FMC1, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

06/09/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Escolhe até 2 dos A, B, C, D, E, F.**[4]

CENSORED!

Lembram-se:

(a1)	$n + 0 = n$	(m1)	$n \cdot 0 = 0$
(a2)	$n + Sm = S(n + m)$	(m2)	$n \cdot Sm = n + (n \cdot m)$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(4) **A1.** Escreva uma definição *completa e formal* [redacted]

DEFINIÇÃO:

(20) **A2.** Usando apenas a definição [redacted] demonstre ou refute a proposição seguinte:

para todo [redacted], *se* [redacted] *então* [redacted].

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(36) **B**

(4) **B1.** Defina formalmente [redacted].

Definição.

(32) **B2.** Dado [redacted] demonstre que

para quaisquer [redacted], [redacted].

Se citar lemmata, deves enunciá-los e demonstrá-los no espaço indicado.

Demonstração.

Lemmata.

(36) **C**

Nos naturais definimos as funções seguintes recursivamente:

[redacted] = [redacted] [redacted] = [redacted]

[redacted] = [redacted] [redacted] = [redacted]

[redacted] = [redacted] [redacted] = [redacted]

(4) **C1.** O que [redacted]?

[redacted] : [redacted] :

(8) **C2.** Para qualquer n natural, defina formalmente [redacted].

Definição.

(24) **C3.** Já demonstramos (e podes usar) que

[redacted] (*)

Agora demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

[redacted].

Demonstração.

(36) **D**

Definimos a função binária [redacted] recursivamente assim:

$$[\text{redacted}] = [\text{redacted}] \qquad ([\text{redacted}])$$

$$[\text{redacted}] = [\text{redacted}] \qquad ([\text{redacted}])$$

$$[\text{redacted}] = [\text{redacted}] \qquad ([\text{redacted}])$$

Usamos também a notação [redacted]. A notação ajuda quando queremos [redacted], [redacted] a função unária definida pela

$$[\text{redacted}](x) = [\text{redacted}].$$

Descobrimos que [redacted] a definição [redacted]. [redacted] as [redacted] calcular [redacted]:

$$\text{(f1)} \qquad (\forall x)\,[\,[\text{redacted}]\,] \qquad\qquad (\forall x)\,[\,[\text{redacted}]\,] \qquad \text{(f2)}$$

(12) **D1.** Demonstre a (f1).
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **D2.** Demonstre a (f2).
DEMONSTRAÇÃO.

Demonstração (cont.).

(12) **D3.** Adivinhe [redacted], e demonstre sua corretude.

Dica: *Para adivinhar* [redacted], [redacted].

Palpite: $A_3(x) =$ ________________

Demonstração.

(36) **E**

Ainda sobre [redacted] *do* **D** *(cujos resultados podes usar aqui).*

(36) Demonstre que para todo [redacted], [redacted].
Demonstração.

(64) **F**

Ainda sobre [redacted] *dos* **D**–**E** *(cujos resultados podes usar aqui).*

Definição. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é [redacted] sse

para quaisquer [redacted], [redacted].

Lemma. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo t, [redacted]. Logo f é [redacted].

(64) Dado o Lemma, demonstre o

Teorema. Para todo n, [redacted] é estritamente crescente.

Demonstração.

Demonstração (cont.).

Só isso mesmo.