FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.3
(points: 58; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-06-27

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. Escolhe até 2 dos $\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$.[3]

Definimos os tipos de dados:

$$\begin{array}{lll}
\texttt{data}\ \mathsf{Nat}\ \texttt{where} & \texttt{data}\ \mathsf{List}\ \alpha\ \texttt{where} & \texttt{data}\ \mathsf{Tree}\ \alpha\ \beta\ \texttt{where} \\
\quad \mathsf{O} : \mathsf{Nat} & \quad \mathsf{Empty} : \mathsf{List}\ \alpha & \quad \mathsf{Leaf} : \alpha \to \mathsf{Tree}\ \alpha\ \beta \\
\quad \mathsf{S} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} & \quad \mathsf{Cons} : \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha & \quad \mathsf{Node} : \beta \to \mathsf{List}\ (\mathsf{Tree}\ \alpha\ \beta) \to \mathsf{Tree}\ \alpha\ \beta
\end{array}$$

Usamos o açúcar sintáctico (:) para o Cons, ao qual atribuimos associatividade (sintáctica) direita; também usamos [] para o Empty.

Definimos as operações

$$\begin{array}{ccc}
(+) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} & (\cdot) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} & ({}^\wedge) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \\
n + 0 = n & n \cdot 0 = 0 & n \mathbin{^\wedge} 0 = S0 \\
n + Sm = S(n + m) & n \cdot Sm = n + n \cdot m & n \mathbin{^\wedge} Sm = n \cdot n \mathbin{^\wedge} m
\end{array}$$

e atribuimos em ambas associatividade (sintáctica) esquerda. Atribuímos também precedência (sintáctica) de alta para baixa nesta ordem: $({}^\wedge)$, $(\cdot)$, $(+)$.

Como referir às equações. Para referir à n-ésima equação duma definição recursiva duma função f, use o rótulo «$(f.n)$». Por exemplo, a segunda equação da $(+)$, refere por «$(+).2$».
Esclarecimento. Suas demonstrações/refutações precisam ser escritas em português matemático (linguagem "mid-level" que temos elaborado nas aulas).

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(16) **J**

Defina recursivamente as funções:

$$\begin{aligned}
\texttt{length} &: \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{Nat} \\
(+\!\!+) &: \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \\
\texttt{replicate} &: \mathsf{Nat} \to \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \\
\texttt{insertAt} &: \mathsf{Nat} \to \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha
\end{aligned}$$

levando em consideração os exemplos de uso no quadro.
Podes usar as abreviações: `len`, `rep`, `ins`.
DEFINIÇÕES.

$\texttt{len} : \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{Nat}$

$\texttt{len}\ [\,] = \mathsf{O}$

$\texttt{len}\ (x : xs) = \mathsf{S}\ (\texttt{len}\ xs)$

$(+\!\!+) : \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha$

$[\,] +\!\!+ ys = ys$

$(x : xs) +\!\!+ ys = x : (xs +\!\!+ ys)$

$\texttt{rep} : \mathsf{Nat} \to \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha$

$\texttt{rep}\ \mathsf{O}\ x = [\,]$

$\texttt{rep}\ (\mathsf{S}n)\ x = x : \texttt{rep}\ n\ x$

$\texttt{ins} : \mathsf{Nat} \to \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha \to \mathsf{List}\ \alpha$

$\texttt{ins}\ \mathsf{O}\ t\ xs = t : xs$

$\texttt{ins}\ n\ t\ [\,] = [\,]$

$\texttt{ins}\ (\mathsf{S}n)\ t\ (x : xs) = x : \texttt{ins}\ n\ t\ xs$

(8) **K**

Demonstre:

$$(\forall a, x, y : \mathsf{Nat})\,[\, a \mathbin{\hat{}} (x + y) = a \mathbin{\hat{}} x \cdot a \mathbin{\hat{}} y \,]$$

Considere dadas as: associatividades e comutatividades de ambas as $(+), (\cdot)$, e a distributividade de $(\cdot)$ sobre $(+)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $a, x, y : \mathsf{Nat}$.
Por indução no y.
BASE: $(\forall a)\,(\forall x)\left[a^{x+\mathsf{O}} = a^x \cdot a^{\mathsf{O}} \right]$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} a^{x+\mathsf{O}} &= a^x && ((+).1) \\ &= a^x \cdot \mathsf{SO} && ((+)\text{-IdR}) \\ &= a^x \cdot a^{\mathsf{O}}. && ((\hat{}).1^{\leftarrow}) \end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^{x+k} = a^x \cdot a^k. \tag{H.I.}$$

