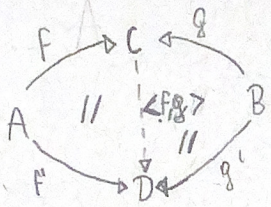
(24) A

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.



Vemos que $\langle f, g\rangle$ faz ? com que $\langle f, g\rangle f = f'$ & $\langle f, g\rangle g = g'$, fazendo o diagrama comutar. (1) (2)

Falou duas vezes a mesma coisa.

Quem é o coproduto? "único"?

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $f, g : A \to B$ monos.
Sejam $a, b : A$.
Vou mostrar que $(gf)a = (gf)b \to a = b$.
Suponho $(gf)a = (gf)b$.
Logo $g(fa) = g(fb)$. [?]
Logo $ga = gb$ [f mono] X como?
Logo $a = b$ [g mono].

Estamos numa categoria.

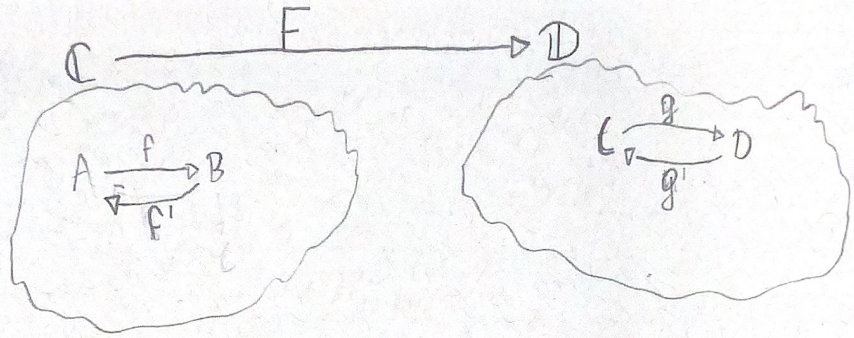
Tu tá pensando em conjuntos & funções.

//Não tenho certeza se é assim...

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$.



$FA = C$

$FB = D$

$Ff = g$

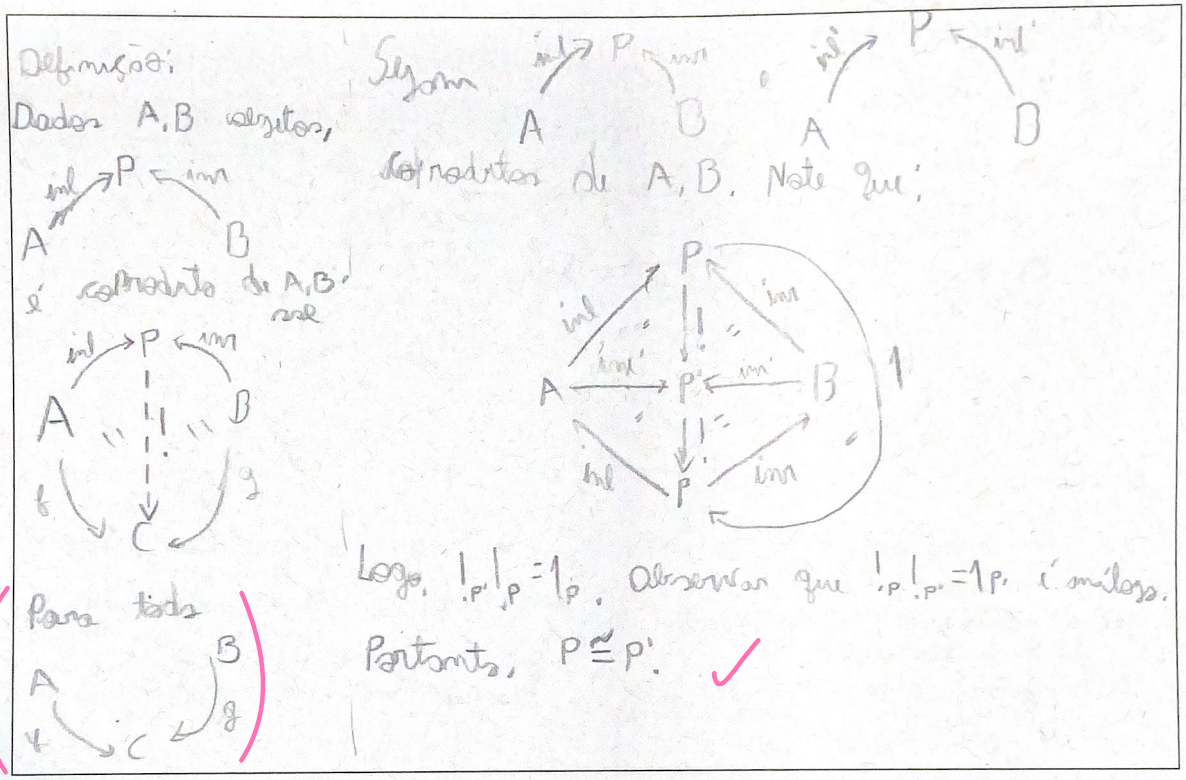
$Ff' = g'$

esse desenho não demonstra nada!

