FMC2, 2018.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.3
(points: 30; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome: Θάνος **Gabarito**

30/04/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Lembram-se:

Glossário.

$x \mathrel{R} x$	(reflexiva)
$x \not\mathrel{R} x$	(irreflexiva)
$x \mathrel{R} y \implies y \mathrel{R} x$	(simétrica)
$x \mathrel{R} y \implies y \not\mathrel{R} x$	(assimétrica)
$x \mathrel{R} y \;\&\; y \mathrel{R} x \implies x = y$	(antissimétrica)
$x \mathrel{R} y \;\&\; y \mathrel{R} z \implies x \mathrel{R} z$	(transitiva)
reflexiva & transitiva	(preordem)
reflexiva & transitiva & simétrica	(relação de equivalência)
reflexiva & transitiva & antissimétrica	(ordem (parcial))

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(4) **F**

Seja $f : A \rightarrowtail A$ injetora. Seja F o conjunto de todos os fixpoints da f. Prove que $f^{-1}[F] \subseteq F$. Lembre-se que chamamos fixpoint da f qualquer elemento x do seu domínio tal que $f(x) = x$.

PROVA.

Seja $a \in f^{-1}[F]$. Logo $f(a)$ é um fixpoint da f, ou seja, $f(f(a)) = f(a)$.
Agora, como f é injetora, temos $f(a) = a$, ou seja, a é um fixpoint também e logo $a \in F$.

(5) **G**

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$. Queremos definir a função

$$f \cup g : A \cup C \to B \cup D$$

consultando as f e g, numa maneira parecida com aquela da definição de $f \times g$.

Explique quais são as condições necessárias para definir a $f \cup g$, e defina-la. Observe que tua $f \cup g$, quando definida, precisa fazer o diagrama seguinte comutar (as setas $\hookrightarrow$ denotam as funções-inclusões):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\
A \cup C \arrow[r, dashed] & B \cup D \\
C \arrow[r] \arrow[u, hook] & D \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

DEFINIÇÃO.

Chame as f e g *compatíveis* sse:

$$\text{para todo } x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g,\ f(x) = g(x).$$

Agora dadas *compatíveis* $f : A \to B$ e $g : C \to D$, definimos a $f \cup g : A \cup C \to B \cup D$ pela

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in C. \end{cases}$$

Equivalentemente, podemos definir a $f \cup g$ definindo seu gráfico:

$$\operatorname{graph}(f \cup g) = \operatorname{graph}(f) \cup \operatorname{graph}(g).$$

Observe que nas duas maneiras precisamos a condição de compatibilidade para a $f \cup g$ ser bem definida.

(9) **H**

Considere as relações seguintes no $(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$:

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} (\exists u \in \mathbb{Z})\,(\forall x \in \mathbb{Z})\,[\,f(x) = g(x+u)\,]$$
$$f \wr g \overset{\text{def}}{\iff} (\exists v \in \mathbb{N})\,(\forall x \in \mathbb{Z})\,[\,f(x) = g(x) + v\,]\,.$$

Escolhe apenas um dos H1–H2 para resolver.

(7) **H1.** Prove que uma delas é relação de equivalência...
PROVA QUE $\underline{\ \ \sim\ \ }$ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

REFLEXIVA: Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(x+0)$, logo $f \sim f$.
SIMÉTRICA: Sejam $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f \sim g$. Então seja $i \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = g(x+i)$. Observe que para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos:

$$g(x) = g((x-i)+i) = f(x-i).$$

Ou seja, o $-i \in \mathbb{Z}$ mostra que $g \sim f$.
TRANSITIVA: Sejam $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f \sim g$ e $g \sim h$. Sejam então $i, j \in \mathbb{Z}$ tais que para todo $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = g(x+i)$ e $g(x) = h(x+j)$. Seja $x \in \mathbb{Z}$ e calcule:

$$f(x) = g(x+i) = h((x+i)+j) = h(x+(i+j)).$$

Ou seja, o inteiro $i+j$ mostra que $f \sim h$.

(9) **H2.** ...ou que a outra é relação de ordem.
PROVA QUE $\underline{\ \ \wr\ \ }$ É RELAÇÃO DE ORDEM.

REFLEXIVA: Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(x) + 0$, logo $f \wr f$.
TRANSITIVA: Sejam $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f \wr g$ e $g \wr h$. Sejam então $i, j \in \mathbb{N}$ tais que para todo $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = g(x) + i$ e $g(x) = h(x) + j$. Seja $x \in \mathbb{Z}$ e calcule:

$$f(x) = g(x) + i = (h(x) + j) + i = h(x) + (i+j).$$

Como $i, j \in \mathbb{N}$, temos $i + j \in \mathbb{N}$ e logo $f \wr h$.
ANTISSIMÉTRICA: Sejam então $i, j \in \mathbb{N}$ tais que para todo $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = g(x) + i$ e $g(x) = f(x) + j$. Seja $x \in \mathbb{Z}$ e calcule:

$$f(x) = g(x) + i = f(x) + i + j.$$

Logo $i + j = 0$, e sendo ambos naturais, temos $i = j = 0$. Ou seja, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = g(x)$, logo $f = g$.

(12) # I

No conjunto $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ definimos:

$$f \approx g \overset{\text{def}}{\iff} \text{o conjunto } \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x) \,\} \text{ é infinito;}$$
$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} \text{o conjunto } \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x) \,\} \text{ é finito.}$$

Escolhe apenas um dos I1–I2 para resolver.

(12) **I1.** Prove que uma delas é relação de equivalência...
PROVA QUE $\underline{\quad \sim \quad}$ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

REFLEXIVA. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculamos: $\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq f(x) \,\} = \emptyset$, que, sendo finito, mostra que $f \sim f$.
SIMÉTRICA. Trivial, pois $\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x) \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq f(x) \,\}$.
TRANSITIVA. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f \sim g$ e $g \sim h$. Logo:

$$A \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x) \,\} \text{ finíto} \qquad \& \qquad B \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq h(x) \,\} \text{ finíto.}$$

Seja $w \in \mathbb{R}$. Vamos provar que

$$w \notin A \cup B \implies f(w) = h(w).$$

Calculamos:
$$\begin{aligned} f(w) &= g(w) && \text{(pois } w \notin A\text{)} \\ &= h(w) && \text{(pois } w \notin B\text{).} \end{aligned}$$

Contrapositivamente,
$$f(w) \neq h(w) \implies w \in A \cup B.$$

Mas $A \cup B$ é finito, (sendo uma união finita de conjuntos finitos) e mostramos que

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq h(x) \,\} \subseteq A \cup B$$

e logo também finito, ou seja, $f \sim h$.

(9) **I2.** ...ou que a outra não é.
PROVA QUE $\underline{\quad \approx \quad}$ NÃO É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

Ela não é transitiva. Como contraexemplo, tome as $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pelas:

$$f(x) = 1 \qquad\qquad g(x) = \cos(x) \qquad\qquad h(x) = -1.$$

Observe que $f \approx g$ pois concordam nos pontos $2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Também $g \approx h$ pois concordam nos pontos $(2k+1)\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Mesmo assim, $f \not\approx h$ pois não concordam em nenhum ponto.

Só isso mesmo.