# FMC1, 2021.2

Professor: Θάνος

## Problem Set 2

(points: 100 + $16^\flat$; deadline: 23/01/2022, 23h59)

Student: *Θάνος* **(gabarito)**

**Regras e esclarecimentos.**

(1) Podes citar como lemma (sem demonstrar) *apenas:* (i) teoremas que são *demonstrados* no fmcbook; (ii) teoremas que demonstramos na U1 no NNG.

(2) Nenhuma outra consulta ou colaboração é permitida.

(3) Todo o Problem Set está no mundo dos naturais; não dos inteiros! Isso tem uma conseqüência boa e uma ruim: (i) Podes citar como lemma gratuito (sem demonstrar) qualquer teorema que já demonstramos na U1 (incluindo os teoremas do NNG). (ii) Não podes usar operações e relações de inteiros. Por exemplo, não podes usar subtração: se na tua prova aparecer uma expressão que envolve subtração, seria um type error e tua demonstração sequer compilaria!

(4) O E1 precisa ser resolvido por indução, e o E2 por recursão.

(5) O E1 possui duas partes: existência (E1E) e unicidade (E1U). (i) Para a existência é obrigatório usar indução (em forma essencial). (ii) Para a unicidade não—mas a verdade é que aqui o uso de indução será provavelmente escondido nas demonstrações de lemmas citados-e-já-demonstrados e não explicitamente exposto no texto da tua demonstração.

(64 pts) **Problema E1.**
Demonstre *por indução* o teorema da divisão de Euclides para naturais: *para quaisquer naturais $a, b$ com $b \neq 0$, existem únicos naturais $q, r$ tais que: (i) $a = bq + r$; (ii) $r < b$.*

**Existência.**
Seja $b \neq 0$ e logo seja $b'$ o predecessor de $b$: $b = Sb'$. Por indução no $a$.
Base. Imediato pois $0 = b \cdot 0 + 0$ e $0 < b$. Ou seja, temos quociente 0 e resto 0.
Passo indutivo. Seja $a$ tal que

$$\text{(H.I.)} \qquad \text{existem } q, r \text{ tais que } a = bq + r \;\&\; r < b$$

e logo sejam $q_a, r_a$ tais naturais: $a = bq_a + r_a$ (1) & $r_a < b$ (2). Pela (1), temos $Sa = S(bq_a + r_a) = bq_a + Sr_a$ (3).
Pela (2), $r_a \leq b'$. Logo $r_a = b'$ ou $r_a < b'$. Separamos em casos:
Caso $r_a = b'$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
Sa &= bq_a + Sr_a && \text{(pela (3))} \\
&= bq_a + Sb' && \text{(hipótese do caso)} \\
&= bq_a + b && \text{(pela escolha do } b'\text{)} \\
&= bSq_a && \text{(pela (a2)}^{\leftarrow}\text{)} \\
&= bSq_a + 0.
\end{aligned}$$

Neste caso então, o quociente é o $Sq_a$ e o resto o 0.
Caso $r_a < b'$. Aqui temos $Sr_a < Sb' = b$ e logo a (3) já nos fornece os naturais que precisamos: o quociente é o $q_a$ e o resto o $Sr_a$. ∎

**Unicidade.**
Sejam $a, b, q_1, r_1, q_2, r_2$ com $b \neq 0$ tais que $bq_1 + r_1 = a = bq_2 + r_2$ (1) & $r_1, r_2 < b$. Já que $\leq$ é total, suponha sem perda de generalidade que $q_1 \leq q_2$. Logo seja $d$ tal que $q_1 + d = q_2$ (2). Calculamos:

$$\begin{aligned}
\cancel{bq_1} + r_1 &= bq_2 + r_2 && \text{(pela (1))} \\
&= b(q_1 + d) + r_2 && \text{(pela escolha de } d\text{)} \\
&= (bq_1 + bd) + r_2 \\
&= \cancel{bq_1} + (bd + r_2).
\end{aligned}$$