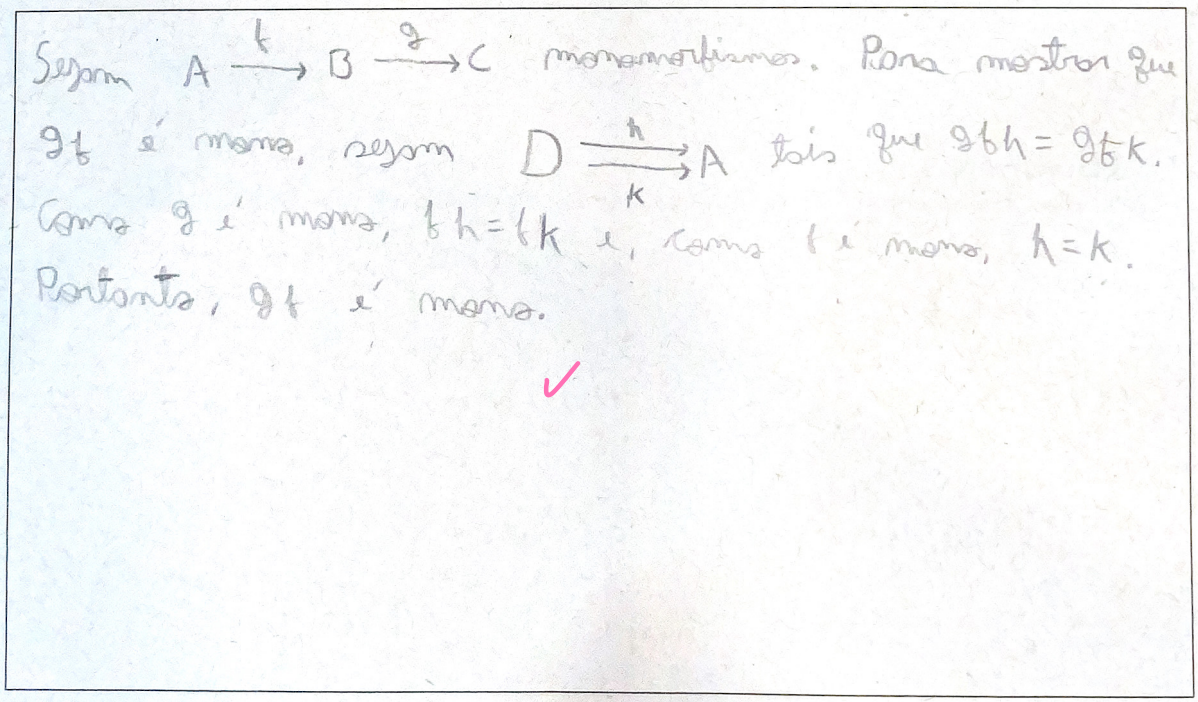
Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.



(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.



A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ e $f: A \to B$ iso em $\mathbb{C}$. Vou mostrar que Ff é iso em $\mathbb{D}$. Note que:

$$\begin{aligned} (F f^{-1})(F f) &= F(f^{-1} f) && [F \text{ preserva } \circ] \\ &= F(1_A) && [f^{-1} \text{ inversa de } f] \\ &= 1_{F(A)}. && [F \text{ preserva identidades}] \end{aligned}$$

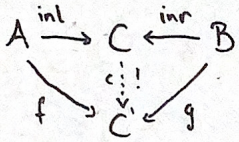
A demonstração de $(Ff)(Ff^{-1})$ é similar. Portanto, Ff^{-1} é inversa de Ff e Ff é iso.

Só isso mesmo.

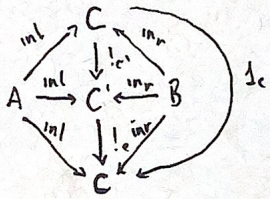
(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

O coproduto de dois objetos A, B de uma categoria é um objeto C com duas setas $inl : A \to C$ e $inr : B \to C$ tal que para qualquer (outro) C' com setas $f : A \to C'$ e $g : B \to C'$, existe uma única seta $c : C \to C'$ que faz o seguinte diagrama comutar



Agora mostraremos que coprodutos são isomórficos. Sejam C e C' dois coprodutos para A e B. Note que o seguinte diagrama comuta.



Como C é coproduto de A e B, temos única seta que faz o diagrama comutar. Mas ambas $!_C \circ !_{C'}$ e 1_C fazem o diagrama comutar. Logo, $!_C \circ !_{C'} = 1_C$.
Repetindo a demonstração acima, trocando C por C', obtemos $!_{C'} \circ !_C = 1_{C'}$.

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $k : A \to B$ e $h : B \to C$ mono. Queremos mostrar que hk também é mono.
Para tal, sejam $f, g : D \to A$ tais que $(hk)f = (hk)g$.
Considere o seguinte diagrama.

$$D \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{h} C$$

~~Como h é mono, temos que~~ Por associatividade, sabemos que $h(kf) = h(kg)$.
Como h é mono, temos então que $kf = kg$. Mas k também é mono, então temos que $f = g$.

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja F functor e $f: A \to B$ uma iso.

Logo, seja $g: B \to A$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$.

Note que $(Fg)(Ff) = F(gf)$ [functor F] ·comp

$= F(1_A)$

$= 1_{FA}$ [Functor.id]

e $(Ff)(Fg) = F(fg)$

$= F(1_B)$ similar

$= 1_{FB}$

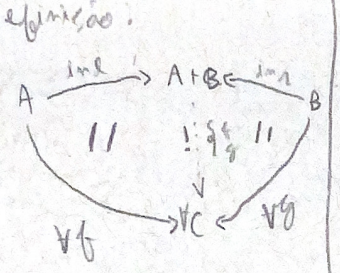
Logo, Ff também é iso.

Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

Definição:

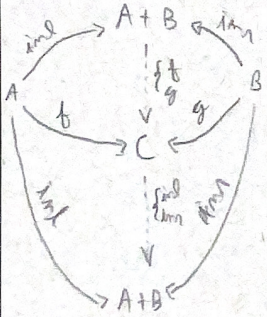


Como $(\ ,\ )$ é um coproduto de A, B. Temos que a seta $(inl + inr) \circ (f+g)$ faz o diagrama comutar, assim como a 1_{A+B}, logo $(inl + inr) \circ (f+g) = 1_{A+B}$.

Similarmente temos $(f+g)(inl + inr) = 1_C$.

Logo $A+B$ e C são isomorfos.

I) DEMONSTRAÇÃO:



(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$, monos.

Sejam $u, v : D \longrightarrow A$ t.q. $(fg)u = (fg)v$.

Como $(fg)u = (fg)v$, então $f(gu) = f(gv)$. [associatividade]

Logo $gu = gv$, pois f é mono.

Logo $u = v$, pois g é mono. □

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

seta

Sejam $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ cats, Seja $f: A \longrightarrow B$ uma ~~função~~ iso em $\mathbb{C}$, e seja f' t.q $f'f = 1_A$ & $ff' = 1_B$. Basta que F_f é iso. ✓ ✓

Como $f'f = 1_A$ então $F(f'f) = 1_{FA}$. $[F(1_A) = 1_{FA}]$ ✓

Logo $(Ff)\circ(Ff') = 1_{FA}$ [F respeita a composição] ✓

Basta que $(Ff)\circ(Ff') = 1_{FB}$. ✓

Como $ff' = 1_B$, então $F(ff') = F(1_B)$.

Logo $F(ff') = 1_{FB}$. $[F(1_B) = 1_{FB}]$

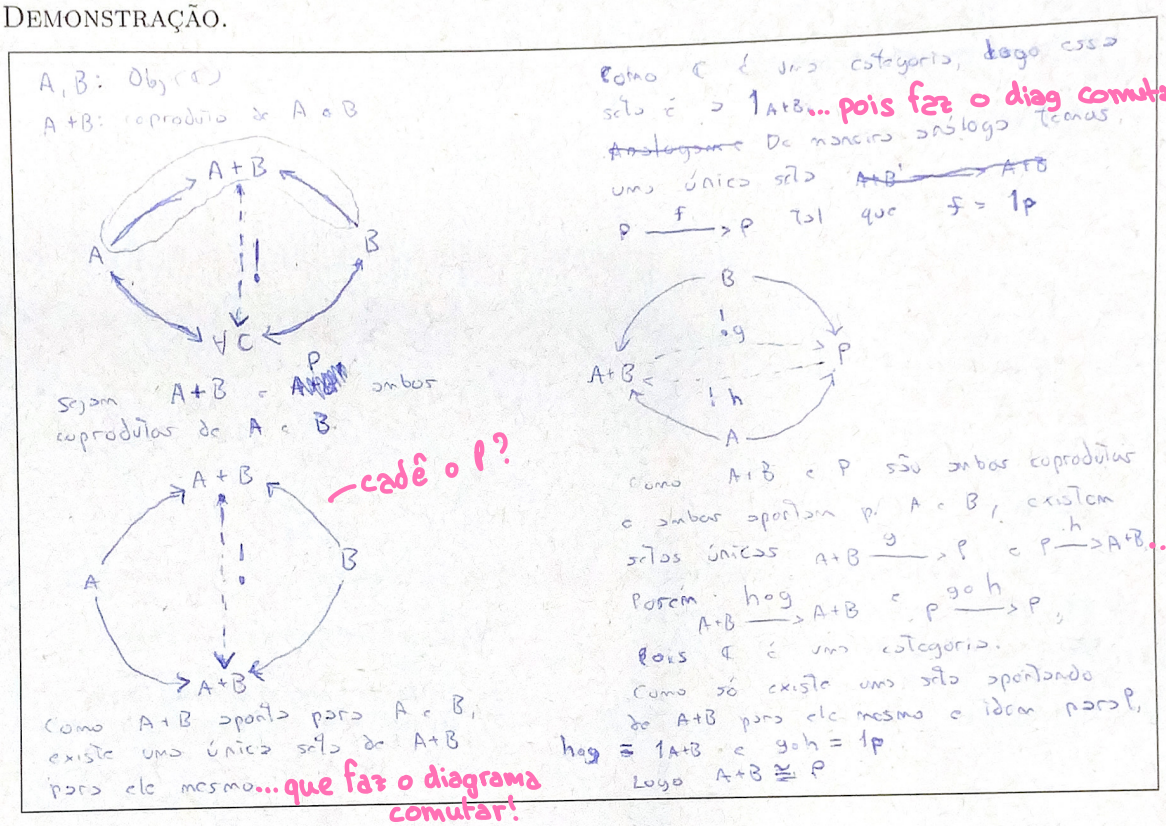
Logo $(Ff)\circ(Ff') = 1_{FB}$ [F preserva composição]

Similar!

