
Nome:

16/12/2016

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x [\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.
- VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.
- IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.³

Esclarecimentos:

1. Podes deixar fatoriais ($n!$), permutações ($P(n, r)$) e combinações ($C(n, r)$) nos teus cálculos.
2. Nas “respostas” *não* precisa explicar teu raciocínio, mas *não escreva apenas um valor final*; Exemplo: $9!C(9, 5)$ é aceitavel como resposta, mas seu valor 45722880 sem explicação, não!
3. Nas “resoluções” explique *curtamente* a ideia da tua resolução.

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(16) **A**

Escolhe exatamente um dos Aa e Ab.

(Quem responde nos dois, ganhará 0 pontos.)

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

(16) **Aa.** Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

(16) **Ab.** Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

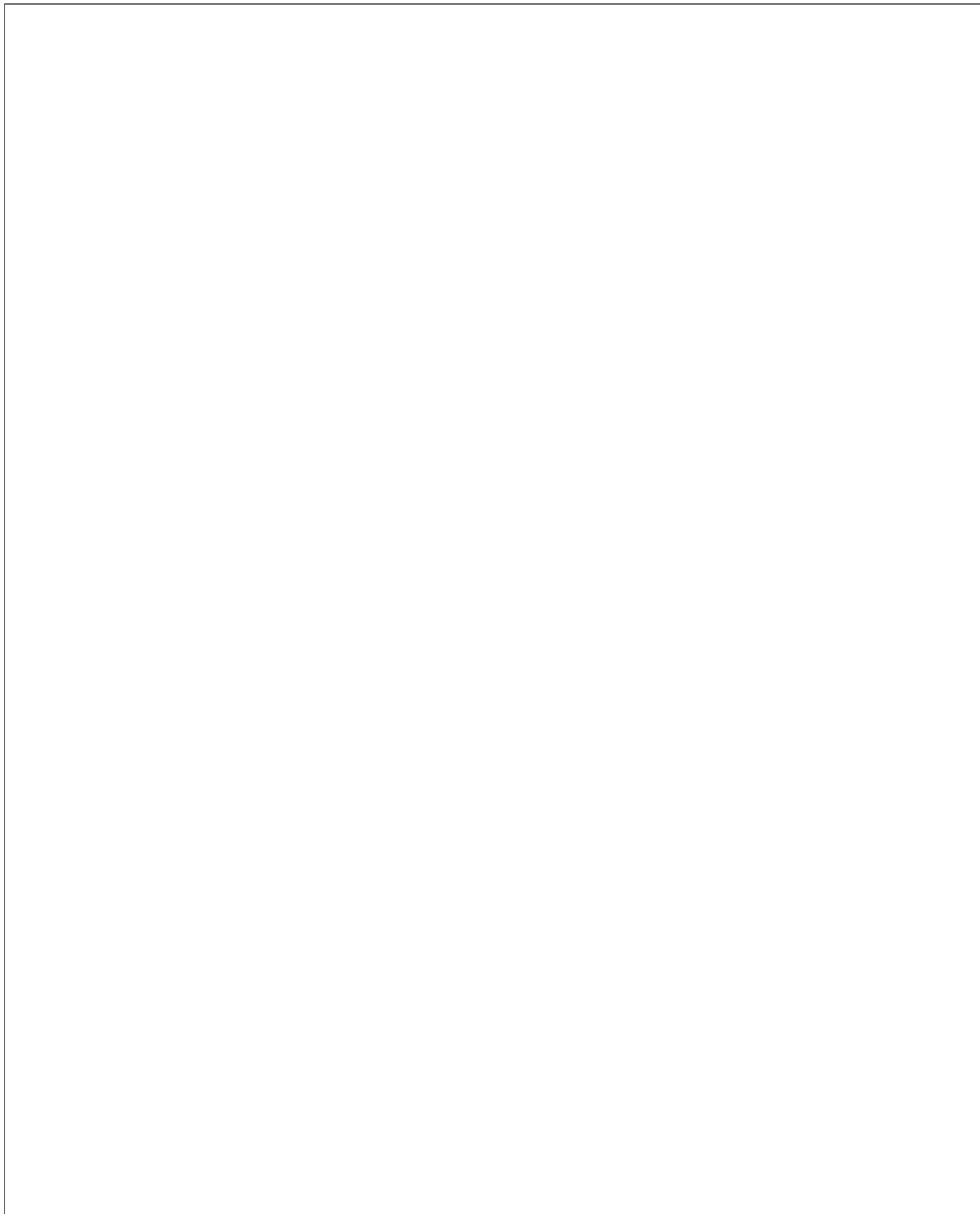
PROVA.

