

---

Nome:

---

2022-07-13

**Regras:**

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- V.  $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$ .<sup>2</sup>
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

**Esclarecimento:**

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem “mid-level” que temos elaborado.

Usamos **Real** para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) inteiros e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$0, 1 : \text{Real}$      $(+), (\cdot) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Real}$      $(-): \text{Real} \rightarrow \text{Real}$      $(>) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Prop.}$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[a + (b + c) = (a + b) + c] \quad (\text{RA-Ass})$$

$$(\forall a)[0 + a = a = a + 0] \quad (\text{RA-Id})$$

$$(\forall a)[(-a) + a = 0 = a + (-a)] \quad (\text{RA-Inv})$$

$$(\forall a, b)[a + b = b + a] \quad (\text{RA-Com})$$

$$(\forall a, b, c)[a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c] \quad (\text{RM-Ass})$$

$$(\forall a)[a \cdot 1 = a] \quad (\text{RM-Id})$$

$$(\forall a)[a \neq 0 \implies (\exists a') [a' \cdot a = 1 = a \cdot a']] \quad (\text{RM-Inv}^*)$$

$$(\forall a, b)[a \cdot b = b \cdot a] \quad (\text{RM-Com})$$

$$0 \neq 1 \quad (\text{R-NTriv})$$

$$(\forall d, a, b)[(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \ \& \ d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)] \quad (\text{R-Dist})$$

$$(\forall a, b, c)[a > b \ \& \ b > c \implies a > c] \quad (\text{RO-Trans})$$

$$(\forall a, b)[\text{e.u.d.: } a > b; a = b; b > a] \quad (\text{RO-Tri})$$

$$(\forall a, b, c)[a > b \implies a + c > b + c] \quad (\text{RO-A})$$

$$(\forall a, b, c)[a > b \ \& \ c > 0 \implies ac > bc]. \quad (\text{RO-M})$$

*Boas provas!*

---

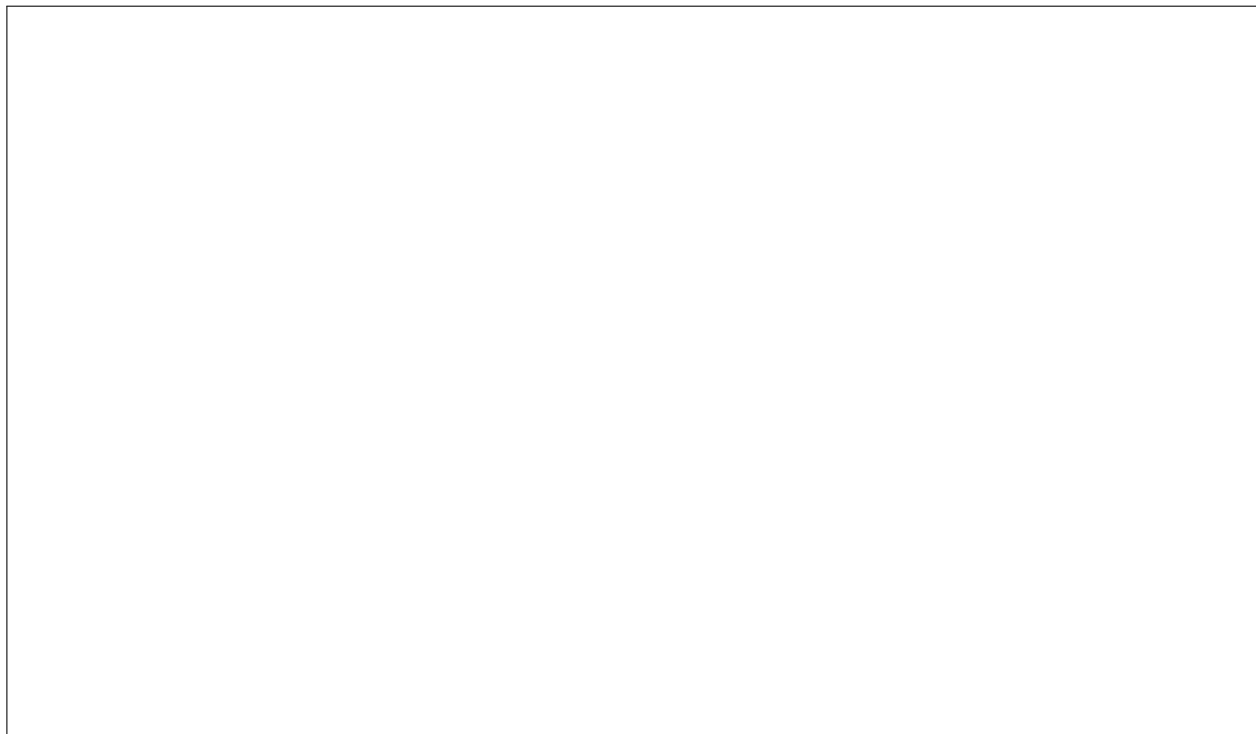
<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