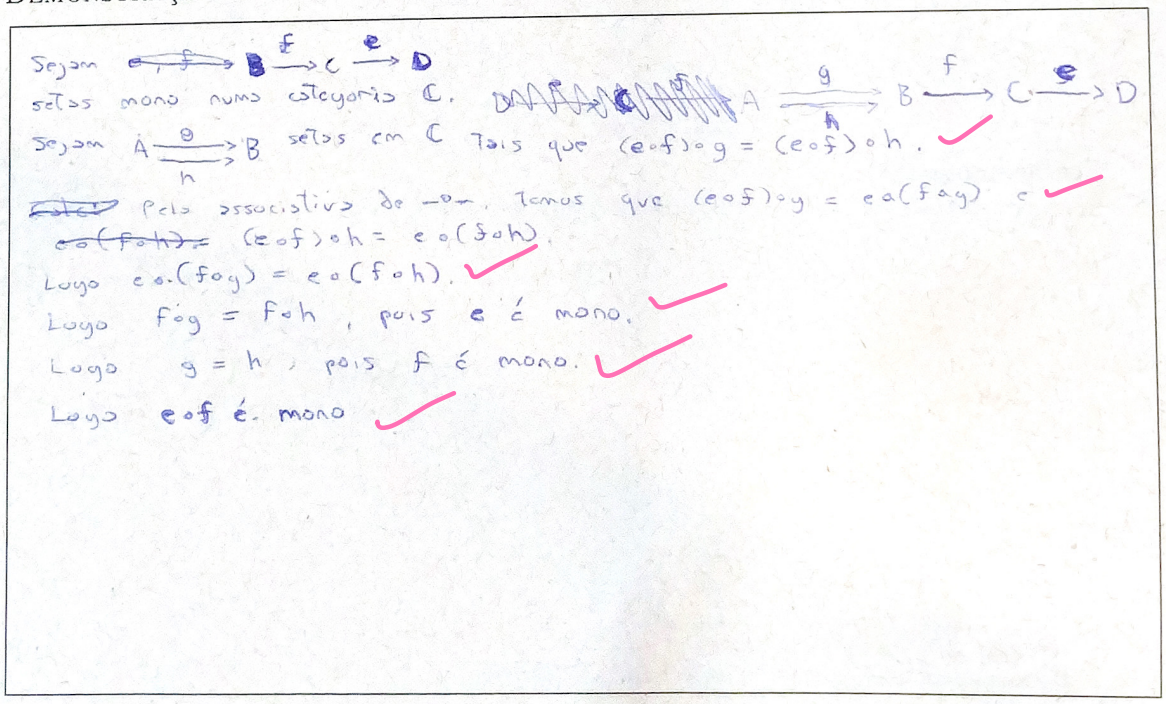
Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.



(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.



(aqui o interesse é na seta iso)

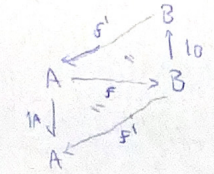
a partir disso a ideia acabou sendo confusa.

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ categorias e F um funtor $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$.

Sejam A, B ~~isomórficos~~ objetos de $\mathbb{C}$ tais que $A \cong B$. (A e B isomórficos)



Como F é funtor, logo $F \circ 1_A = 1_{FA}$ e $F \circ 1_B = 1_{FB}$

e logo $FA \xrightarrow{Ff} FB$ e $FB \xrightarrow{Ff'} FA$.

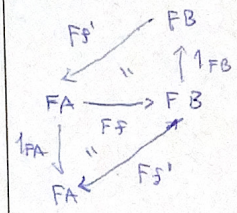
Ainda pelas características de funtor, temos que

$F(f \circ f') = Ff \circ Ff'$ ~~$= F\mathbb{C}$~~.

Como A e B são isomórficos, logo $f \circ f' = 1_B$.

~~De maneira logo F~~ como $F1_B = 1_{FB}$, temos que

~~$1_{FB} = Ff \circ Ff'$~~.



~~De maneira análoga~~, temos que $1_{FA} = Ff' \circ Ff$

Logo ~~$F1_B = Ff \circ Ff'$. Como~~ $F1_B = Ff \circ Ff'$

como $F1_B = 1_{FB}$, logo $1_{FB} = Ff \circ Ff'$

~~De~~ De maneira análoga, $1_{FA} = Ff' \circ Ff$.

Logo $FA \cong FB$. (FA e FB isomórficos)

Só isso mesmo.

(24) A

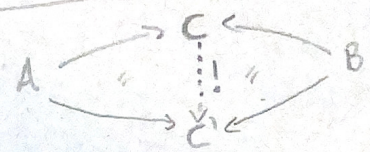
(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

Unicidade

Sejam C, C' coprodutos de A e B.
Logo, como C é coproduto de A e B, existe uma única seta de C para C'. NÃO! Crr...
De forma semelhante, existe uma única seta de C' para C.
Logo C e C' são isomorfos.

o que significa isomorfos?
não é o C sozinho.

