
Nome:

06/09/2019

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.³
- XII. Escolhe até 2 dos A, B, C, D, E, F.⁴

Lembram-se:

(a1) $n + 0 = n$

(m1) $n \cdot 0 = 0$

(a2) $n + Sm = S(n + m)$

(m2) $n \cdot Sm = n + (n \cdot m)$

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(4) **A1.** Escreva uma definição *completa e formal* [REDACTED]

DEFINIÇÃO:

(20) **A2.** Usando apenas a definição [REDACTED] demonstre ou refute a proposição seguinte:

para todo [REDACTED], *se* [REDACTED] *então* [REDACTED].

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

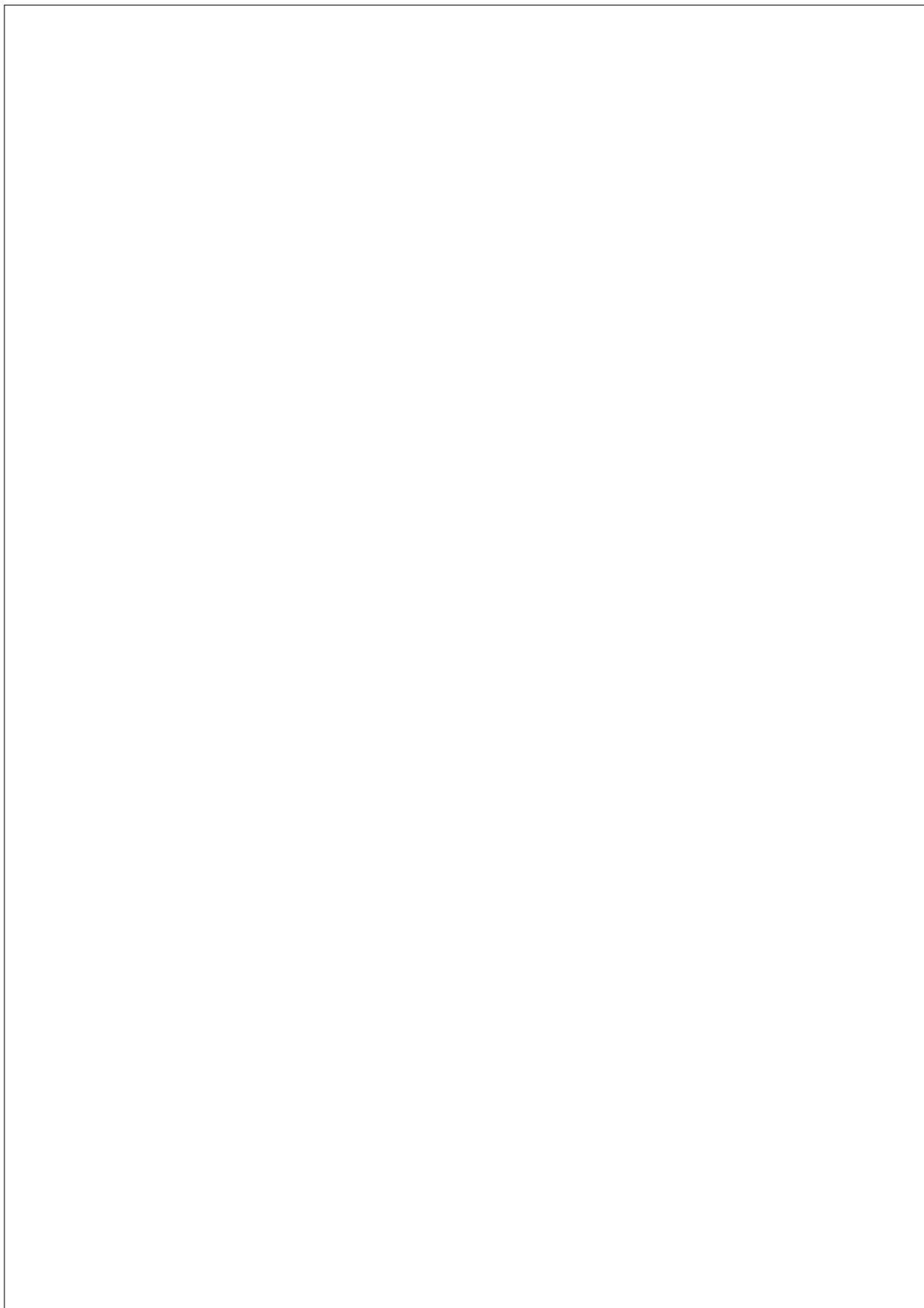
(36) **B**

(4) **B1.** Defina formalmente [REDACTED].
DEFINIÇÃO.

(32) **B2.** Dado [REDACTED] demonstre que
para quaisquer [REDACTED], [REDACTED].

