
Nome:

Regras:

2022-12-07

- I. Não vires esta página antes do começo da prova. V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
II. Nenhuma consulta de qualquer forma. VI. Responda dentro das caixas indicadas.
III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).¹ VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma. VIII. Escolha até 2 dos A, S, L, M, C.³

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem “mid-level” que temos elaborado.

Nos problemas S, L, M, C podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte de IDMb.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \text{Real} \quad (+), (\cdot) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Real} \quad (-) : \text{Real} \rightarrow \text{Real} \quad (>) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Prop.}$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$\begin{aligned} (\forall a, b, c)[a + (b + c) &= (a + b) + c] && \text{(RA-Ass)} \\ (\forall a)[0 + a &= a = a + 0] && \text{(RA-Id)} \\ (\forall a)[(-a) + a &= 0 = a + (-a)] && \text{(RA-Inv)} \\ (\forall a, b)[a + b &= b + a] && \text{(RA-Com)} \\ \\ (\forall a, b, c)[a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c] && \text{(RM-Ass)} \\ (\forall a)[a \cdot 1 &= a] && \text{(RM-Id)} \\ (\forall a \neq 0)(\exists a') [a' \cdot a &= 1 = a \cdot a'] && \text{(RM-Inv*)} \\ (\forall a, b)[a \cdot b &= b \cdot a] && \text{(RM-Com)} \\ \\ 0 \neq 1 && \text{(R-NTriv)} \\ (\forall d, a, b)[(a + b) \cdot d &= (a \cdot d) + (b \cdot d) \ \& \ d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)] && \text{(R-Dist)} \\ \\ (\forall a, b, c)[a > b \ \& \ b > c &\implies a > c] && \text{(RO-Trans)} \\ (\forall a, b)[\text{e.u.d.}: a > b; a &= b; b > a] && \text{(RO-Tri)} \\ (\forall a, b, c)[a > b &\implies a + c > b + c] && \text{(RO-A)} \\ (\forall a, b, c)[a > b \ \& \ c > 0 &\implies ac > bc] && \text{(RO-M)} \end{aligned}$$

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

para qualquer real x , $-x = x(-1)$.

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.

DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.

ENUNCIADO.

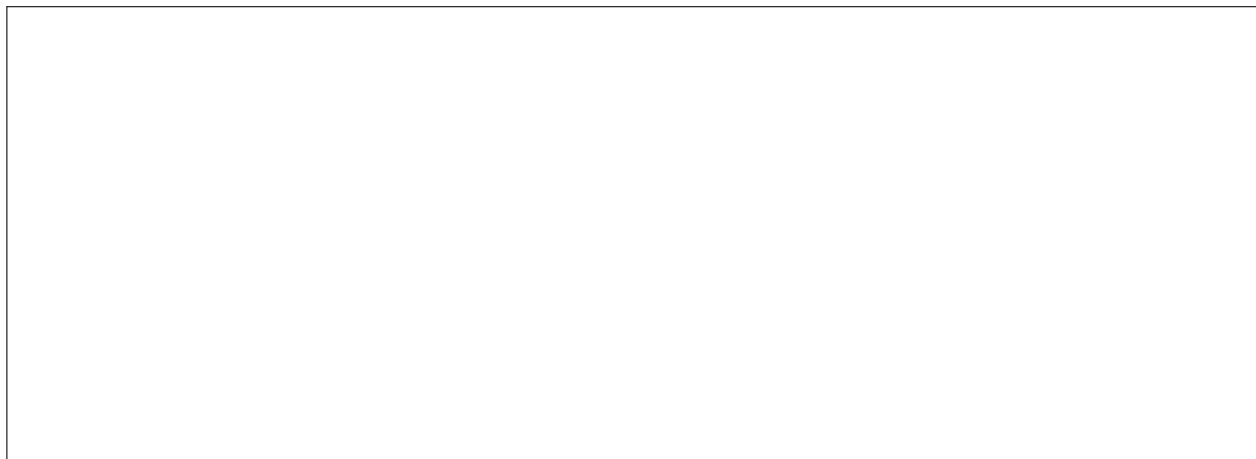
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais.

Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.

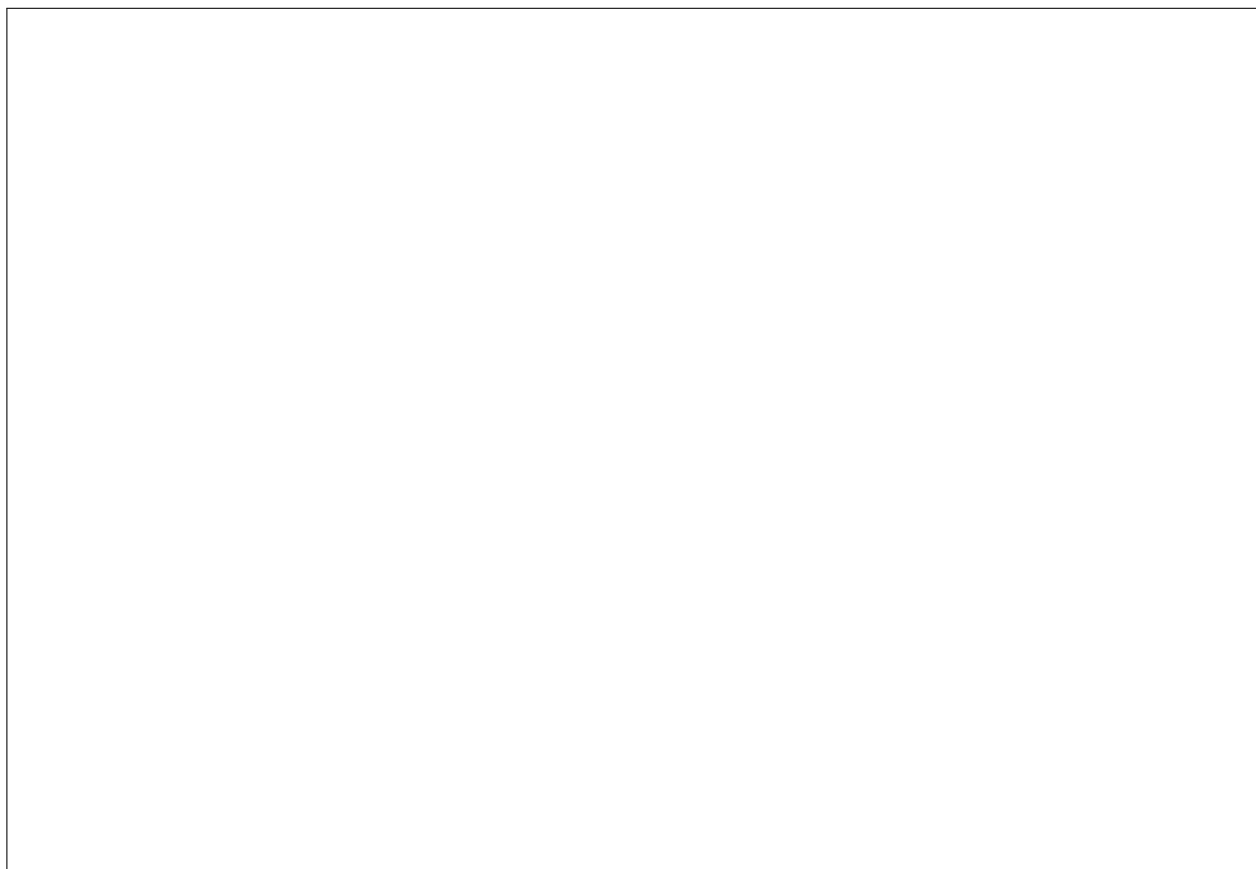
DEMONSTRAÇÃO.



(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais, a, c reais com $c \neq 0$, e tais que $(a_n)_n \rightarrow a$. Logo $(ca_n)_n \rightarrow ca$.

DEMONSTRAÇÃO.



