
Nome:

27/09/2019

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.³

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(21) **A**

Teorema. Seja S um conjunto de inteiros não vazio. Suponha que (i) S é +-fechado e (ii) S é --fechado. Logo $S = \{0\}$ ou existe inteiro $d > 0$ tal que S é o conjunto de todos os múltiplos de d : $S = \{md \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha que $S \neq \{0\}$. Basta demonstrar que existe inteiro $d > 0$ tal que

$$S = \{md \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Separe o resto da demonstração em três partes:

(7) **A1.** Mostre um certo d que vai ser o d desejado.

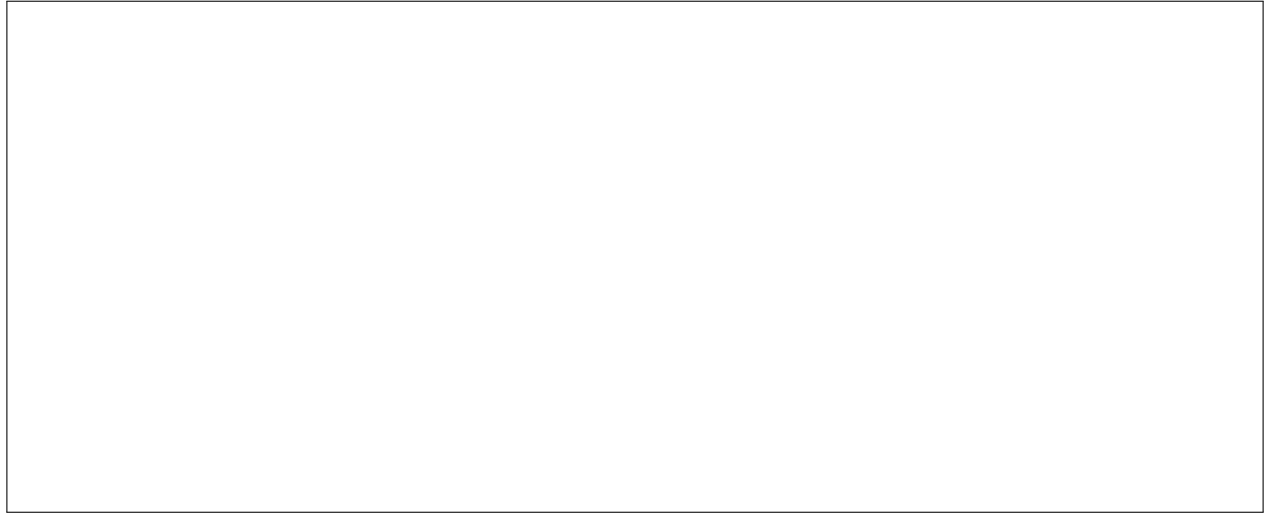
Dica: Use o PBO (cuidado pois é aplicável em conjuntos feitos por inteiros não-negativos).

(7) **A2.** Demonstre que todos os múltiplos de d pertencem ao S .

Dica: Use indução, mas cuidado para não esquecer nada.

(7) **A3.** Demonstre que nada mais pertence ao S .

Dica: Tome um arbitrário $a \in S$ e use o Lemma da Divisão de Euclides.

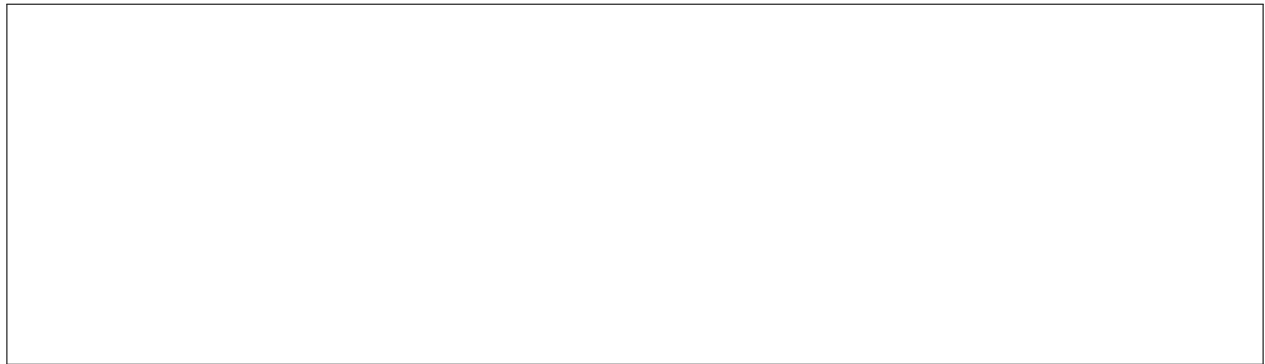


(6) **B**

Pelo **A** sabemos que é suficiente ter as hipóteses (i) e (ii) sobre o S para concluir a afirmação desejada.

(3) **B1.** A hipótese (i) sozinha é suficiente?

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.



(3) **B2.** A hipótese (ii) sozinha é suficiente?

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.



Só isso mesmo.

RASCUNHO