? $\boxed{x < \varepsilon \not\Rightarrow x = 0!}$

~~$\Rightarrow$~~ $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$

Não somos limitados em ASCII, escrevendo na mão! :p

$\Rightarrow c\,|a_n - a| = c.0$ (multiplicando ambos os lados

$\Rightarrow |c_{a_n} - c_{\boxed{a}}| = 0$ (R-Distr & $c0 = 0$) (c0 ou c·0)

são índices?!

$\Rightarrow |c_{a_n} - c_a| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$

$\Rightarrow d(c_{a_n}, c_a) < \varepsilon.$

Procure o «Não escreva assim» no fmcbook.

Portanto $(ca_n)_n \to ca$. Tu tá confundindo "⇒" com "Logo"!

(18) **L**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais e $c \neq 0$, tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\varepsilon > 0$.

Em vez de separar, use $|c|$. (Veja gabarito!)

$\boxed{\text{Caso } c > 0:}$

Seja N t.q. $(\forall m \geq N)\left[d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{c}\right]$

~~Uso N como testemunha.~~ 🤫

Seja m: ~~Nat.~~ $n \geq N$.

Temos $-\frac{\varepsilon}{c} < a_m - a < \frac{\varepsilon}{c}$. [~~Lema H~~]

Logo, $-\varepsilon < c(a_m - a) < \varepsilon$. [RO-M]

Logo, $-\varepsilon < ca_m - ca < \varepsilon$. [(·)-dist]

Logo $|ca_m - ca| < \varepsilon$, ou seja

$d(ca_m, ca) < \varepsilon$.

~~Caso $c < 0$:~~

~~Similar.~~

(Aqui poderia pelo menos mencionar o $\frac{\varepsilon}{-c}$.)

Mas:

(21) **C**

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *autoconvergente* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ autoconvergente} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall i, j \geq N)\,[\,d(x_i, x_j) < \varepsilon\,].$$

Proposição. Toda seqüência de reais autoconvergente é cotada.
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

Seja $(x_m)_m$: Seq(Real).
Suponha $(x_m)_m$ é autoconvergente.
Seja N:Nat t.q. $(\forall i,j \geq N)[d(x_i,x_j) < 1]$.
Seja $S = \{x_i \mid i < N\}$.
Temos que S é finito.
Logo sejam $M = \max S$ e $m = \min S$.
Vou demonstrar que $\max(M, x_N+1)$ é cota superior de $(x_m)_m$.
Seja m : Nat.
Caso $m \geq N$:
Temos $d(x_m, x_N) < 1$, ou seja $|x_m - x_N| < 1$.
Logo, $x_m - x_N < 1$. ~~[Lemma 11]~~ → Naah...
Logo, $x_m < 1 + x_N \leq \max(M, x_N+1)$.

Caso $m < N$:
Temos $x_m \in S$. [escolha do S]
Logo $x_m \leq M \leq \max(M, x_N+1)$ [escolha de M].
Vou demonstrar que $\min(m, x_N - 1)$ é cota inferior de $(x_m)_m$.
Similar.

Só isso mesmo.

Lemma 11

$(\forall a, b)\,[\,|a| < b \iff -b < a < b\,]$