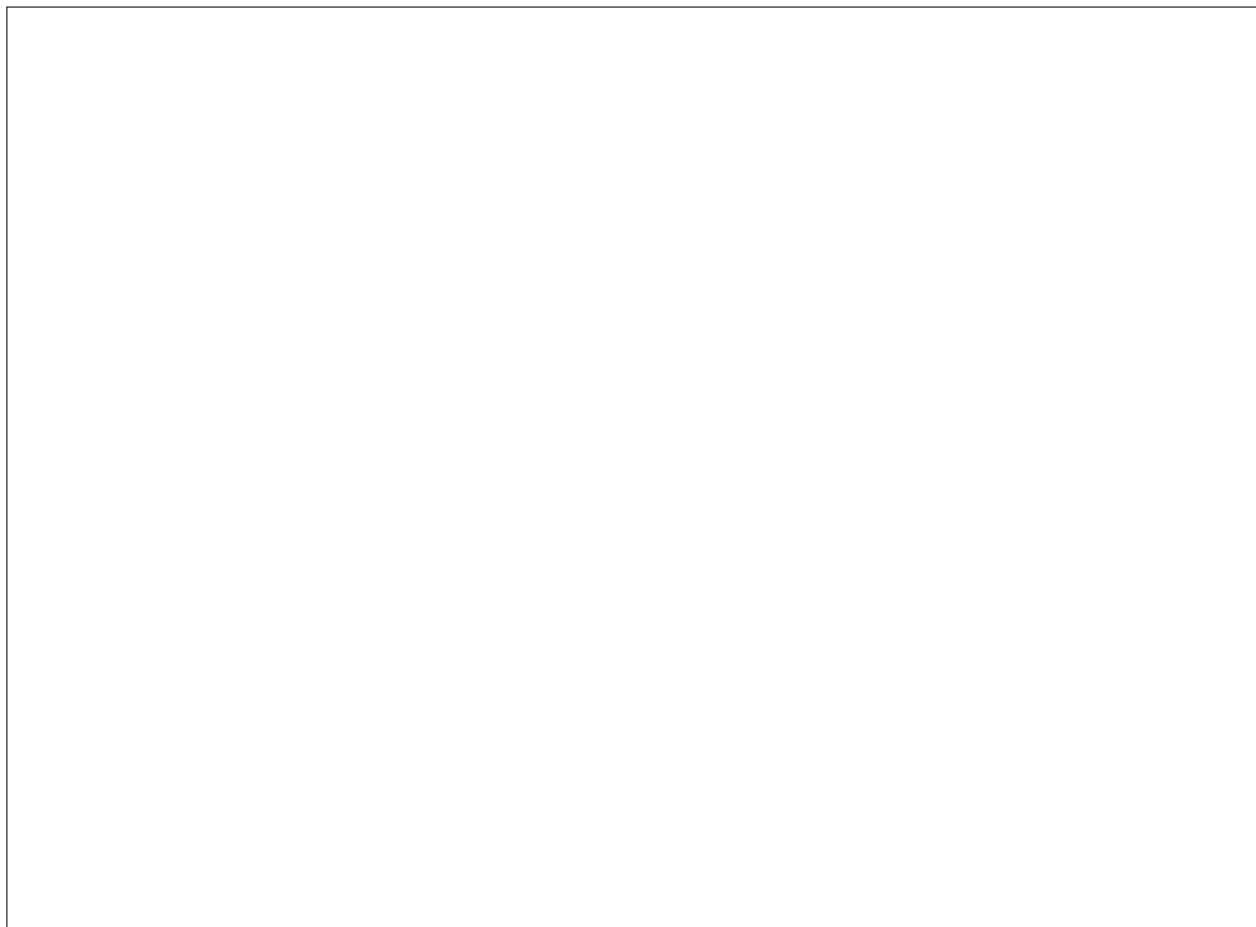
(21) C

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *autoconvergente* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ autoconvergente} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall i, j \geq N) [d(x_i, x_j) < \varepsilon].$$