(10) **B**

Prove que:

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo ímpar $k \in \mathbb{Z}$, k^n é ímpar.

PROVA.

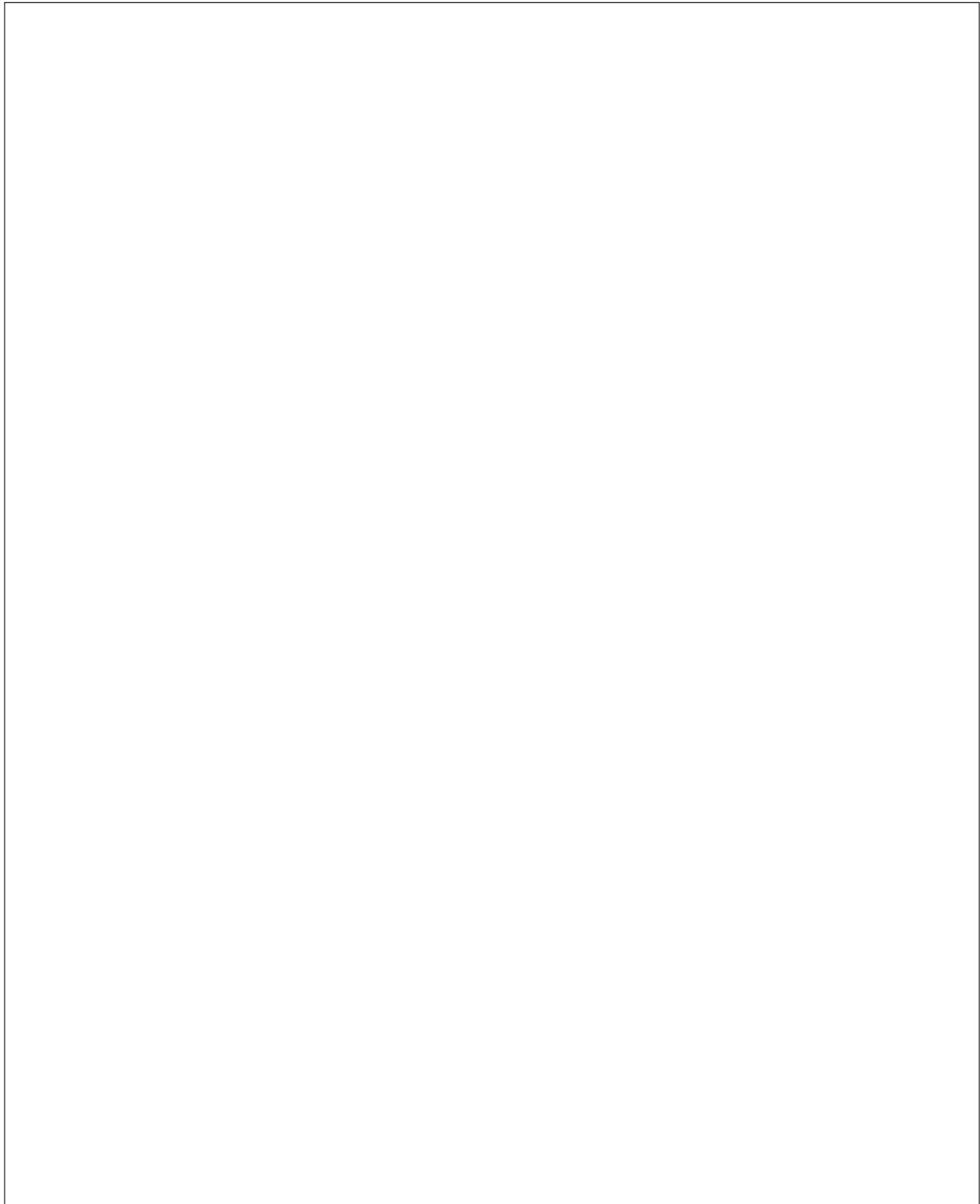


(16) **C**

Sejam $a, m \in \mathbb{Z}$.

