FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 42; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-12-07

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x,\mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. **Escolha até 2 dos A, S, L, M, C.**[3]

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.
Nos problemas **S**, **L**, **M**, **C** podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte de IDMb.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a,b,c)[\,a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\,0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\,(-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a,b)[\,a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a,b,c)[\,a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\,a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a \neq 0)(\exists a')\,[\,a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a,b)[\,a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d,a,b)[\,(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a,b,c)[\,a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a,b)[\,\text{e.u.d.: } a > b;\ a = b;\ b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a,b,c)[\,a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a,b,c)[\,a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,] \tag{RO-M}$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja x real. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x + x(-1) &= x1 + x(-1) && \text{((RM-Id))}\\
&= x(1 + (-1)) && \text{((R-Dist))}\\
&= x0 && \text{((RA-Inv))}\\
&= 0. && \text{((R-AnnR))}
\end{aligned}$$

Como $x + (-x) = 0$ (pela (RA-Inv)), logo $-x = x(-1)$ pela (R-ResR).

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.
DEFINIÇÃO.

Sejam A conjunto de reais e s um real. Dizemos que s é um *supremum* de A sse $s \geq A$ e para qualquer $u \geq A$, temos $s \leq u$.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.
ENUNCIADO.

Seja A conjunto de reais, e sejam s, s' suprema de A. Logo $s = s'$.

DEMONSTRAÇÃO.

Temos $s = \sup A$, ou seja, $s \geq A$ e $(\forall u \geq A)\,[\, s \leq u \,]^{(1)}$.
Temos $s' = \sup A$, ou seja, $s' \geq A$ e $(\forall u \geq A)\,[\, s' \leq u \,]^{(2)}$.
Como $s \geq A$, logo $s' \leq s$ (pela (2)).
Como $s' \geq A$, logo $s \leq s'$ (pela (1)).
Logo $s = s'$ (antissimetria da $(\leq)$).

(18) **L**

Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ eventualmente constante.
Logo seja N tal que $(\exists c)\,(\forall n \geq N)\,[\,a_n = c\,]$.
Logo seja c tal que $(\forall n \geq N)\,[\,a_n = c\,]$.
Vou demonstrar que $(a_n)_n \to c$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Asserção: $(\forall n \geq N)\,[\,d(a_n, c) < \varepsilon\,]$.
Seja $n \geq N$.
Temos $d(a_n, c) = d(c, c) = 0 < \varepsilon$.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais, a, c reais com $c \neq 0$, e tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\varepsilon > 0$.
Como $(a_n)_n \to a$, logo seja N tal que

$$(\forall n \geq N)\,[\,d(a_n, a) < \varepsilon/|c|\,]\,.$$

Asserção: $(\forall n \geq N)\,[\,d(ca_n, ca) < \varepsilon\,]$.
Seja $n \geq N$. Logo $d(a_n, a) < \varepsilon/|c|$ (pela escolha de N).
Calculamos:

$$\begin{aligned} d(ca_n, ca) &= |ca_n - ca| \\ &= |c(a_n - a)| \\ &= |c||a_n - a| \\ &= |c| d(a_n, a) \\ &< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(21) **C**

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *autoconvergente* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ autoconvergente } \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)\,(\forall i, j \geq N)\,[\,d(x_i, x_j) < \varepsilon\,]\,.$$

Proposição. Toda seqüência de reais autoconvergente é cotada.
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ autoconvergente.

Logo seja N tal que a partir de N, todos os a_n's ficam 1-perto entre si.
Ou seja: $(\forall i, j \geq N)\,[\,d(a_i, a_j) < 1\,]$.
Vou achar uma cota M_1 para os $\{a_n\}_{n<N}$ e uma cota M_2 para os $\{a_n\}_{n \geq N}$.
Assim a seqüência inteira é cotada pelo $\max\{M_1, M_2\}$.
Seja $M_1 = \max\{|a_n|\}_{n<N}$, definido pois $\{|a_n|\}_{n<N}$ é um conjunto habitado e finito.
Bastra mostrar que para qualquer $n \geq N$, $a_n \leq |a_N| + 1$.
Temos

$$|a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N| = d(a_n, a_N) < 1.$$

Logo $|a_n| < |a_N| + 1$.

Qual o erro aqui e como corrigi-lo "movendo apenas umas linhas"?

Só isso mesmo.

R-AnnR.
$(\forall a)\,[\,a0 = 0\,]$.

Demonstração.
Seja a real.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
0 &= a0 + (-(a0)) && \text{(RA-Inv)}\\
&= a(0+0) + (-(a0)) && \text{(RA-Id)}\\
&= (a0 + a0) + (-(a0)) && \text{(R-Dist)}\\
&= a0 + (a0 + (-(a0))) && \text{(RA-Ass)}\\
&= a0 + 0 && \text{(RA-Inv)}\\
&= a0. && \text{(RA-Id)}
\end{aligned}$$

R-ResR.
$(\forall a, b)\,(\exists! x)[\,a + x = b\,]$.

Demonstração.
Sejam a, b reais.
Existência. Verificamos que $(-a) + b$ satisfaz a equação desejada:

$$\begin{aligned}
a + ((-a) + b) &= (a + (-a)) + b && \text{(RA-Ass)}\\
&= 0 + b && \text{(RA-Inv)}\\
&= b && \text{(RA-Id)}
\end{aligned}$$

Unicidade. Seja x tal que $a + x = b$. (1)
Basta verificar que $x = (-a) + b$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
(-a) + b &= (-a) + (a + x) && \text{(pela escolha de } x\text{)}\\
&= ((-a) + a) + x && \text{(RA-Ass)}\\
&= 0 + x && \text{(RA-Inv)}\\
&= x && \text{(RA-Id)}
\end{aligned}$$