Cancelando os $bq_1$ temos

$$r_1 = bd + r_2. \quad (3)$$

Separamos em casos sobre o $d$:
Caso $d = 0$. Substituindo $d := 0$ nas (2) e (3) obtemos $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$ respectivamente.
Caso $d = Sd'$ para algum $d'$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
r_1 &= bd + r_2 \\
&= bSd' + r_2 && \text{(pela escolha de } d'\text{)} \\
&= (bd' + b) + r_2 \\
&= b + (bd' + r_2).
\end{aligned}$$

Logo $b \leq r_1$ e portanto este caso é impossível, já que $r_1 < b$. ∎

($16^\flat$ pts) **Problema E2.**
Define *recursivamente* as funções *rem* e *quot* nos naturais. Considere que seu segundo argumento necessariamente terá a forma $Sb$ para algum natural $b$. Exemplos de "input–output":

$$\begin{aligned} quot(18,3) &= 6 \qquad & quot(13,5) &= 2 \qquad & quot(7,12) &= 0 \\ rem(18,3) &= 0 & rem(13,5) &= 3 & rem(7,12) &= 7. \end{aligned}$$

**Resposta.**
A definição por recursão vem diretamente da demonstração por indução no **E1** onde estabelecemos a existência do quociente e do resto, *os construindo*. Optei para usar $Sb'$ para o segundo argumento das funções aqui pois assim a ligação com o **E1** fica mais aparente ainda.

Definimos:

$$\begin{aligned} quot(0,Sb') &= 0 & rem(0,Sb') &= 0 \\ quot(Sa,Sb') &= \begin{cases} Sq_a, & \text{se } r_a = b'; \\ q_a, & \text{se } r_a < b'; \end{cases} \qquad & rem(Sa,Sb') &= \begin{cases} 0, & \text{se } r_a = b'; \\ Sr_a, & \text{se } r_a < b'; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{onde:} \quad \begin{aligned} q_a &= quot(a,Sb') \\ r_a &= rem(a,Sb'). \end{aligned}$$

(36 pts) **Problema F.**
Definimos a seqüência dos números Fibonacci pelas

$$F_0 = 0 \qquad\qquad F_{S0} = 1 \qquad\qquad F_{SSn} = F_{Sn} + F_n.$$

Demonstre que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$F_{S(m+n)} = F_{Sm}F_{Sn} + F_mF_n.$$

**Demonstração.**
Por indução no $m$.
Base: $(\forall n \in \mathbb{N})\left[\, F_{S(0+n)} = F_{S0}F_{Sn} + F_0F_n \,\right]$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} F_{S0}F_{Sn} + F_0F_n &= 1 \cdot F_{Sn} + 0 \cdot F_n \\ &= F_{Sn} \\ &= F_{S(0+n)} \end{aligned}$$

Passo indutivo. Seja $w$ tal que

(H.I.) $$(\forall t \in \mathbb{N})\left[\, F_{S(w+t)} = F_{Sw}F_{St} + F_wF_t \,\right].$$

Vamos demonstrar que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[\, F_{S(Sw+n)} = F_{SSw}F_{Sn} + F_{Sw}F_n \,\right].$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} F_{SSw}F_{Sn} + F_{Sw}F_n &= (F_{Sw} + F_w)F_{Sn} + F_{Sw}F_n && \text{(def. de } F_{SSw}) \\ &= (F_{Sw}F_{Sn} + F_wF_{Sn}) + F_{Sw}F_n \\ &= F_{Sw}F_{Sn} + (F_wF_{Sn} + F_{Sw}F_n) \\ &= F_{Sw}F_{Sn} + (F_{Sw}F_n + F_wF_{Sn}) \\ &= (F_{Sw}F_{Sn} + F_{Sw}F_n) + F_wF_{Sn} \\ &= F_{Sw}(F_{Sn} + F_n) + F_wF_{Sn} \\ &= F_{Sw}F_{SSn} + F_wF_{Sn} && \text{(def. de } F_{SSn}) \\ &= F_{S(w+Sn)} && \text{(H.I. com } t := Sn) \\ &= F_{S(Sw+n)}. \end{aligned}$$

∎