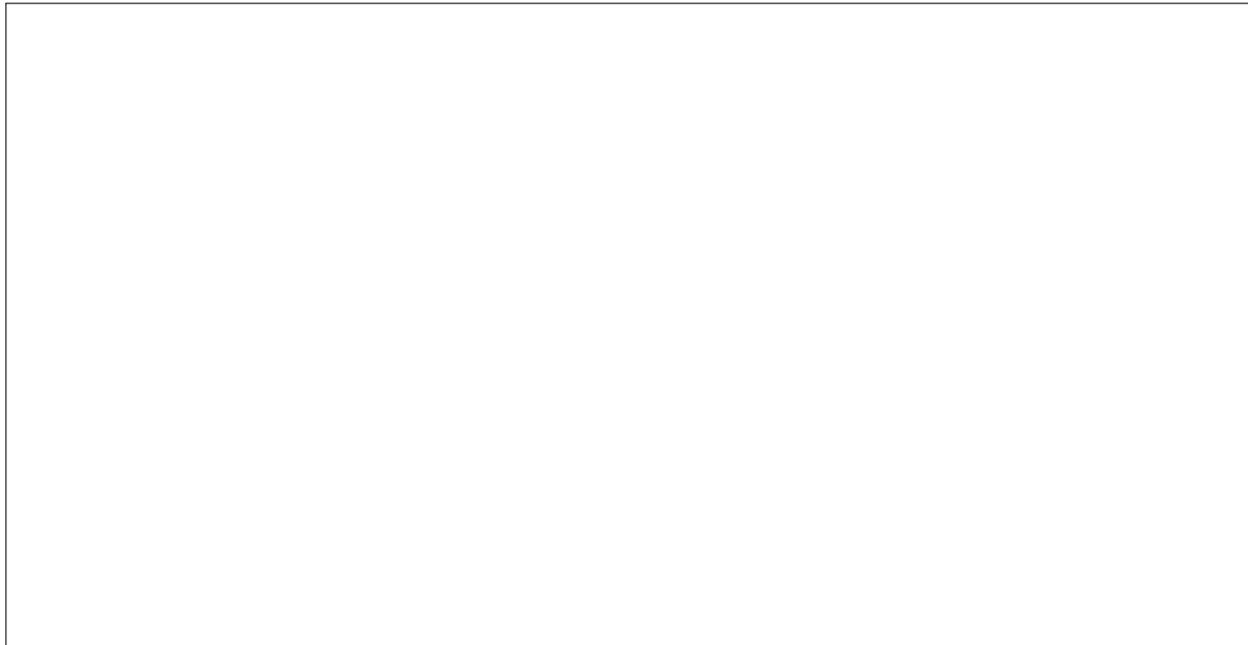
$$(a, m) = 1 \implies (\exists x \in \mathbb{Z})[ax \equiv 1 \pmod{m}].$$

PROVA.



(20) **D**

- (8) **D1.** Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$, se $3 \nmid n$ então $3 \mid n^2 - 1$.
PROVA.

