FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 32')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-07-13

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Esclarecimento:

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) inteiros e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\,a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\,0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\,(-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\,a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\,a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a)\,[\,a \neq 0 \implies (\exists a')\,[\,a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,]\,] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\,a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\,(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\,\text{e.u.d.: } a > b;\; a = b;\; b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,]. \tag{RO-M}$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(18) **A**

Demonstre **até um** dos teoremas **A1**, **A2**, **A3**.

(8) **A1.** Sejam a, b reais. Existe único x tal que $a + x = b$ e único x tal que $x + a = b$.
Demonstração.

Existência.
Calculamos:

$$\begin{aligned} a + ((-a) + b) &= (a + (-a)) + b && \text{(RA-Ass)} \\ &= 0 + b && \text{(RA-Inv)} \\ &= b. && \text{(RA-Id)} \end{aligned}$$

Unicidade.
Seja r real tal que $a + r = b$.
Logo $(-a) + (a + r) = (-a) + b$. $(((-a) + \ )$ nos dois lados, pela esquerda.)
Logo $((-a) + a) + r = (-a) + b$. (RA-Ass)
Logo $0 + r = (-a) + b$. (RA-Inv)
Logo $r = (-a) + b$. (RA-Id)

A outra parte segue pela (RA-Com), pois $a + x = x + a$ e logo

$$a + x = b \iff x + a = b.$$

(12) **A2.** $(\forall a, b)\,[\,ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0\,]$.
Demonstração.

Sejam a, b reais tais que $ab = 0$.
Separo em casos (RO-Tri) Caso $a = 0$:
Trivial. Caso $a \neq 0$:
Logo seja a' um $(\cdot)$-inverso de a.
Calculamos:

$$\begin{aligned} b &= 1b && \text{(RA-Id)} \\ &= (a'a)b && \text{(pela escolha de } a'\text{)} \\ &= a'(ab) && \text{(RA-Ass)} \\ &= a'0 && \text{(pela escolha dos } a, b\text{)} \\ &= 0. && \text{(RA-AnnR)} \end{aligned}$$

(18) **A3.** Seja $(a_n)_n$ a seqüência definida pelas

$$a_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$$
$$a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (1/2)a_n + 1.$$

Demonstre que $(a_n)_n$ é (i) limitada superiormente; (ii) estritamente crescente.
DEMONSTRAÇÃO.

(i) Vou demonstrar por indução que 2 é uma cota superior da $(a_n)_n$.
Base. $a_0 = 0 < 2$, pelo (R-Pos2).
Passo indutivo.
Seja k tal que $a_k < 2$.
Calculamos:

$$a_{k+1} = a_k/2 + 1 < 2/2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

onde a primeira $(<)$ e justificada pela HI e o lemma seguinte:

$$(\forall a, x, y)\,[\, a > 0 \;\;\&\;\; x < y \implies ax + 1 < ay + 1\,]\,.$$

Demonstração do Lemma.
Sejam a, x, y reais tais que $a > 0$ e $x < y$.
Logo $ax < ay$ pela (RO-M).
Logo $ax + 1 < ay + 1$ pela (RO-A).

(ii) Por indução.
Base. $a_0 = 0 < 1 = 0 + 1 = (1/2)0 + 1 = a_1$.
Passo indutivo.
Seja k tal que $a_k < a_{k+1}$.
Calculamos:

$$a_{k+1} = a_k/2 + 1 < a_{k+1}/2 + 1 = a_{k+2}$$

onde a $(<)$ e justificada como no (i).

(6) **B**

Defina uma seqüência de intervalos abertos $(G_n)_n$ cuja interseção é um intervalo fechado F. Escreva qual é mesmo o intervalo $F = \bigcap_n G_n$, sem demonstrar tal igualdade.
DEFINIÇÕES.

Defino para $n \geq 1$ os intervalos $G_n = (-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$.
Temos $\bigcap_n G_n = [-1, 1]$.

Só isso mesmo.

Lemma (R-AnnR). $(\forall a)\,[\,a0 = 0\,]$.
Seja a real.
Calculamos:

$$\begin{aligned} 0 &= a0 + (-(a0)) && \text{(RA-Inv)} \\ &= a(0+0) + (-(a0)) && \text{(RA-Id)} \\ &= (a0 + a0) + (-(a0)) && \text{(R-Dist)} \\ &= a0 + (a0 + (-(a0))) && \text{(RA-Ass)} \\ &= a0 + 0 && \text{(RA-Inv)} \\ &= a0. && \text{(RA-Id)} \end{aligned}$$

Lemma (R-PosSq). $(\forall a \neq 0)\,[\,aa > 0\,]$.
Seja real $a \neq 0$.
Caso $a > 0$.
Logo temos $aa > a0 = 0$ pelas (RO-M) e (R-Ann).
Caso $a < 0$.
Logo $(-a) + a < (-a) + 0$ pela (RO-A).
Logo $0 < -a$ (1) pelas (RA-Inv) e (RA-Id).
Calculamos (usando a comutatividade e a associatividade sem mencionar):

$$\begin{aligned} aa &= 1aa && \text{(RM-Id)} \\ &= (-(-1))aa && \text{(R-AInv-AInv)} \\ &= (-1)(-1)aa && \text{(R-AInv-MId)} \\ &= (-1)a(-1)a && \\ &= (-a)(-a) && \text{(R-AInv-MId)} \\ &> (-a)0 && \text{(RO-M, pois (1))} \\ &= 0. && \text{(R-Ann)} \end{aligned}$$

Lemma (R-AInv-MId). $(\forall a)\,[\,(-1)a = -a\,]$.
Calculamos:

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

(pelas (RM-Id), (R-Dist), (RA-Inv), (R-Ann), respectivamente).
Logo $(-1)a = -a$ pela **A1**.

Lemma (R-AInv-AInv). $(\forall a)\,[\,-(-a) = a\,]$.
Pela **A1**, basta verificar que $(-a) + a = 0$, pois $(-a) + (-(-a)) = 0$ (RA-Inv).
Imediato pelo (RA-Inv).

Lemma (R-Pos1). $1 > 0$.
Como $1 = 1 \cdot 1$, logo $1 > 0$ pelo (R-PosSq).

Lemma (R-Pos2). $2 > 0$.
Como $1 > 0$, logo $1+1 > 0+0$ pelo (RO-A), ou seja $2 > 0$.

Lemma (R-MInv-Pos). $(\forall a > 0)\,[\,a^{-1} > 0\,]$.
Seja a real tal que $a > 0$.
Temos $aa^{-1} = 1 > 0$ (1), pelas (RM-Inv) e (R-Pos1).
Caso $a^{-1} = 0$: contradição graças aos (R-Ann) e (R-NTriv).
Caso $a^{-1} < 0$: logo $aa^{-1} < a0 = 0$ pelas (RO-M) e (R-Ann), contradizendo a (1), graças à (RO-Tri).