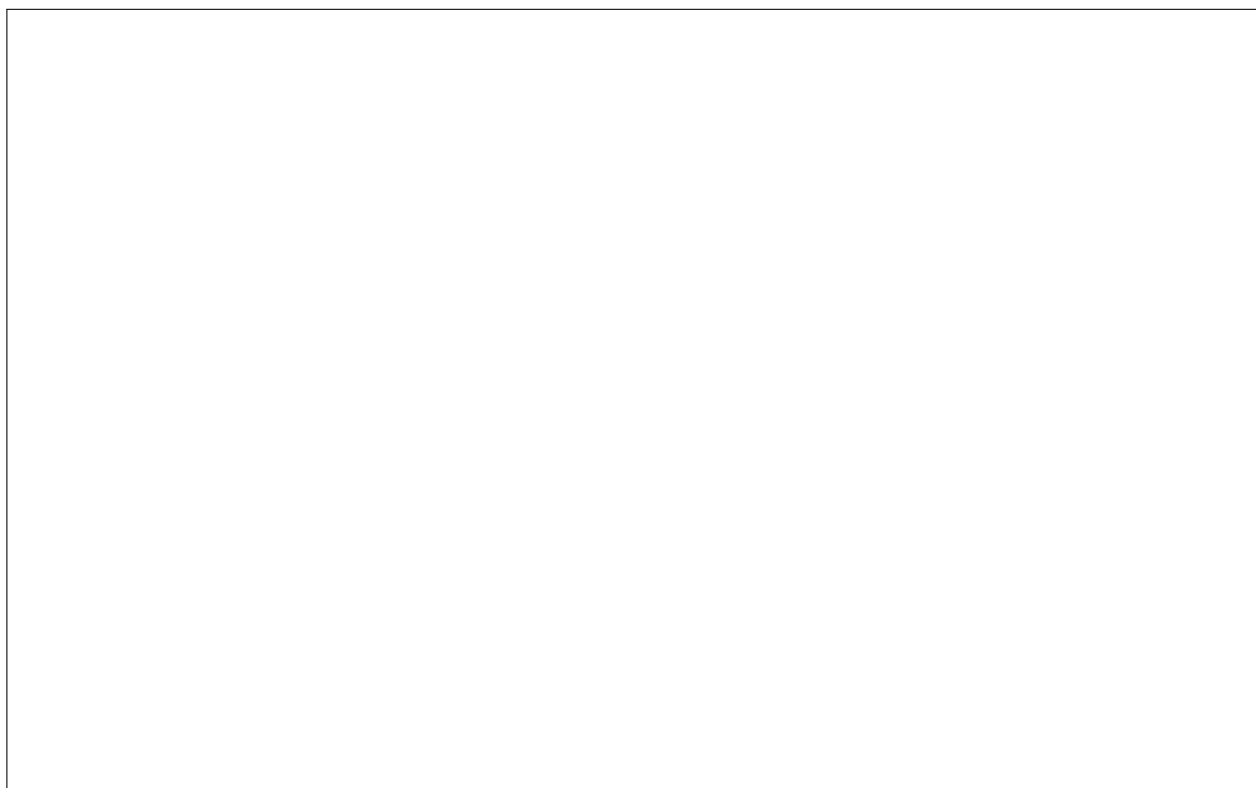
(18) **A**

Demonstre **até um** dos teoremas **A1**, **A2**, **A3**.

(8) **A1.** Sejam  $a, b$  reais. Existe único  $x$  tal que  $a + x = b$  e único  $x$  tal que  $x + a = b$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(12) **A2.**  $(\forall a, b) [ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0]$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(18) **A3.** Seja  $(a_n)_n$  a seqüência definida pelas

$$a_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$$
$$a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (1/2)a_n + 1.$$

Demonstre que  $(a_n)_n$  é (i) limitada superiormente; (ii) estritamente crescente.