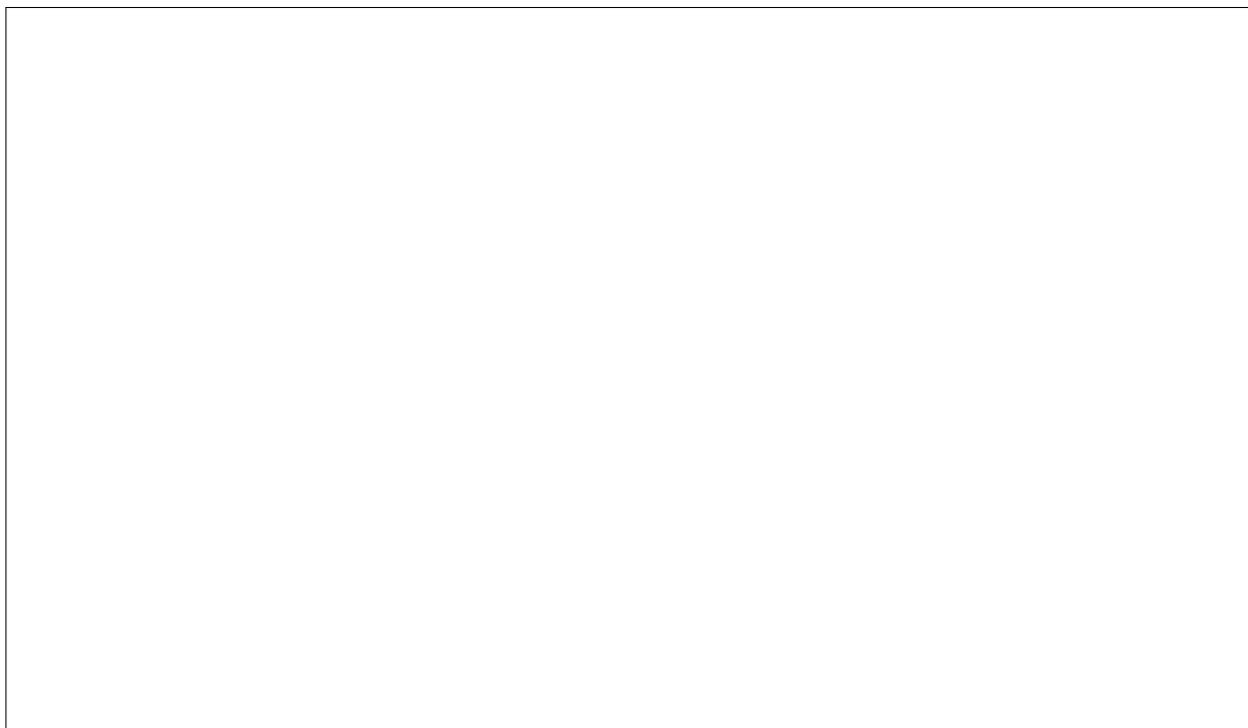


- (12) **D2.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

$$a \mid b + c \ \& \ a \mid 2b + 3c \implies a \mid 3b + 2c.$$

(Podes usar propriedades da divisibilidade que provamos nas aulas.)

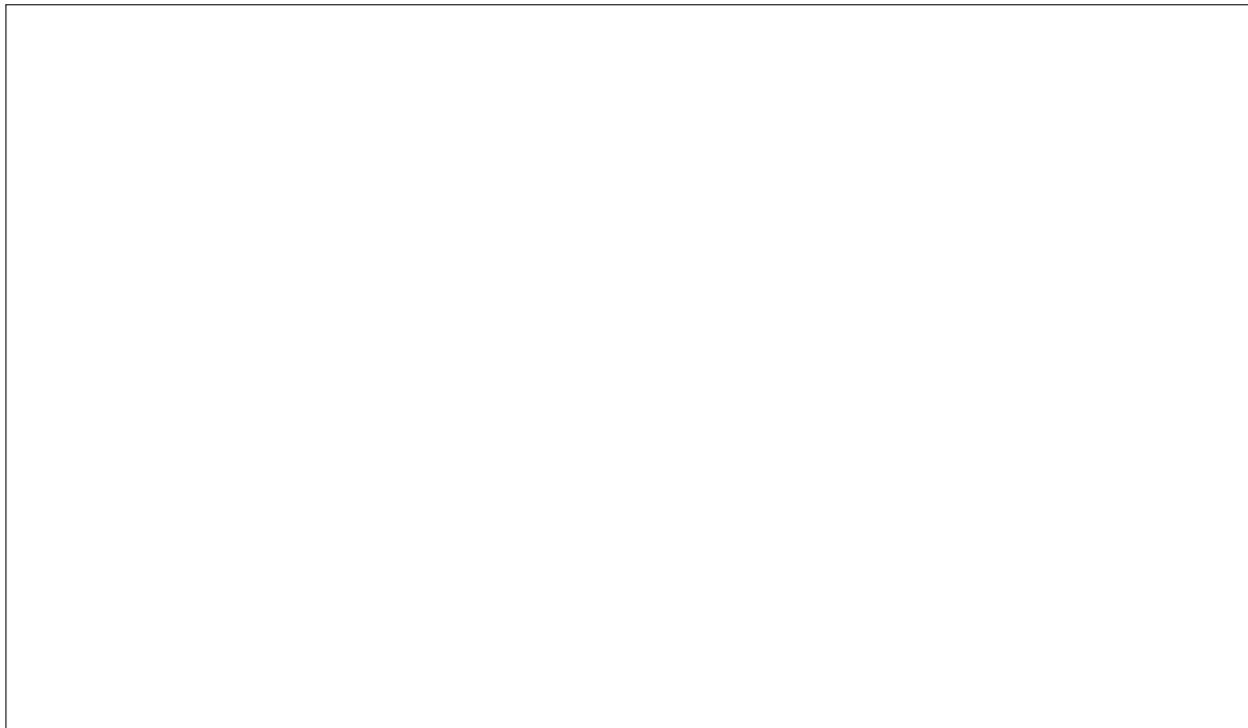
PROVA.



