FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.2
(points: 76; bonus: $0^\flat$; time: 84')

Nome:

2022-07-22

Regras:

- **I.** Não vires esta página antes do começo da prova.
- **II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.
- **III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]
- **IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- **V.** $(\forall x)\,[\,\text{Colar}(x) \implies \neg\text{Passar}(x, \text{FMC1})\,]$.[2]
- **VI.** Responda dentro das caixas indicadas.
- **VII.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- **VIII.** **Escolhe até 1 dos $\mathbf{R}, \mathbf{S}$.**[3]

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\, a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\, 0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\, (-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\, a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\, a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a \neq 0)\,\big(\exists a'\big)\big[\, a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,\big] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\, a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\, (a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \ \ \&\ \ d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\, a > b \ \ \&\ \ b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\, \text{e.u.d.: } a > b;\ a = b;\ b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\, a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\, a > b \ \ \&\ \ c > 0 \implies ac > bc\,] \tag{RO-M}$$

$$(\forall A : \mathsf{Set\ Real})[\, A \text{ habitado } \ \&\ \ A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}\,]. \tag{R-Compl}$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **R**

(12) **R1.** Sejam a, b reais. Existe único x tal que $a + x = b$ e único x tal que $x + a = b$.
Demonstração.

(12) **R2.** $(\forall a, b)\,[\, ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0\,]$.
Demonstração.

(76) **S**

Demonstre **dois** dos teoremas **S1**, **S2**, **S3**.
Podes usar os teoremas que demonstramos sobre os reais na primeira parte da unidade.

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.

(18) **S1.** Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO.

(30) **S2.** $(a_n)_n \to a \;\&\; (b_n)_n \to b \implies (a_n + b_n)_n \to a + b$.

DEMONSTRAÇÃO.

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *Cauchy* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ Cauchy} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall i, j \geq N)\,[\, d(x_i, x_j) < \varepsilon \,]\,.$$

(46) **S3.** $(a_n)_n$ convergente $\implies$ $(a_n)_n$ Cauchy.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

Rascunho