FMC2, 2018.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.3
(points: 30; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome:

30/04/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Lembram-se:

Glossário.

$x \mathrel{R} x$	(reflexiva)
$x \not\mathrel{R} x$	(irreflexiva)
$x \mathrel{R} y \implies y \mathrel{R} x$	(simétrica)
$x \mathrel{R} y \implies y \not\mathrel{R} x$	(assimétrica)
$x \mathrel{R} y \ \&\ y \mathrel{R} x \implies x = y$	(antissimétrica)
$x \mathrel{R} y \ \&\ y \mathrel{R} z \implies x \mathrel{R} z$	(transitiva)
reflexiva & transitiva	(preordem)
reflexiva & transitiva & simétrica	(relação de equivalência)
reflexiva & transitiva & antissimétrica	(ordem (parcial))

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(4) **F**

Seja $f : A \rightarrowtail A$ injetora. Seja F o conjunto de todos os fixpoints da f. Prove que $f^{-1}[F] \subseteq F$. Lembre-se que chamamos fixpoint da f qualquer elemento x do seu domínio tal que $f(x) = x$.

Prova.

(5) **G**

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$. Queremos definir a função

$$f \cup g : A \cup C \to B \cup D$$

consultando as f e g, numa maneira parecida com aquela da definição de $f \times g$.

Explique quais são as condições necessárias para definir a $f \cup g$, e defina-la. Observe que tua $f \cup g$, quando definida, precisa fazer o diagrama seguinte comutar (as setas $\hookrightarrow$ denotam as funções-inclusões):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\
A \cup C \arrow[r, dashed] & B \cup D \\
C \arrow[r] \arrow[u, hook] & D \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Definição.

(9) **H**

Considere as relações seguintes no $(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$:

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} (\exists u \in \mathbb{Z})\,(\forall x \in \mathbb{Z})\,[\, f(x) = g(x+u)\,]$$
$$f \wr g \overset{\text{def}}{\iff} (\exists v \in \mathbb{N})\,(\forall x \in \mathbb{Z})\,[\, f(x) = g(x)+v\,]\,.$$

Escolhe apenas um dos H1–H2 para resolver.

(7) **H1.** Prove que uma delas é relação de equivalência...
PROVA QUE ______ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

(9) **H2.** ...ou que a outra é relação de ordem.
PROVA QUE _____ É RELAÇÃO DE ORDEM.

(12) # I

No conjunto $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ definimos:

$$f \approx g \overset{\text{def}}{\iff} \text{o conjunto } \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x) \,\} \text{ é infinito;}$$
$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} \text{o conjunto } \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x) \,\} \text{ é finito.}$$

Escolhe apenas um dos I1–I2 para resolver.

(12) **I1.** Prove que uma delas é relação de equivalência…
PROVA QUE ______ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

(9) **I2.** …ou que a outra não é.
PROVA QUE ______ NÃO É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

RASCUNHO