(28) **E**

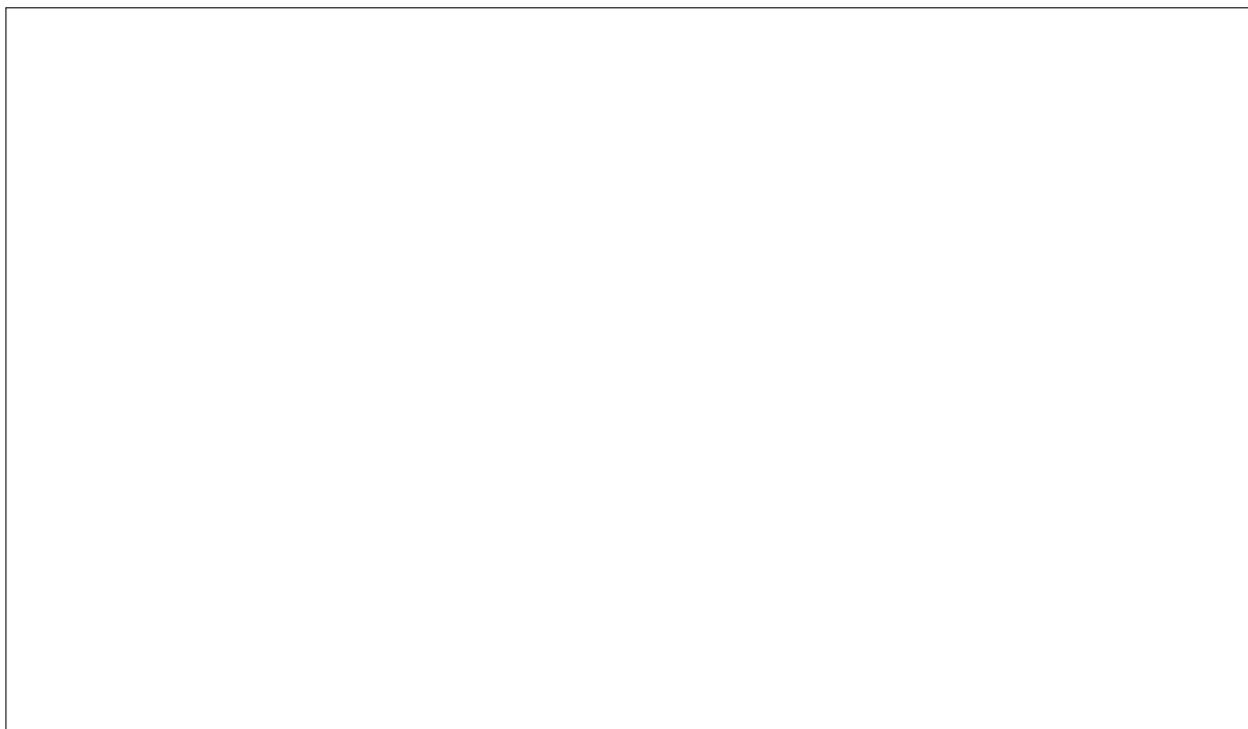
(14) **E1.** Sem usar o teorema fundamental da aritmética, prove o lema de Euclides:
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

PROVA.



