

FMC1, 2020.2

Professor: Thanos

Problem Set 1.1

(points: 52; deadline: 19/03/2021, 23h59)

Das propriedades das operações de adição, multiplicação, e exponenciação, podes apenas considerar como dadas aquelas que já são demonstradas *como teoremas/lemmas* no fmcbook (ou seja: exercícios e problemas não pode, precisa demonstrar).

Problema 1.

Com as definições das operações do capítulo «Naturais; recursão; indução», definimos as relações seguintes nos Nats:

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists k)[x + k = y]$$

$$x < y \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists k)[x + Sk = y]$$

Escolhe **três** das proposições seguintes:

$$(\forall x, y)[x \leq y \implies x < y \text{ ou } x = y]$$

$$(\forall x, y)[x < y \implies x \leq y \ \& \ x \neq y]$$

$$(\forall x, y)[x \leq y \iff x < y \text{ ou } x = y]$$

$$(\forall x, y)[x < y \iff x \leq y \ \& \ x \neq y].$$

e para cada uma delas, demonstre ou refute.

Problema 2.

Com as definições de \leq e $<$ do Problema 1, escolhe **uma** das proposições seguintes para demonstrar, e **uma** para refutar:

$$(\forall a, x, y)[x \leq y \implies x^a \leq y^a]$$

$$(\forall b, x, y)[x \leq y \implies b^x \leq b^y]$$

$$(\forall a, x, y)[x < y \implies x^a < y^a]$$

$$(\forall b, x, y)[x < y \implies b^x < b^y].$$

Problema 3.

Divulgando o LEM (princípio do terceiro excluído) tentei vender a idéia que seria essencial para demonstrar mais proposições do que realmente é! Com as definições de par e ímpar seguintes

$$n \text{ par} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})[n = 2k]$$

$$n \text{ ímpar} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})[n = 2k + 1]$$

e sem usar nenhum dos feitiços que discutimos (LEM, Reductio ad Absurdum, Lei da Dupla Negação, etc.) demonstre por indução a proposição: *todo número natural é par ou ímpar.*