Se citar lemmata, deves enunciá-los e demonstrá-los no espaço indicado.
DEMONSTRAÇÃO.

LEMMATA.



(36) C

Nos naturais definimos as funções seguintes recursivamente:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & g(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 & g(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 & g(2) &= 2 \\ f(3) &= 3 & g(3) &= 3 \\ f(4) &= 4 & g(4) &= 4 \\ f(5) &= 5 & g(5) &= 5 \\ f(6) &= 6 & g(6) &= 6 \\ f(7) &= 7 & g(7) &= 7 \\ f(8) &= 8 & g(8) &= 8 \\ f(9) &= 9 & g(9) &= 9 \\ f(10) &= 10 & g(10) &= 10 \end{aligned}$$

(4) C1. O que $f(n)$ representa?

$f(n)$: $g(n)$:

(8) C2. Para qualquer n natural, defina formalmente $f(n)$ e $g(n)$.

DEFINIÇÃO.

(24) C3. Já demonstramos (e podes usar) que

$$f(n) = n \tag{*}$$

Agora demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$g(n) = n.$$

DEMONSTRAÇÃO.

(36) **D**

Definimos a função binária and recursivamente assim:

$$\text{and}(0, 0) = 0 \quad (f1)$$

$$\text{and}(0, 1) = 0 \quad (f2)$$

$$\text{and}(1, 0) = 0 \quad (f3)$$

Usamos também a notação $\text{and}(x, y)$. A notação ajuda quando queremos $\text{and}(x, y)$, $\text{and}(x, y)$ a função unária definida pela

$$\text{and}(x)(y) = \text{and}(x, y).$$

Descobrimos que $\text{and}(x, y)$ a definição $\text{and}(x, y)$ $\text{and}(x, y)$. $\text{and}(x, y)$ as $\text{and}(x, y)$ $\text{and}(x, y)$ calcular $\text{and}(x, y)$ $\text{and}(x, y)$:

$$(f1) \quad (\forall x) [\text{and}(x, 0) = 0] \quad (\forall x) [\text{and}(x, 1) = x] \quad (f2)$$

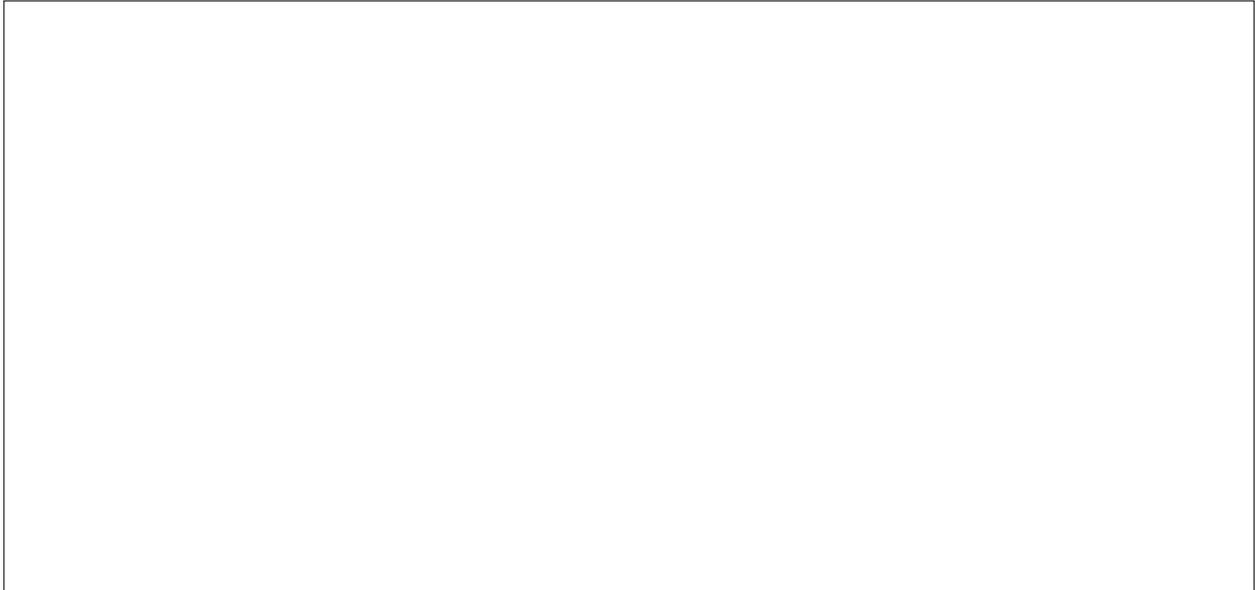
(12) **D1.** Demonstre a (f1).

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **D2.** Demonstre a (f2).

DEMONSTRAÇÃO.

DEMONSTRAÇÃO (CONT.).



(12) **D3.** Adivinhe [REDACTED], e demonstre sua corretude.

