FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.2
(points: 76; bonus: $0^\flat$; time: 84')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-07-22

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. **Escolhe até 1 dos R, S.**[3]

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\,a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\,0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\,(-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\,a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\,a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a \neq 0)\,(\exists a')\,[\,a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\,a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\,(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\,\text{e.u.d.: } a > b;\ a = b;\ b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,] \tag{RO-M}$$

$$(\forall A : \mathsf{Set\ Real})[\,A \text{ habitado } \;\&\; A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}\,]. \tag{R-Compl}$$

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **R**

(12) **R1.** Sejam a, b reais. Existe único x tal que $a + x = b$ e único x tal que $x + a = b$.
DEMONSTRAÇÃO.

Existência.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
a + ((-a) + b) &= (a + (-a)) + b && \text{(RA-Ass)}\\
&= 0 + b && \text{(RA-Inv)}\\
&= b. && \text{(RA-Id)}
\end{aligned}
$$

Unicidade.
Seja r real tal que $a + r = b$.
Logo $(-a) + (a + r) = (-a) + b$. $(((-a) + \ )$ nos dois lados, pela esquerda.)
Logo $((-a) + a) + r = (-a) + b$. (RA-Ass)
Logo $0 + r = (-a) + b$. (RA-Inv)
Logo $r = (-a) + b$. (RA-Id)

A outra parte segue pela (RA-Com), pois $a + x = x + a$ e logo

$$a + x = b \iff x + a = b.$$

(12) **R2.** $(\forall a, b)\,[\,ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0\,]$.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam a, b reais tais que $ab = 0$.
Separo em casos (RO-Tri) Caso $a = 0$:
Trivial. Caso $a \neq 0$:
Logo seja a' um $(\cdot)$-inverso de a.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
b &= 1b && \text{(RA-Id)}\\
&= (a'a)b && \text{(pela escolha de } a'\text{)}\\
&= a'(ab) && \text{(RA-Ass)}\\
&= a'0 && \text{(pela escolha dos } a, b\text{)}\\
&= 0. && \text{(RA-AnnR)}
\end{aligned}
$$

(76) **S**

Demonstre **dois** dos teoremas **S1**, **S2**, **S3**.
Podes usar os teoremas que demonstramos sobre os reais na primeira parte da unidade.

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais.

(18) **S1.** Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ eventualmente constante.
Logo seja N tal que $(\exists c)\,(\forall n \geq N)\,[\,a_n = c\,]$.
Vou demonstrar que $(a_n)_n \to c$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Asserção: $(\forall n \geq N)\,[\,d(a_n, c) < \varepsilon\,]$.
Seja $n \geq N$.
Temos $d(a_n, c) = d(c, c) = 0 < \varepsilon$.

(30) **S2.** $(a_n)_n \to a \;\&\; (b_n)_n \to b \implies (a_n + b_n)_n \to a + b$.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n \to a$ (1) e $(b_n)_n \to b$ (2).
Vou demonstrar $(a_n + b_n)_n \to a + b$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Pelas (1) e (2), sejam N_a e N_b tais que

$$(\forall n \geq N_a)\,[\,d(a_n, a) < \varepsilon/2\,] \qquad \& \qquad (\forall n \geq N_b)\,[\,d(b_n, b) < \varepsilon/2\,]\,.$$

Seja $N = \max(N_a, N_b)$.
Asserção: $(\forall n \geq N)\,[\,d(a_n + b_n, a + b) < \varepsilon\,]$.
Seja $n \geq N$, e logo $n \geq N_a$ e $n \geq N_b$ (pela escolha de N).
Logo $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ e $d(b_n, b) < \varepsilon/2$ (pelas escolhas de N_a e N_b).
Calculamos:

$$\begin{aligned}
d(a_n + b_n, a + b) &= |(a_n + b_n) - (a + b)| \\
&= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&= d(a_n, a) + d(b_n, b) \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *Cauchy* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ Cauchy} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall i, j \geq N)\,[\,d(x_i, x_j) < \varepsilon\,]\,.$$

(46) **S3.** $(a_n)_n$ convergente $\implies$ $(a_n)_n$ Cauchy.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(a_n)_n$ convergente.
Logo seja a tal que $(a_n)_n \to a$.
Vou demonstrar que $(a_n)_n$ é Cauchy.
Seja $\varepsilon > 0$.
Pela escolha de a, seja N tal que $(\forall n \geq N)\,[\,d(a_n, a) < \varepsilon/2\,]$.
Asserção: $(\forall i, j \geq N)\,[\,d(a_i, a_j) < \varepsilon\,]$.
Sejam $i, j \geq N$, e logo $d(a_i, a) < \varepsilon/2$ e $d(a_j, a) < \varepsilon/2$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} d(a_i, a_j) &\leq d(a_i, a) + d(a, a_j) && \text{(des. triangular)} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Só isso mesmo.

Lemma (R-AnnR). $(\forall a)\,[\,a0 = 0\,]$.
Seja a real.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
0 &= a0 + (-(a0)) && \text{(RA-Inv)}\\
&= a(0+0) + (-(a0)) && \text{(RA-Id)}\\
&= (a0 + a0) + (-(a0)) && \text{(R-Dist)}\\
&= a0 + (a0 + (-(a0))) && \text{(RA-Ass)}\\
&= a0 + 0 && \text{(RA-Inv)}\\
&= a0. && \text{(RA-Id)}
\end{aligned}
$$