DEMONSTRAÇÃO.

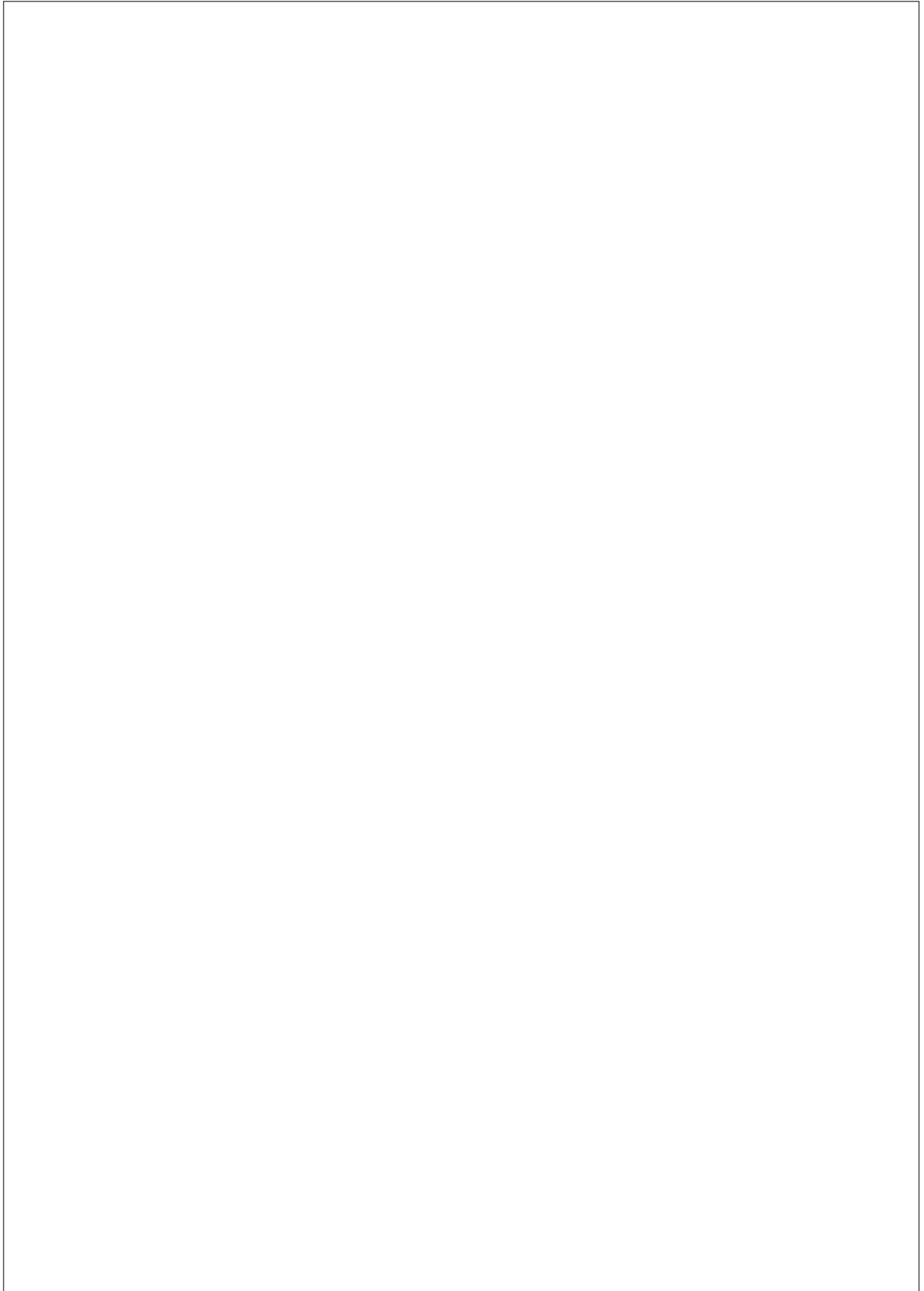
(6) **B**

Defina uma seqüência de intervalos abertos  $(G_n)_n$  cuja interseção é um intervalo fechado  $F$ . Escreva qual é mesmo o intervalo  $F = \bigcap_n G_n$ , sem demonstrar tal igualdade.

DEFINIÇÕES.

Só isso mesmo.

## LEMMATA



## RASCUNHO