(14) **E2.** Prove o teorema de Euclides: *existe uma infinidade de primos.*

PROVA.

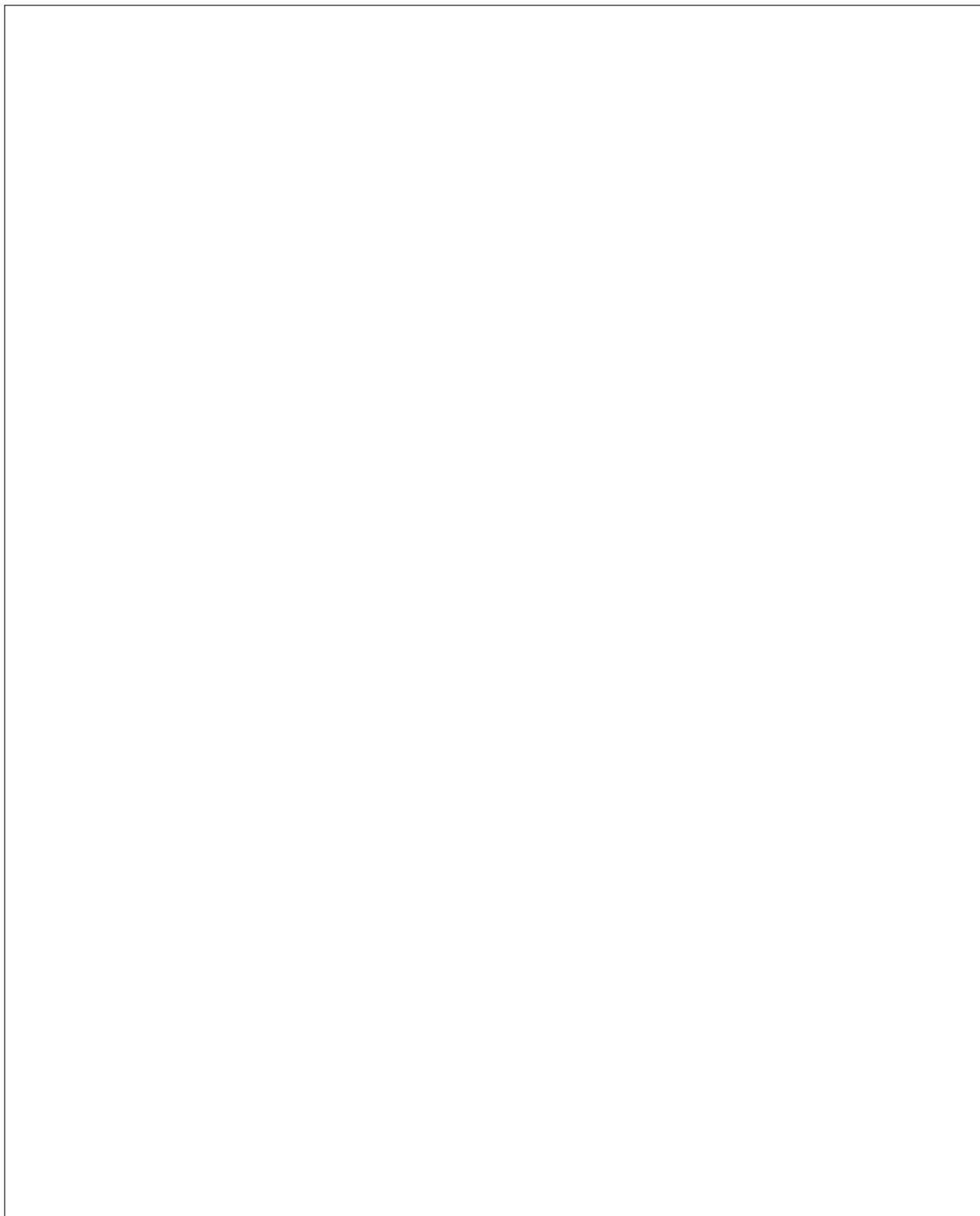


(16) **F**

Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: PIF ou PBO.