Definição



Dada uma categoria $\mathbb{C}$, dizemos que C é o coproduto de A, B se e somente se existe uma seta de A para C, existe uma seta de B para C e para todo objeto C' que recebe setas de A e B existe uma única seta de C para C' que faz o diagrama comutar

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, tais que f e g não monos.
Basta mostrar que $g \circ f$ é mono
Sejam $h : D \to A$ (uma só?) (qual teu alvo?)
Calculamos:

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \quad \text{[associatividade da composição]}$$
$$= g \circ h \quad \text{[f mono]} \;?!\; f \text{ é id??}$$
$$= h \quad \text{[g mono]} \;?!\; g \text{ é id?}$$

nem definido é

(type error)

parece que tu "mostrou" $(g \circ f) = 1_?$

A3. Functores preservam isos.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$
Seja f iso em $\mathbb{C}$
Seja f' o inverso de f
Calculamos

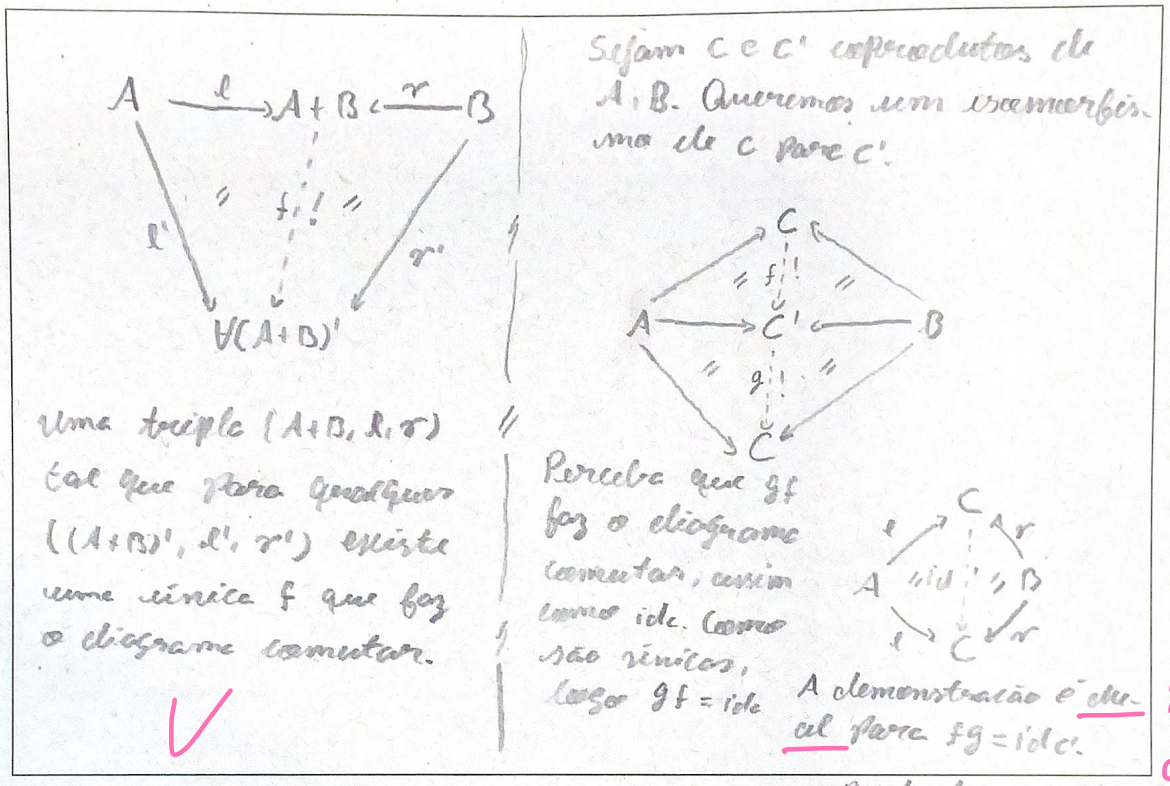
$$\begin{aligned} F(f) \circ F(f') &= F(f \circ f') && [2^{\text{a}} \text{ lei de functor}] \\ &= F(id_A) && [\text{escolha de } f'] \\ &= id_{FA} && [1^{\text{a}} \text{ lei de functor}] \end{aligned}$$

e similar!

Só isso mesmo.

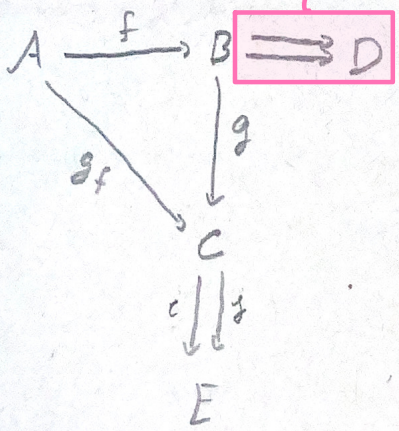
(24) A

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.



(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

o que é isso?



Suponha que $ig f = jgf$ (& assoc.)
$\therefore ig = jg$ [mono f]
$\therefore i = j$ [mono g]

Portanto gf é mono

mostrou que composição de epis é epi.

A3. Funtores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $A \xrightarrow{f} B$ iso. Teme por $B \xrightarrow{g} A$ a seta t.q. $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$ ✓

Suponha $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$ functor. ✓

Queremos que

(i) $Fg \circ Ff = 1_{FA}$ e (ii) $Ff \circ Fg = 1_{FB}$ ✓

Como $gf = 1_A$

$\therefore F(gf) = F(1_A)$ ✓

$\therefore Fg \cdot Ff = 1_{FA}$ ✓

De forma análoga para (ii) ✓

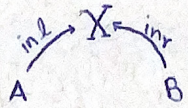
Logo, Ff é iso.

Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

Seja um objeto X de $\mathbb{C}$, o coproduto de A, B é:



Tal que, para qualquer objeto Y que tenha setas para A e B, existe única seta de X pra Y... que faz um certo diag. comutar! Cadê??

[UNICIDADE]
Sejam M, N coprodutos de A e B. Pela def. de M temos $M \xrightarrow{f} N$, tq f é única. Similarmente, temos $N \xrightarrow{g} M$ tq g é única.

