FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 32')

Nome:

2022-07-13

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Esclarecimento:

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) inteiros e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\,a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\,0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\,(-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\,a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\,a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a)\big[\,a \neq 0 \implies \big(\exists a'\big)\,\big[\,a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,\big]\,\big] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\,a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\,(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\,\text{e.u.d.: } a > b;\ a = b;\ b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,]. \tag{RO-M}$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(18) **A**

Demonstre **até um** dos teoremas **A1**, **A2**, **A3**.

(8) **A1.** Sejam a, b reais. Existe único x tal que $a + x = b$ e único x tal que $x + a = b$.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **A2.** $(\forall a, b)\,[\, ab = 0 \implies a = 0 \ \text{ ou } \ b = 0\,]$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **A3.** Seja $(a_n)_n$ a seqüência definida pelas

$$a_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$$
$$a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (1/2)a_n + 1.$$

Demonstre que $(a_n)_n$ é (i) limitada superiormente; (ii) estritamente crescente.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **B**

Defina uma seqüência de intervalos abertos $(G_n)_n$ cuja interseção é um intervalo fechado F. Escreva qual é mesmo o intervalo $F = \bigcap_n G_n$, sem demonstrar tal igualdade.
DEFINIÇÕES.

Só isso mesmo.

Rascunho