Basta demonstrar que

$$a^{x+\mathsf{S}k} = a^x \cdot a^{\mathsf{S}k}.$$

Queremos demonstrar $a^{x+\mathsf{S}k} = a^x \cdot a^{\mathsf{S}k}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} a^{x+\mathsf{S}k} &= a^{\mathsf{S}(x+k)} && ((+).2) \\ &= a \cdot a^{x+k} && ((\hat{}).2) \\ &= a^{x+k} \cdot a && ((\cdot)\text{-com}) \\ &= (a^x \cdot a^k) \cdot a && (\text{H.I.}) \\ &= a^x \cdot (a^k \cdot a) && (\text{assoc. da } (\cdot)) \\ &= a^x \cdot a^{\mathsf{S}k}. && ((\hat{}).2^{\leftarrow}) \end{aligned}$$

(14) **L**

Demonstre:

$$(\forall xs : \mathsf{List}\ \alpha)\,(\forall ys : \mathsf{List}\ \alpha)\,[\,\texttt{length}\ (xs +\!\!+\ ys) = \texttt{length}\ xs + \texttt{length}\ ys\,]\,.$$

Demonstração.

Sejam $xs, ys : \mathsf{List}\ \alpha$.
Por indução no xs.
Base.

$$\begin{aligned}
\texttt{len}\ ([\,] +\!\!+\ ys) &= \texttt{len}\ ys && ((+\!\!+).1)\\
&= \texttt{len}\ ys + \mathsf{O} && ((+).1^{\leftarrow})\\
&= \mathsf{O} + \texttt{len}\ ys && ((+)\text{-com})\\
&= \texttt{len}\ [\,] + \texttt{len}\ ys. && (\texttt{len}.1)
\end{aligned}$$

Passo Indutivo.
Seja $xs : \mathsf{List}\ \alpha$ tal que $\texttt{len}\ (xs +\!\!+\ ys) = \texttt{len}\ xs + \texttt{len}\ ys$.
Preciso demonstrar que para todo $x : \alpha$,

$$\texttt{len}\ ((x : xs) +\!\!+\ ys) = \texttt{len}\ (x : xs) + \texttt{len}\ ys.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\texttt{len}\ ((x : xs) +\!\!+\ ys) &= \texttt{len}\ (x : (xs +\!\!+\ ys)) && ((+\!\!+).2)\\
&= \mathsf{S}\ (\texttt{len}\ (xs +\!\!+\ ys)) && (\texttt{len}.2)\\
&= \mathsf{S}\ (\texttt{len}\ xs + \texttt{len}\ ys) && (\text{H.I.})\\
&= \mathsf{S}\ (\texttt{len}\ xs) + \texttt{len}\ ys && ((+)\text{-Succ})\\
&= \texttt{len}\ (x : xs) + \texttt{len}\ ys && (\texttt{len}.2^{\leftarrow})
\end{aligned}$$

(14) **M**

Demonstre:

$$(\forall x : \alpha)\,(\forall f : \alpha \to \beta)\,(\forall n : \mathsf{Nat})\,[\,\texttt{replicate}\; n\; (f\; x) = \texttt{map}\; f\; (\texttt{replicate}\; n\; x)\,]$$

Demonstração.

Sejam $x : \alpha$, $f : \alpha \to \beta$, $n : \mathsf{Nat}$.
Por indução no n.
Base.

$$\begin{aligned} \texttt{rep}\; \mathsf{O}\; (f\; x) &= [\,] && (\texttt{rep}.1) \\ &= \texttt{map}\; f\; [\,] && (\texttt{map}.1) \\ &= \texttt{map}\; f\; (\texttt{rep}\; \mathsf{O}\; x) && (\texttt{rep}.1) \end{aligned}$$

Passo Indutivo.
Seja $n : \mathsf{Nat}$ tal que $\texttt{rep}\; n\; (f\; x) = \texttt{map}\; f\; (\texttt{rep}\; n\; x)$.

$$\begin{aligned} \texttt{rep}\; (\mathsf{S}n)\; (f\; x) &= (f\; x) : \texttt{rep}\; n\; (f\; x) && (\texttt{rep}.2) \\ &= (f\; x) : \texttt{map}\; f\; (\texttt{rep}\; n\; x) && (\text{H.I.}) \\ &= \texttt{map}\; f\; (x : \texttt{rep}\; n\; x) && (\texttt{map}.2) \end{aligned}$$

(28) **N**

Demonstre:

$$(\forall \ell : \mathsf{List}\ \alpha)\,(\forall u : \alpha)\,(\forall v : \alpha)\,(\forall n : \mathsf{Nat})\,[\,\texttt{ins}\ n\ u\ (\texttt{ins}\ n\ v\ \ell) = \texttt{ins}\ (\mathsf{S}\ n)\ v\ (\texttt{ins}\ n\ u\ \ell)\,]\,.$$

Demonstração.