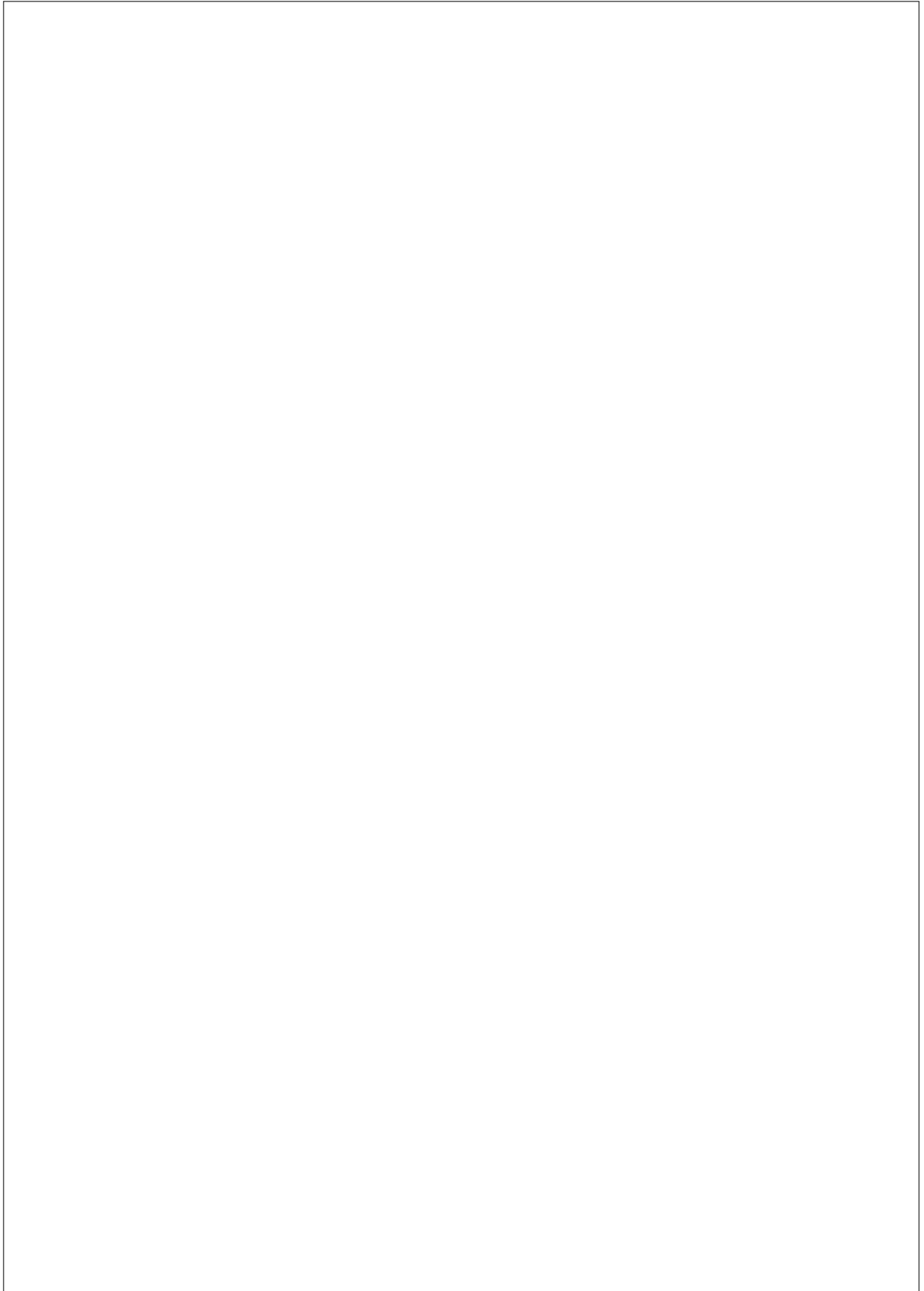
Proposição. Toda seqüência de reais autoconvergente é cotada.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.



Só isso mesmo.

LEMMATA



RASCUNHO