Calculamos

$$g \circ f = 1_M$$
$$f \circ g = 1_N$$

Portanto, f e g são isomorfismos, logo $M \cong N$. ∎

«x é único» não significa nada por quê? (nem compila).

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

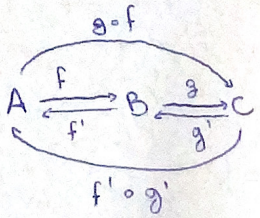
confundiu monos com split monos.

Sejam $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$, tq. f e g são monos.
Logo temos $B \xrightarrow{f'} A$ e $C \xrightarrow{g'} B$, tq. $f'f = 1_A$ e $g'g = 1_B$.
Pela def de $(\circ)$, temos $(f' \circ g') : C \to A$. $\left[C \xrightarrow{(f' \circ g')} A\right]$
Calculando

$$(f' \circ g')(g \circ f) = 1_A$$

Logo $(f' \circ g')$ é a inversa esquerda de $(g \circ f)$.
Portanto, $(g \circ f)$ é mono.

5



A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja f um isomorfismo entre A e B, na categoria $\mathbb{C}$.
E seja $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ um functor.
Sabemos que $F_A \xrightarrow{Ff} F_B$ existe em $\mathbb{D}$, e que $F_B \xrightarrow{Ff'} F_A$ também ~~caso~~ onde
f' seja a inversa de f.

Calculando

$Ff \circ Ff' \overset{?}{=} 1_{FA}$ [leis de F ①] aqui escondeu detalhes importantes.

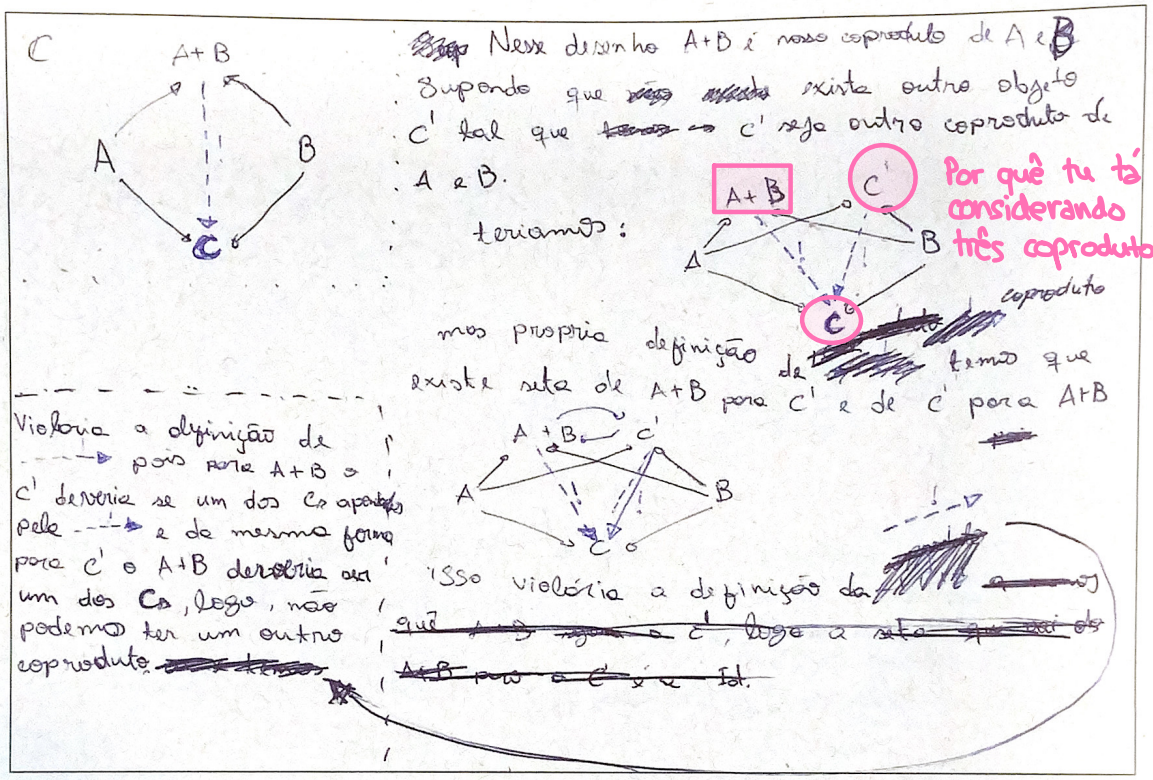
$Ff' \circ Ff = 1_{F_B}$. [leis de f ①] ?

Portanto, Ff é um isomorfismo em $\mathbb{D}$.

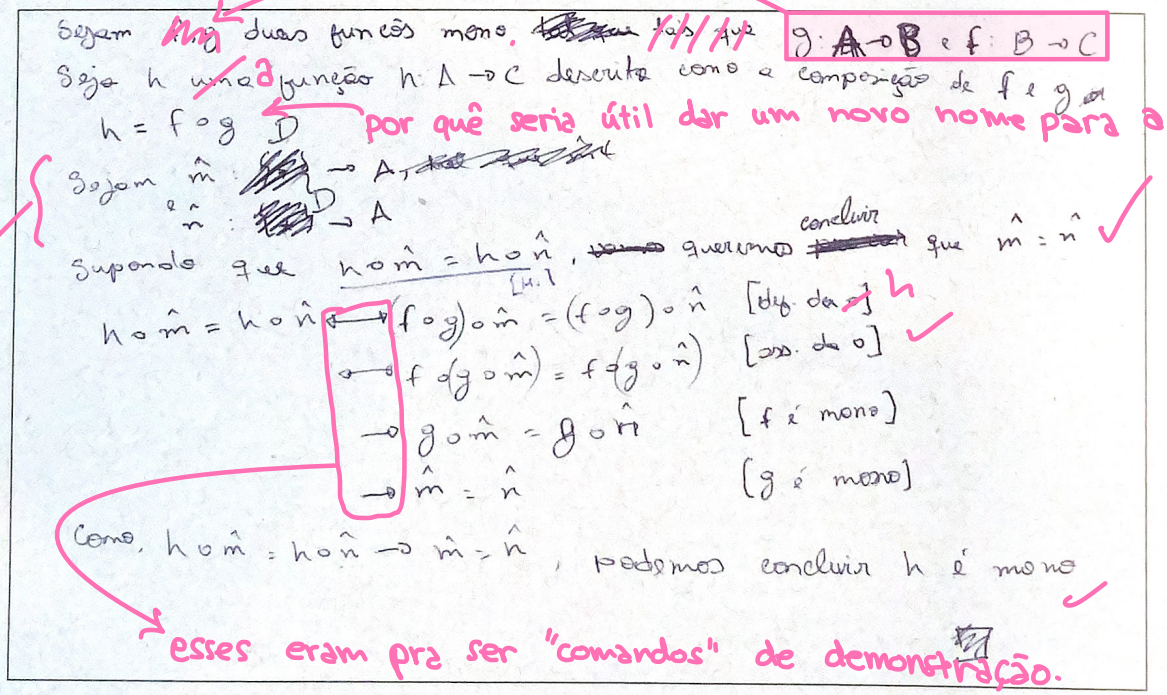
Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.



(8) **A2.** Composição de monos é mono
DEMONSTRAÇÃO.

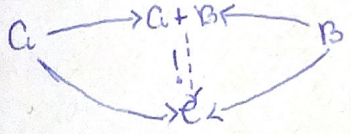


OBS: cuidado com tua escolha de "font" em matemática

(24) A

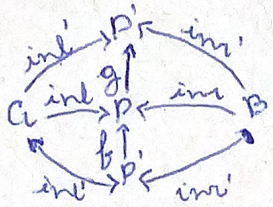
(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO. (seco demais)

-Definição coproduto dos C, B:



✓

-"Unicidade": temos o diagrama

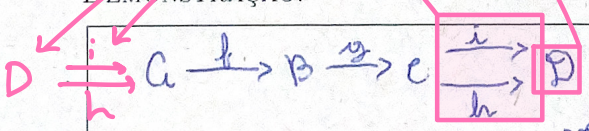


pois, sendo P e P' coproduto dos C, B, há uma única seta $f: P' \to P$ comutando o diagrama, e uma única $g: P \to P'$ comutando.

Note que $g \circ f \circ inl' = g \circ inl = inl'$, e também $g \circ f \circ inr' = g \circ inr = inr'$. Mas também $1_{P'} \circ inl' = inl'$ e $1_{P'} \circ inr' = inr'$. Pela unicidade da seta que comuta no coproduto, temos $g \circ f = 1_{P'}$ ∴ pois $1_{P'}$ também faz o diag comutar!

Similarmente, temos $f \circ g = 1_P$. Logo, f e g são isomorfismos, e $P \cong P'$.

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.



OBS: criminal a escolha de nomes i,h aqui!

Suponha $f: A \to B$ e $g: B \to C$ mono, e sejam $i, h: C \to D$ tais que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ h$.

Daí, pela associatividade da composição, temos $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ h)$.

Como g é mono, temos $f \circ i = f \circ h$.

Como f é mono, $i = h$.

Logo, $g \circ f$ também é mono. ∎

✓

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha em uma categoria $\mathcal{C}$ $f : C \to B$ iso. Daí há $g : B \to C$ inversa à esquerda e à direita de f.

Dado um functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, temos

$F_f : F_C \to F_B$ e $F_g : F_B \to F_C$

e $F(g \circ f) = F_g \circ F_f$, mas $g \circ f = 1_C$, logo

$F 1_C = 1_{F_C} = F_g \circ F_f = F(g \circ f)$

Similarmente, $1_{F_B} = F_f \circ F_g$

Logo, F_f é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.

ficou confuso

$f : C \to B$ iso

$F_f : F_C \to F_B$

há $g : B \to C$

e $F_g : F_B \to F_C$

e $g \circ f = 1_C$ $\quad F(g \circ f) = F_g \circ F$

essa parte escondida era pra ser tua conclusão aqui!

Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

O coproduto é definido como sendo o objeto ~~A×B~~ A+B para que saia uma seta de A e uma seta de B e qualquer outro objeto que atenda a tal restrição será isomorfo a ele.

isso não faz parte da demons.

é "pior", mas é isso que preciss definir aqui. Sem diagrama por quê?

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

ajudaria um diag para ver seus src/tgt.

Sejam g, f, h, t setas da categoria $\mathbb{C}$ tais que g e f são mono. Suponha que $(gf)h = (gf)t$.