Dica: Para adivinhar [REDACTED], [REDACTED].

PALPITE: $A_3(x) =$ _____

DEMONSTRAÇÃO.



(36) **E**

*Ainda sobre [REDACTED] do **D** (cujos resultados podes usar aqui).*

(36) Demonstre que para todo [REDACTED], [REDACTED].
DEMONSTRAÇÃO.



(64) **F**

Ainda sobre [REDACTED] dos D-E (cujos resultados podes usar aqui).

Definição. Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é [REDACTED] sse

para quaisquer [REDACTED], [REDACTED].

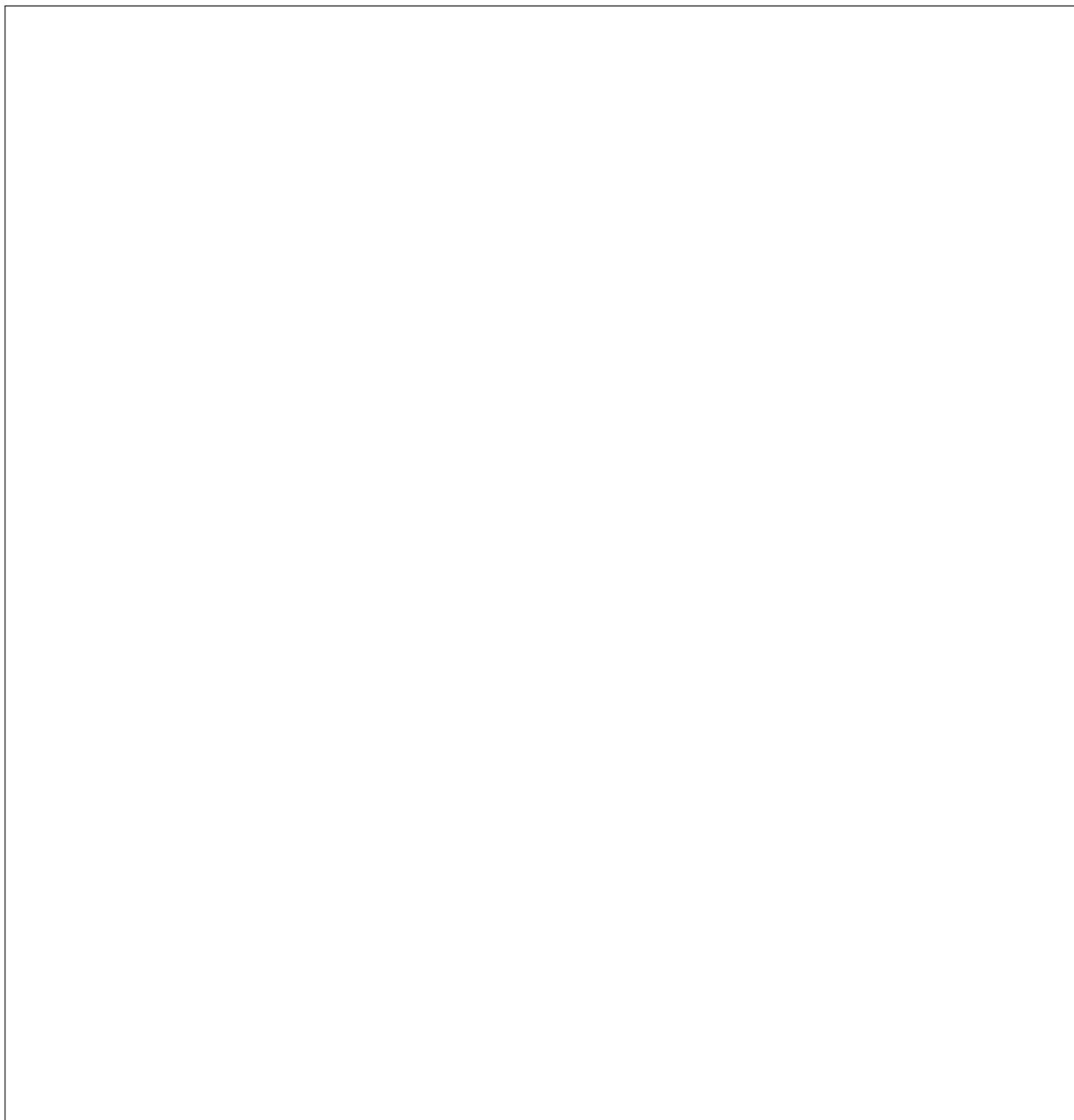
Lemma. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo t , [REDACTED]. Logo f é [REDACTED].

(64) Dado o Lemma, demonstre o

Teorema. Para todo n , [REDACTED] é estritamente crescente.

DEMONSTRAÇÃO.

DEMONSTRAÇÃO (CONT.).



Só isso mesmo.