FMC1, 2016.1

(Turma do Thanos)

Prova 1

(04/04/2016)

Nome:

Boas provas!

A

A0. Seja $k \in \mathbb{N}$.

(i) Prove que *se k^2 é par, então k também é.*

(ii) Prove que *para todo $n \in \mathbb{N}$, se k^n é par, então k também é.*

(**Dica:** Prove os contrapositivos dessas implicações.)

A1. Prove que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.[1]

A2. A prova seguinte é errada. Explique porquê, indicando os passos dela que são errados.[2]

> **Teorema.** *O número $\sqrt{5}$ é irracional.*
>
> PROVA. Para provar pelo absurdo, supomos o contrário, que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Pela definição de $\mathbb{Q}$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{5} = m/n$, e podemos assumir que pelo menos um dos dois é impar. Elevando os dois lados ao 2, temos:
>
> $$\begin{aligned} \sqrt{5} = \frac{m}{n} &\implies 5 = \frac{m^2}{n^2} \\ &\implies 5n^2 = m^2 \end{aligned}$$
>
> Como o 5 é ímpar, o $5n^2$ também deve ser ímpar, e como ele é igual de m^2, *o m^2 deve ser ímpar*. Seguindo o Teorema **A0**, podemos concluir que m é ímpar. Logo, o par dos dois (m e n) deve ser o n. Mas se n é pár, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2a$. Substituindo na última equação, temos:
>
> $$\begin{aligned} 5n^2 = m^2 &\implies 5(2a)^2 = m^2 \\ &\implies 5 \cdot 4 \cdot a^2 = m^2 \\ &\implies 20a^2 = m^2 \\ &\implies \underbrace{2(10a^2)}_{\text{par}} = \underbrace{m^2}_{\text{ímpar}} \end{aligned}$$
>
> e a gente chegou num absurdo. Logo, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. ∎

[1] Lembra-se a definição da raiz cúbica: $c = \sqrt[3]{x} \iff c^3 = x$.

[2] Erros de português não contam.

B

B0. (i) Escrevendo as árvores sintáticas, mostre que as seguintes expressões são fórmulas bem formadas da $\mathcal{F}_0$ ou da $\mathcal{F}_1$:[3]

1: $\neg\neg(p_0 \vee p_1)$

2: $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow \neg(p \vee r)$

3: $\exists x \exists y \neg(P(x,y) \to P(y,x))$

4: $\forall x(\exists y R(y,x) \to Q(f(x,x)))$

(ii) Fazendo as proprias substituições (passo a passo), transforme as fórmulas seguintes para equivalentes, onde as negações aparecem apenas em frente de fórmulas atômicas:

1: $\neg(p \vee q)$

2: $\neg(p \to \neg q)$

3: $\neg\forall x(R(x,x) \vee Q(f(x)))$

4: $\neg\exists u \exists v \forall x(\neg u = v \wedge P(u,x,v)$

B1. Sejam $\oplus$ e $\downarrow$ os conectivos lógicos definidos pela a tabela de valores:

A	B	$A \oplus B$	$A \downarrow B$
0	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**

(i) Escreva as tabelas de valores das fórmulas:

$$A = ((p \wedge q) \to \neg q)$$
$$B = (p \downarrow (q \oplus r))\,.$$

(ii) Ache uma formula C, equivalente de B, tal que os únicos conectivos que aparecem em C são os $\{\neg, \vee, \wedge\}$. (Sabemos que isso é possível por que o conjunto $\{\neg, \vee, \wedge\}$ é *completo*.)

B2. Sejam as fórmulas:

$$A = \forall x \exists y P(x,y);$$
$$B = \exists y \forall x P(x,y);$$
$$C = \forall x \forall y \exists w(P(x,w) \wedge P(y, f(w))).$$

Defina dois "mundos" (ou "estruturas") tais que:[4]

- $\mathcal{M}$, onde uma das A e B e válida e a outra inválida.
- $\mathcal{N}$, onde A e C são válidas.

[3] Assuma que todos os símbolos de predicados e de funções estão seguidos para o certo número de argumentos.

[4] Para especificar um mundo, precisa definir qual será o universo dele, e as interpretações dos símbolos de funções e de predicados que aparecem nas fórmulas.

C

C0. (i) Usando a notação de somatorios e produtos, escreve as seguintes expressões:

$$A = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + 100$$
$$B = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cdots \cdot 1024$$
$$C = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4} \cdots \sqrt{70}$$
$$D = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4} + \cdots + \left(\sqrt{2}\sqrt[3]{3} \cdots \sqrt[k]{k}\right)$$

(ii) Sem usar adição, multiplicação, *min*, e outras funções definidas fora do **C0**, define recursivamente as seguintes funções:

- $even : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, que retorna $\mathbf{1}$ se entrada dela é par, e $\mathbf{0}$ se é ímpar;
- $odd : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, que retorna $\mathbf{1}$ se entrada dela é ímpar, e $\mathbf{0}$ se é par;
- $min_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, que retorna o mínimo elemento das entradas dela;

Exemplos :	$even(42) = \mathbf{1}$	$odd(42) = \mathbf{0}$	$min_3(22, 28, 12) = 12$
	$even(157) = \mathbf{0}$	$odd(157) = \mathbf{1}$	$min_3(6, 8, 6) = 6.$

C1. Umas definições de funções recursivas são:

$$x + 0 = x \quad \text{(a1)} \qquad\qquad x^0 = 0^+ \quad \text{(e1)}$$
$$x + y^+ = (x + y)^+ \quad \text{(a2)} \qquad\qquad x^{y^+} = x^y \cdot x \quad \text{(e2)}$$
$$x \cdot 0 = 0 \quad \text{(m1)} \qquad\qquad x \Uparrow 0 = 0^+ \quad \text{(t1)}$$
$$x \cdot y^+ = (x \cdot y) + x \quad \text{(m2)} \qquad\qquad x \Uparrow y^+ = x^{x \Uparrow y} \quad \text{(t2)}$$

(a) Calcule o valor $2 \Uparrow 4$.

(b) Dado os lemas:

$$a + b = b + a \tag{a-com}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{m-ass}$$

prove pelo indução as sequintes propriedades, indicando para cada passo o que foi usado:

(i) $a \cdot 0^+ = a$ (ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (iii) $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$.

C2. Considera a função recursiva $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida pelas equações:

$$\alpha(0, x) = x + 1 \qquad\qquad \alpha(0, x) = x^+ \quad \text{(K1)}$$
$$\alpha(n + 1, 0) = \alpha(n, 1) \qquad \text{ou, formalmente,} \qquad \alpha(n^+, 0) = \alpha(n, 1) \quad \text{(K2)}$$
$$\alpha(n + 1, x + 1) = \alpha(n, \alpha(n + 1, x))) \qquad\qquad \alpha(n^+, x^+) = \alpha(n, \alpha(n^+, x))) \quad \text{(K3)}$$

(i) Seguindo as definições recursivas, calcule os valores $\alpha(1, 1)$ e $\alpha(2, 1)$.
(ii) Prove que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(1, x) = x + 2$.
(iii) Prove que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(2, x) = 2x + 3$.

Só isso. Nada mais.