~~$(gf)h = gft$~~, logo $g(fh) = g(ft)$ por associatividade da composição. ✓

Logo $fh = ft$ por g ser mono. ✓

Logo $h = t$ por f ser mono. ✓

Portanto, a composição de monos é mono. ✓

(Sem isso nada dos próximos compila.)

isso não compilaria: tu tá pedindo aceitar algo sobre tuas h,h' que foram declaradas pra ser arbitrárias

A3. Functores preservam isos.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja f uma seta em uma categoria $\mathbb{C}$ tal que f é isomorfa. Por definição, existe f' tal que $ff' = 1_{src(f)}$ e $f'f = 1_{tgt(f)}$.

dê nomes: Seja $f : A \to B$, ...

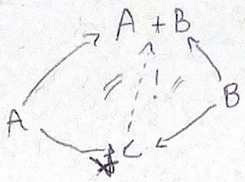
Só isso mesmo.

(24) **A**

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

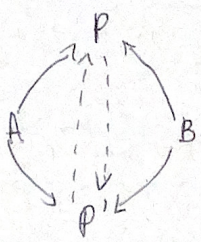
Sejam $A, B \in Obj(\mathbb{C})$, $A+B$:

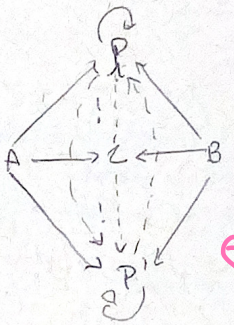
Seco demais!



Se P, P' são coprodutos, então são isomorfos:

(também!)





?!?

(8) **A2.** Composição de monos é mono.
DEMONSTRAÇÃO.

Se f, g são mono, então gf é mono.

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ mono.
Sejam $h, h': D \to A$. Vou mostrar que se $(gf)h = (gf)h'$, então $h = h'$.
Como $(gf)h = (gf)h'$, logo $g(fh) = g(fh')$. [Assoc]
Logo $fh = fh'$ [g é mono]
Logo $h = h'$ [f é mono].

$$D \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $A, B \in Obj(\mathbb{C})$ — $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ categorias.

Seja $f : A \to B$ iso, logo seja f' tal que $ff' = 1_B$ e $f'f = 1_A$.

Vou mostrar que Ff é iso, com Ff' como testemunha:

Calculamos em $\mathbb{D}$:

$$Ff\,Ff' = F(ff') \quad [\text{Functor}]$$
$$= F(1_B) \quad [f \text{ é iso}]$$
$$= 1_{FB}$$

$$Ff'Ff = F(f'f) \quad [\text{Functor}]$$
$$= F1_A \quad [f \text{ é iso}]$$

Similar!



Só isso mesmo.

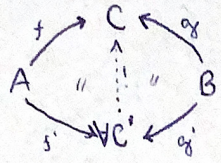
(24) **A**

C e C' não isomorfos

(8) **A1.** Defina o coproduto de dois objetos A, B numa categoria $\mathbb{C}$, e demonstre sua "unicidade".
DEMONSTRAÇÃO.

não sozinho!

Definição: Dizemos que C é coproduto dos A, B se e somente se:



Unicidade:

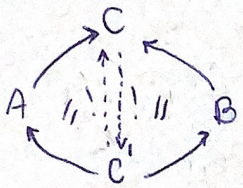
seco demais!

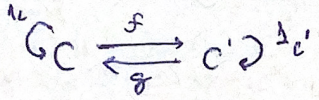
Basta $f \circ g = 1_{C'}$ e $g \circ f = 1_C$.

Quem são f e g? As únicas que tem.

Como f e g fazem o diagrama comutar logo $f \circ g = 1_{C'}$ e $g \circ f = 1_C$.

Não! Como?





(C e C' isomorfos)

(8) **A2.** Composição de monos é mono. ← L-conclusível
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam h, i monos. ← problemas de compilação sem src/tgt.

~~Basta $(\forall f, g : A \to B)[(i \circ h) \circ f = (i \circ h) \circ g \Rightarrow f = g]$.~~

Sejam $f, g : A \to B$.

Suponha $(i \circ h) \circ f = (i \circ h) \circ g$.

Logo $i \circ (h \circ f) = i \circ (h \circ g)$. [(0)-assoc]

Com i é mono logo $h \circ f = h \circ g$.

Como h é mono logo $f = g$.

✓

$(\forall f \text{ iso em } \mathbb{C})[Ff \text{ é iso em } \mathbb{D}]$

$\Downarrow$

f mono & f epi ? nope!

A3. Functores preservam isos.

DEMONSTRAÇÃO.

~~Seja f iso em $\mathbb{C}$.~~

~~(Ff mono):~~

~~Sejam $g', h' : FA \to FB$.~~

~~Suponha $(Ff) \circ (g') = (Ff) \circ h'$.~~

~~(Ff epi):~~

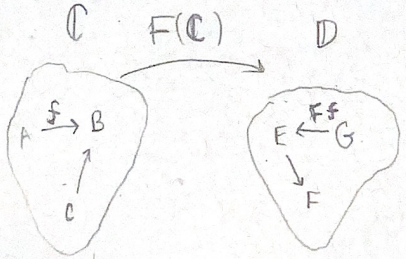
~~Sejam $g', h' : FB \to FC$.~~

~~Suponha $g' \circ (Ff) = h' \circ (Ff)$.~~

$F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$

$f : A \to B$

$Ff : FA \to FB$



Ff mono

$$FC \underset{Fh}{\overset{Fg}{\rightrightarrows}} FA \xrightarrow{Ff} FB$$

f mono

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

Só isso mesmo.