FMC1, 2021.2

Professor: Θάνος

Problem Set 1

(points: 52; deadline: 15/12/2021, 23h59)

Regras.

(I) Escolha **até dois** problemas para resolver.
(II) Podes citar como lemma (sem demonstrar) *apenas* resultados que são *demonstrados* no fmcbook.
(III) Nenhuma outra consulta ou colaboração é permitida.

Definição.
Sejam a, b racionais. Dizemos que a *explode* b ($a \parallel b$) sse existe inteiro k tal que $a^k = b$.

Definição.
Sejam $+$ e $\cdot$ as operações definidas recursivamente pelas:

$$\begin{aligned} &(\text{a1}) \quad n + 0 = n && (\text{m1}) \quad n \cdot 0 = 0 \\ &(\text{a2}) \quad n + Sm = S(n+m) && (\text{m2}) \quad n \cdot Sm = (n \cdot m) + n. \end{aligned}$$

Definição.
Definimos as $\leq$ e $<$ nos naturais pelas

$$n \leq m \overset{\text{def}}{\iff} \text{existe natural } w \text{ tal que } n + w = m$$
$$n < m \overset{\text{def}}{\iff} \text{existe natural } w \text{ tal que } n + Sw = m.$$

(8 pts) **Problema 0.**
Demonstre ou refute: *para quaisquer $a, x, y \in \mathbb{Q}$, se $a \parallel x$ e $a \parallel y$, então para quaisquer inteiros u, v, $a \parallel x^u y^v$.*

(12 pts) **Problema 1.**
Demonstre ou refute: *para quaisquer naturais a, b, c, se $a \leq b$ e $b < c$ então $a < c$.*

(18 pts) **Problema 2.**
Demonstre as leis de cancelamento para a adição:

$$(\forall t, a, b \in \mathbb{N})[\, t + a = t + b \implies a = b \,]$$
$$(\forall t, a, b \in \mathbb{N})[\, a + t = b + t \implies a = b \,].$$

(26 pts) **Problema 3.**
Divulgando o LEM (princípio do terceiro excluído) tentei vender a idéia que seria essencial para demonstrar mais proposições do que realmente é! Com as definições de par e ímpar seguintes

$$n \text{ par} \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{N})[\, n = k + k \,]$$
$$n \text{ ímpar} \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{N})[\, n = S(k + k) \,]$$

e sem usar nenhum dos feitiços que discutimos (LEM, Reductio ad Absurdum, Lei da Dupla Negação, etc.) demonstre por indução a proposição: *todo número natural é par ou ímpar.*

(26 pts) **Problema 4.**
Demonstre a lei de cancelamento pela esquerda para a multiplicação: *para qualquer $t \in \mathbb{N}$ não nulo, e quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, se $ta = tb$ então $a = b$.*