Sejam $u, v : \alpha$.
Por indução no ℓ.
A Base já é o Lemma-Ins-Empty.
Passo Indutivo.
Seja $xs : \mathsf{List}\ \alpha$ tal que

$$(\forall n : \mathsf{Nat})\,[\,\texttt{ins}\ n\ u\ (\texttt{ins}\ n\ v\ xs) = \texttt{ins}\ (S\ n)\ v\ (\texttt{ins}\ n\ u\ xs)\,]\,. \tag{HI}$$

Vou demonstrar que

$$(\forall x : \alpha)\,(\forall n : \mathsf{Nat})\,[\,\texttt{ins}\ n\ u\ (\texttt{ins}\ n\ v\ (x : xs)) = \texttt{ins}\ (S\ n)\ v\ (\texttt{ins}\ n\ u\ (x : xs))\,]\,.$$

Sejam $x : \alpha$, $n : \mathsf{Nat}$.

Caso $n := \mathsf{O}$: segue pelo Lemma-Ins-Zero com $u, v := u, v$ e $\ell := x : xs$.

Caso $n := \mathsf{S}n'$ para algum $n' : \mathsf{Nat}$:

$$\begin{aligned}
\texttt{ins}\ (\mathsf{S}n')\ u\ (\texttt{ins}\ (\mathsf{S}n')\ v\ (x : xs)) &= \texttt{ins}\ (\mathsf{S}n')\ u\ (x : \texttt{ins}\ n'\ v\ xs) && (\texttt{ins}.3)\\
&= x : \texttt{ins}\ n'\ u\ (\texttt{ins}\ n'\ v\ xs) && (\texttt{ins}.3)\\
&= x : \texttt{ins}\ (\mathsf{S}n')\ v\ (\texttt{ins}\ n'\ u\ xs) && (\text{HI com } n := n')\\
&= \texttt{ins}\ (\mathsf{SS}n')\ v\ (x : \texttt{ins}\ n'\ u\ xs) && (\texttt{ins}.3)\\
&= \texttt{ins}\ (\mathsf{SS}n')\ v\ (\texttt{ins}\ (\mathsf{S}n')\ u\ (x : xs)). && (\texttt{ins}.3)
\end{aligned}$$

Teaser. Em FMC2, veremos uma maneira mais simples e menos burocrática de organizar essa mesma demonstação, em apenas os 3 cálculos necessários, que correspondem diretamente às 3 equações usadas na definição de `ins`.

Só isso mesmo.

Lemma-(+)-IdR.
$(\forall x : \mathsf{Nat})\,[\, x \cdot \mathsf{SO} = x \,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Seja $x : \mathsf{Nat}$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} x \cdot \mathsf{SO} &= x + x \cdot \mathsf{O} && ((\cdot).2)\\ &= x + \mathsf{O} && ((\cdot).1)\\ &= x && ((+).1) \end{aligned}$$

Lemma-(+)-Succ.
$(\forall x, y : \mathsf{Nat})\,[\, \mathsf{S}(x+y) = \mathsf{S}x + y \,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam $x, y : \mathsf{Nat}$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(x+y) &= \mathsf{S}(y+x) && ((+)\text{-com})\\ &= y + \mathsf{S}x && ((+).2^{\leftarrow})\\ &= \mathsf{S}x + y. && ((+)\text{-com}) \end{aligned}$$

Lemma-Ins-Zero.
$(\forall u, v : \alpha)\,(\forall \ell : \mathsf{List}\ \alpha)\,[\, \mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ u\ (\mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ v\ \ell) = \mathtt{ins}\ (\mathsf{S}\ \mathsf{O})\ v\ (\mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ u\ \ell) \,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam $u, v : \alpha$, $\ell : \mathsf{List}\ \alpha$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ u\ (\mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ v\ \ell) &= u : \mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ v\ \ell && (\mathtt{ins}.1)\\ \mathtt{ins}\ (\mathsf{SO})\ v\ (\mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ u\ \ell) &= \mathtt{ins}\ (\mathsf{SO})\ v\ (u : \ell) && (\mathtt{ins}.1)\\ &= u : \mathtt{ins}\ \mathsf{O}\ v\ \ell && (\mathtt{ins}.3) \end{aligned}$$

Lemma-Ins-Empty.
$(\forall u, v : \alpha)\,(\forall n : \mathsf{Nat})\,[\, \mathtt{ins}\ n\ u\ (\mathtt{ins}\ n\ v\ [\,]) = \mathtt{ins}\ (\mathsf{S}\ n)\ v\ (\mathtt{ins}\ n\ u\ [\,]) \,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam $u, v : \alpha$, $n : \mathsf{Nat}$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathtt{ins}\ n\ u\ (\mathtt{ins}\ n\ v\ [\,]) &= \mathtt{ins}\ n\ u\ [\,] && (\mathtt{ins}.2)\\ &= [\,] && (\mathtt{ins}.2)\\ \mathtt{ins}\ (\mathsf{S}n)\ v\ (\mathtt{ins}\ n\ u\ [\,]) &= \mathtt{ins}\ (\mathsf{S}n)\ v\ [\,] && (\mathtt{ins}.2)\\ &= [\,] && (\mathtt{ins}.2) \end{aligned}$$