PROVA.



(28) **G**

Numa turma de 28 alunos, precisamos formar 2 comissões de 5 e 6 membros. Cada comissão tem seu presidente, seu vice-presidente, e seus membros normais. De quantas maneiras podemos formar essas comissões...

(8) **G1.** ...sem restrições (cada um aluno pode participar nas duas comissões simultaneamente)?
RESPOSTA.

(8) **G2.** ...se nenhum aluno pode participar simultaneamente nas duas comissões?
RESPOSTA.

(12) **G3.** ...se os dois (únicos) irmãos entre os alunos não podem participar na mesma comissão?
RESPOSTA.

(66 + 33^b) Ω

Xÿzzÿ o Mago Bravo decidiu matar todos os lemmings que ele guarda no seu quintal. Seus feitícios são os:

- MM: “magic missile”, que mata 2 lemmings simultaneamente, e gasta 1 ponto “mana”;
- FB: “fireball”, que mata 3 lemmings simultaneamente, e gasta 2 pontos “mana”.

Alem dos feitícios, Xÿzzÿ pode usar seu bastão para matar os lemmings (que não custa nada, e mata 1 lemming com cada batida). Suponha que o mago *nunca* vai lançar um feitício que mataria mais lemmings do que tem (ou seu quintal vai se queimar).

Ele tem m pontos “mana” e existem n lemmings no seu quintal.

Definindo certas funções para contar, responda nas perguntas:

Em quantas maneiras diferentes ele pode destruir todos os lemmings se...

(28) $\Omega 1$ os lemmings são indistinguíveis?

RESOLUÇÃO.

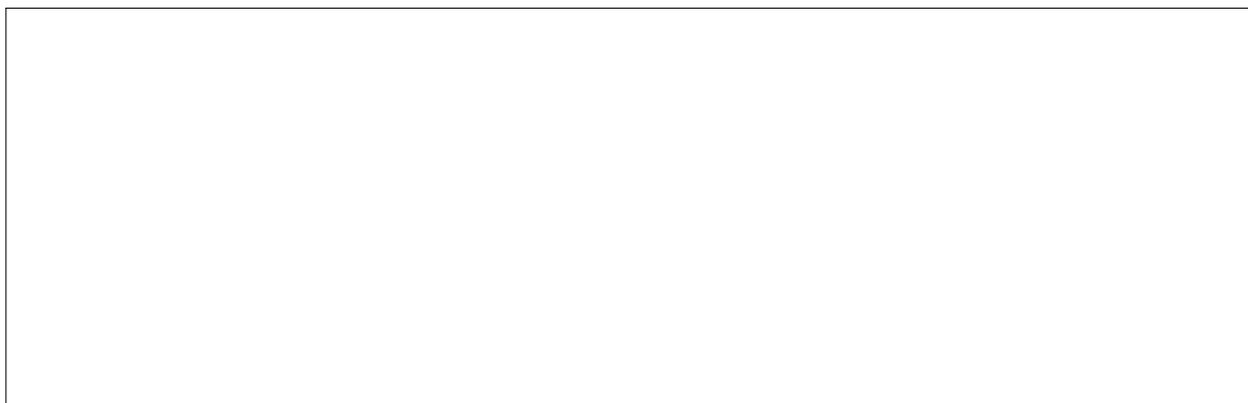
(38) **Ω2.** ...os lemmings são distinguíveis?

RESOLUÇÃO.



(33^b) **Ω3.** ...os lemmings são distinguíveis e cada vez que Xÿzzÿ mata um usando seu bastão, ele *ganha* um ponto de “mana”?

RESPOSTA.



RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO